Un point sur les notations

apprendre à lire et à écrire la physique...

Dans le livre une certaine confusion réside dans la notation des vecteurs (tous les vecteurs sont notés en gras...) et des tenseurs en général... Je propose de définir et d'adopter les règles précises ci-dessous.

Remarque préliminaire : normalement, après la lecture du chapitre 4 du livre de cours, vous devriez être capable de comprendre la totalité de tout ce qui est écrit ci-après! Si ce n'est pas le cas, soit vous n'avez pas assez lu ce chapitre, soit vos cours d'algèbre linéaire n'ont pas été suffisants et là je ne peux rien pour vous...

J'ai rajouté ces quelques lignes, pour que tout soit clair entre nous et je l'ai fait pour vous, afin que vous puissiez communiquer avec moi dans les meilleures conditions. Si, après mure réflexion, vous décellez des imprécisions ou pire des erreurs fussent-elles d'orthographe (qui n'en fait pas...) merci de me les indiquer par mail !

Définition

Tout d'abord un rappel sur la définition des tenseurs...

La définition générale d'un tenseur est donnée page 117 du livre elle est très simple : c'est un opérateur qui envoie un élément du produit cartésien d'un espace vectoriel n fois avec lui-même dans $\mathbb{R}$.

Le nombre n de termes dans le produit cartésien est appelé l'ordre du tenseur :

- Un tenseur d'ordre 0 est un scalaire;
- Un tenseur d'ordre 1 est un élément de l'ensemble $\mathcal{T}^1$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: C'est donc un vecteur car à chaque vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ on peut faire correspondre une forme linéaire $\varphi_{\boldsymbol{x}}$ dont l'image est $\mathbb{R}$. Ce $\varphi_{\boldsymbol{x}}$ est la projection le long de l'axe défini par ce vecteur :

$$\varphi_{\boldsymbol{x}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{y} & \mapsto & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \end{array}$$

  La forme $\varphi_{\boldsymbol{x}}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ c'est donc elle aussi un tenseur d'ordre 1... Il y a donc une petite ambiguïté dans le cas $p = 1$ qui est due au fait que $\mathcal{T}^1$ est le dual de $\mathbb{R}^n$ qui en dimension finie est isomorphe à $\mathbb{R}^n$...

  La valence d'un tenseur permet de lever cette ambiguïté, voir plus bas...

- Un tenseur d'ordre 2 est un élément de l'ensemble $\mathcal{T}^2$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- Et ainsi de suite, un tenseur d'ordre p est un élément de l'ensemble $\mathcal{T}^p$ des applications linéaires de $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p \text{ fois}} \to \mathbb{R}$

Notation pour les vecteurs et les tenseurs

- *Pour conserver la nostalgie* de nos chers vecteurs de prépa, je propose de continuer à les noter avec une flèche. Ainsi un tenseur d'ordre 1 (un vecteur) sera noté $\vec{x}$ (`$\vec{x}$` en LaTeX) si et seulement si l'espace vectoriel sur lequel il travaille est $\mathbb{R}^3$. Cette notation est donc réservée au cas $p = 1$ et $n = 3$.
- Tous les autres objets tensoriel non scalaires seront notés en gras italique : $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}^p$ si $p = 1$ et $n > 3$ ou bien si $p > 1$. En LaTeXon utilise la commande boldsymbol : $\boldsymbol{x}$ se code `$ \boldsymbol{x}$`.

  Par exemple un 4–vecteur ($p = 1$ et $n = 4$) sera noté $\boldsymbol{x}$ ...

  Attention, il ne faut pas confondre un tenseur et ses composantes : pour ces dernières il faut choisir sa base.

Composantes d'un tenseur

Il est simple de voir que $\mathcal{T}^p$ est un espace vectoriel de dimension np et que par extension $\mathcal{T}^0 = \mathbb{R}$, i.e. le corps des scalaires de tous ces espaces vectoriels...

On peut *représenter* un tenseur $\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}^p$ par ses *composantes* en choisissant une base pour chacun des termes du produit cartésien qui le définit. Chacune de ces composantes est un nombre réel alors qu'un tenseur n'est pas un nombre, c'est, lorsqu'on a précisé la base, un ensemble de np composantes.

Types de composantes

Cas des tenseurs d'ordre 1

- si l'on choisit de se placer dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (composée de vecteurs d'où la notation $\boldsymbol{e}$) pour représenter un élément $\boldsymbol{v}$ de $\mathcal{T}^1$: alors $\boldsymbol{v}$ est un $n-$vecteur qui est défini de façon univoque par la donnée de n nombres réels $v^1, \cdots, v^n$ tels que

  $$\boldsymbol{v} \ = v^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v^n\boldsymbol{e}_n$$

  On pourra écrire par abus de notation $\boldsymbol{v} \rightarrow \ v^i = \left[v^1, \cdots, v^n\right]^\top$. Dans cette écriture, le $\top$ signifie la transposition de la colonne $\left[v^1, \cdots, v^n\right]$ et $\rightarrow$ signifie *est représenté par* . On parle alors de *la* composante contravariante de $\boldsymbol{v}$.

- Comme on a vu qu'en dimension finie $\mathbb{R}^{n*} = \mathbb{R}^n$, pour représenter un élément $\boldsymbol{v}$ de $\mathcal{T}^1$, on peut donc également choisir de se placer dans la base $(\varphi_{\boldsymbol{e}_1}, \cdots, \varphi_{\boldsymbol{e}_n})$ du dual $\mathbb{R}^{n*}$ de $\mathbb{R}^n$, composée des n projections sur les n vecteurs de base de $\mathbb{R}^n$: alors $\boldsymbol{v}$ est un $n-$vecteur qui est défini de façon univoque par la donnée de n nombres réels $v_1, \cdots, v_n$ tels que

  $$\varphi_{\boldsymbol{v}} = v_1\varphi_{\boldsymbol{e}_1} + \cdots + v_n\varphi_{\boldsymbol{e}_n}$$

  On pourra écrire par abus de notation $\boldsymbol{v} \rightarrow \ v^i = \left[v^1, \cdots, v^n\right]$. On parle alors de *la* composante covariante de $\boldsymbol{v}$.

Cas des tenseurs d'ordre 2

Pour les tenseurs d'ordre supérieur à 1 il y a plus de cas pour la représentation : En effet, un tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre 2 est un élément de l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Il existe donc 4 façons de le représenter en fonction des bases que l'on choisit...

- si l'on choisit, à chaque fois, de se placer dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on aura $\boldsymbol{T} \ \rightarrow T^{\mu\nu}$. On parle alors de *la* composante *complètement* contravariante de $\boldsymbol{T}$.

- si l'on choisit, à chaque fois, de se placer dans la base $(\varphi_{\boldsymbol{e}_1}, \cdots, \varphi_{\boldsymbol{e}_n})$ de $\mathbb{R}^{n*}$ on écris alors implicitement que $\boldsymbol{T} \ \rightarrow T_{\mu\nu}$. On parle alors de *la* composante *complètement* covariante de $\boldsymbol{T}$.

- si l'on ne décide de parler de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*}$ ou de $\mathbb{R}^{n*} \times \mathbb{R}^n$ on adoptera alors les représentations $\boldsymbol{T} \ \rightarrow T^\mu{}_\nu$ ou $\boldsymbol{T} \ \rightarrow T_\mu{}^\nu$. On parle alors de composantes *mixtes* de $\boldsymbol{T}$.

et ainsi de suite...

Valence d'un tenseur

Pour lever toute ambiguïté on définit finalement la valence d'un tenseur qui décompose son ordre en fonction de son action sur $\mathbb{R}^n$ ou sur $\mathbb{R}^{n*}$: un tenseur de valence (p, q) opère sur le produit cartésien de $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p \text{ fois}}$ par $\underbrace{\mathbb{R}^{n*} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n*}}_{q \text{ fois}}$, son ordre est donc l'entier $p + q$.

- Les vecteurs sont des tenseurs d'ordre 1 de valence (1,0) ;

- Les formes linéaires sont des tenseurs d'ordre 1 de valence (0,1) ;

- Les applications linéaires $\boldsymbol{F}$ de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (endomorphisme $\mathbb{R}^n$) sont des tenseurs d'ordre 2 en effet :

  Si l'on fait agir $\boldsymbol{F}$ sur un élément $\forall \boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$ on aura un vecteur $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$, on peut alors toujours considérer la forme $\varphi_{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^{n*}$ qui pourra agir sur un élément $\forall \boldsymbol{z}$ de $\mathbb{R}^n$ pour obtenir le scalaire $f = \varphi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$ résultat de l'action du tenseur $\boldsymbol{F}$. On voit bien dans cette dernière écriture que deux tenseurs d'ordre 1, $\boldsymbol{x}$ et $\varphi_{\boldsymbol{y}}$, sont nécessaires pour obtenir un scalaire en actionnant $\boldsymbol{F}$. On voit bien aussi que ces deux vecteurs sont puisés dans $\mathbb{R}^n$ et dans $\mathbb{R}^{n*}$.
  Ainsi une matrice carrée, qui représente une application linéaire dans une base de $\mathbb{R}^n$, est un tenseur d'ordre 2 de valence (1,1).

- Et ainsi de suite...

Une dernière recommandation sur le produit scalaire...

Tout ce que nous venons de dire est valable dans le cas général, mais le diable est dans les détails.

Quand on fait de la physique et plus particulièrement de la relativité, on est d'une part dans le cas $n = 4$ et d'autre part le produit scalaire que l'on utilise ne définit pas une distance définie positive... mais tout cela reste vrai... En et plus on compte les indices à partir de 0.

Par extension et abus de langage on notera donc en physique

$$\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^3,\ \vec{x}\cdot\vec{x}=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2=\left(x_1\right)^2+\left(x_2\right)^2+\left(x_3\right)^2=\vec{x}^{\ 2}\in\mathbb{R}_+$$
$$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{M}_{4,\mathbb{R}},\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=\left(x^0\right)^2-\left(x^1\right)^2-\left(x^2\right)^2-\left(x^3\right)^2=\left(x_0\right)^2-\left(x_1\right)^2-\left(x_2\right)^2-\left(x_3\right)^2\in\mathbb{R}$$

Le signe de $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$ définissant le genre du 4–vecteur $\boldsymbol{x}$.

Pour bien finir de vous embrouiller, on pourra écrire les abus de langage suivants : $\boldsymbol{x}\to x^\mu=\left[x^0,x^1,x^2,x^3\right]^\top=\left[x^0,\vec{x}\right]^\top$. On aura alors $x_\nu=\eta_{\mu\nu}\ x^\mu$. Les composantes du tenseur métrique $\boldsymbol{\eta}$ ont été définies pour rendre compte des choses que l'on constate dans les expériences (parce qu'on fait de la physique). On a ainsi vu qu'il fallait poser $\eta_{00}=1$, $\eta_{ij}=-\delta_{ij}$ et $\eta_{0i}=\eta_{i0}=0$ pour rendre compte de la nature avec ce formalisme. On en a déduit $\eta^{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ et $\eta^\mu{}_\nu=\eta_\nu{}^\mu=\delta^\mu_\nu$ pour toutes les valeurs possibles de μ et ν. On en déduit que $x_\mu=\left[x_0=x^0,x_1=-x^1,x_2=-x^2,x_3=-x^3\right]$ et donc que $x_\mu=\left[x^0,-\vec{x}\right]$.

Pour les composantes des tenseurs d'ordre plus grand que 1 c'est différent... Vous comprenez donc que l'on ne puisse pas écrire quelque chose comme T^μ_ν ou encore moins $S^\mu_{\nu\rho}$ car on ne sait pas ce que ça veut dire... Il faudra écrire $T^\mu{}_\nu$, $T_\nu{}^\mu$ ou bien $S^\mu{}_{\nu\rho}$, $S_{\nu\rho}{}^\mu$ ou encore $S_\nu{}^\mu{}_\rho$ en faisant attention à l'ordre des indices... Ne parlons pas des mécaniciens qui écrivent toujours $S_{\mu\nu\rho}$!

Vous comprenez aussi pourquoi il est fondamental d'utiliser LaTeX : sinon on ne comprend rien !

Truc et astuce : pour écrire $T^\mu{}_\nu$ il faut insérer un espace nul entre μ et ν sinon ça fait T^μ_ν, il faut donc coder `$T^{\mu}{}_{\nu}$`.

Salut et Fraternité !