The Last DM

Paul Ramond
Laboratoire Univers et Théories, Observatoire de Paris, CNRS, Université PSL, Université de Paris, 92190 Meudon, France

I. ÉQUATIONS DE MAXWELL

En relativité restreinte, on muni la variété $\mathcal{M}$ (ici $\mathbb{R}^4$) d'un tenseur métrique η, appelée métrique de Minkowski. On obtient alors *l'espace-temps de Minkowski*, noté $(\mathcal{M},\eta)$, dans lequel on peut étudier, entre autres, les équations de Maxwell, qui admettent une formulation tensorielle. Elles sont :

$$\nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \epsilon_0^{-1} J^\beta , \tag{1}$$

où $F_{\alpha\beta}$, *anti-symétrique*, est le *tenseur de Faraday* qui contient toute la physique du champ électromagnétique, et J^β est le 4-vecteur *courant électrique*. Le tenseur $F^{\alpha\beta}$ s'obtient à partir de $F_{\alpha\beta}$ par dualité métrique, i.e., $F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}F_{\gamma\delta}$. Enfin, l'opérateur ∇ est la dérivée covariante sur $(\mathcal{M},\eta)$. Tant que les coordonnées sur $\mathcal{M}$ ne sont pas précisées, ∇ et la dérivée ordinaire ∂ diffèrent, et les composantes de la métrique de Minkowski η ne sont pas $\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ a priori.

Question 1. Montrer que quelque soient les coordonnées choisies, la première équation de Maxwell reste inchangée si on remplace la dérivée covariante ∇ par la dérivée ordinaire ∂. Donnez un exemple de coordonnées pour lesquelles ce résultat est vrai aussi pour la seconde équation.

Question 2. On choisi des coordonnées inertielles $(x^\alpha) = (ct, x^i)$ de sorte que $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. On peut montrer que l'information encodée dans $F_{\alpha\beta}$ peut s'exprimer en terme de deux 4-vecteurs X^α et Y^α, selon la formule

$$F_{\alpha\beta} = (\eta_{\alpha\gamma}\delta^0_\beta - \eta_{\beta\gamma}\delta^0_\alpha)X^\gamma + c\,\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\delta^\mu_0 Y^\nu . \tag{2}$$

où c est une constante réelle. Vérifier avec (2) que $F_{\alpha\beta}$ est bien anti-symétrique, et exprimer ses 6 composantes indépendantes en fonction de (X^1, X^2, X^3) et (Y^1, Y^2, Y^3).

Rappels : les indices grecs $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ (resp. latins i,j,k,ℓ) varient dans $\{0,1,2,3\}$ (resp. dans $\{1,2,3\}$). Le symbole δ^β_α est le symbole de Kronecker (il vaut 1 si $\alpha=\beta$; et 0 sinon). Le symbole $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le symbole de Levi-Civita (il vaut 1 (resp. -1) si $\alpha\beta\gamma\delta$ est une permutation paire (resp. impaire) de 0123; et 0 sinon. Par exemple $\varepsilon_{3201} = -1$ et $\varepsilon_{1130} = 0$.

Question 3. On rappelle qu'en coordonnées inertielles, $\nabla = \partial$. À l'aide de la décomposition de $F_{\alpha\beta}$ précédente, expliciter les équations de Maxwell en fonction des 3-vecteurs $\vec{X} = (X^i)$ et $\vec{Y} = (Y^i)$, puis interpréter ces deux vecteurs physiquement.

II. JAUGE DE LORENZ POUR LES OEM

Une façon bien plus élégante de résoudre les équations de Maxwell (qu'elles soient sous forme tensorielle (1) ou non), est de s'aventurer du côté de la géométrie différentielle. En effet, l'incroyable Henri Poincaré, en plus d'être de loin le savant préféré de votre serviteur, nous laisse un lemme tout à fait fondamental:

Lemme de Poincaré: Si $X_{\alpha\beta}$ est une 2-forme différentielle fermée, alors il existe Y_α tel que $X_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha Y_\beta - \nabla_\beta Y_\alpha$.

La réciproque vous la connaissez : c'est le théorème de Schwarz. Ici, en éléctromagnétisme, l'antisymétrie de $F_{\alpha\beta}$ assure que $F_{\alpha\beta}$ est bien une 2-forme *différentielle*. La première équation de Maxwell nous dit ensuite que $F_{\alpha\beta}$ est *fermée*. D'après le Lemme de Poincaré, en coordonnées inertielles il existe donc une forme Z_α telle que

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha Z_\beta - \partial_\beta Z_\alpha .$$

Soyons fiers : nous avons déjà résolu la première équation de Maxwell. On appellera Z_α le *potentiel électromagnétique*. Contrairement à $F_{\alpha\beta}$, ce n'est pas une observable physique (on ne peut pas le mesurer classiquement).

Question 4. À l'aide de ce qui précède, écrire la seconde équation de Maxwell en fonction de $Z^\alpha = \eta^{\alpha\beta}Z_\beta$ (et J^α). On pourra noter $\partial^\alpha = \eta^{\alpha\beta}\partial_\beta$ et $\Box = \eta^{\alpha\beta}\partial_a\partial_b$ l'opérateur d'Alembertien sur $(\mathcal{M},\eta)$, en coordonnées inertielles (ct, x^i).

Question 5. Donner une condition suffisante (la plus simple possible) sur Z_α pour que l'équation précédente soit une équation de d'Alembert pour Z_α. Cette condition s'appelle la jauge de Lorenz (et non pas Lorentz!) Nous allons montrer qu'il est toujours possible, sans changer la physique, que cette condition soit réalisée.

Question 6. Soit Φ un champ scalaire sur $(\mathcal{M},\eta)$. Démontrer que l'on peut remplacer Z_α par $Z_\alpha + \partial_\alpha\Phi$ sans changer la physique. En déduire une expression de Φ en fonction Z_α pour que la jauge de Lorenz soit vérifiée. Cette invariance de jauge des équations de Maxwell, Φ en est le *générateur*.

Question 7. En écrivant $Z^\alpha = \mathcal{X}\delta^\alpha_0 + c\mathcal{Y}^\alpha$ retrouvez des équations classiques en interprétant $\mathcal{X}, \mathcal{Y}^\alpha$ et J^α en fonction des *potentiels* électromagnétiques et des densités de courant et charge usuelles.

III. ÉQUATION D'EINSTEIN LINÉARISÉE

En relativité générale (RG), toute la physique est encodée dans une unique équation tensorielle appelée équation d'Einstein :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}\,. \tag{3}$$

Dans cette équation, $R_{\alpha\beta}, R$ et $g_{\alpha\beta}$ sont respectivement le tenseur de Ricci, le scalaire de Ricci et le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$, dont $R_{\alpha\beta}$ et R sont des fonctions. C'est la métrique $g_{\alpha\beta}$ qui est l'inconnue centrale de l'équation, elle caractérise à elle seule toute la géométrie de l'espace-temps à l'étude. Le membre de droite fait intervenir la constante d'Einstein $\kappa \equiv 8\pi G/c^4$, et le tenseur énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$, qui lui contient l'information sur la matière et l'énergie contenue dans l'espace-temps et dépend aussi de la métrique en général.

Contrairement aux équations de Maxwell (1), l'équation d'Einstein (3) est hautement non-linéaire, et admet de nombreuses solutions qui n'ont pas de caractère ondulatoire. Pour obtenir une équation de d'Alembert, dont la solution est appelée onde gravitationnelle (OG), on peut linéariser (3) autour d'une de ses solutions. Nous choisirons pour cette dernière la métrique de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$, qui est la solution *triviale* de (3), caractérisant un espace-temps vide de matière et de courbure nulle. C'est l'espace-temps de Minkowski, cadre de la théorie de la relativité restreinte.

Pour linéariser l'équation (3) par rapport à $\eta_{\alpha\beta}$, nous allons nous munir de coordonnées cartésiennes telles que $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ localement et faire une et une seule hypothèse : la métrique solution de (3) s'écrit

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\,, \quad \text{avec} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1\,. \tag{4}$$

Dans toute la suite du devoir, on appellera $h_{\alpha\beta}$ la *perturbation*, $O(h)$ dénotera un terme linéaire en $h_{\alpha\beta}$ et $O(h^2)$ un terme non-linéaire en $h_{\alpha\beta}$. Pour un système de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3), ∂_α est l'opérateur de dérivée partielle par rapport à x^α, pour tout $\alpha \in \{0,1,2,3\}$.

Question 1. On défini la *perturbation inverse* $h^{\alpha\beta}$ par la formule $h^{\alpha\beta} \equiv \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} h_{\beta\delta}$. Montrer, en utilisant $g_{\alpha\gamma} g^{\beta\gamma} = \delta^\beta_\alpha$, que la métrique inverse $g^{\alpha\beta}$ vérifie

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + O(h^2)\,. \tag{5}$$

Question 2. Montrer que, sous notre hypothèse, les symboles de Christoffel sont donnés par

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial h_{\delta\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial h_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta}\right) + O(h^2) \tag{6}$$

Question 3. Expliquer, sans calcul, pourquoi le tenseur et le scalaire de Ricci vérifient

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} \quad \text{et} \quad R = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}\,, \tag{7}$$

à des termes $O(h^2)$ près. En déduire, successivement, leurs expression à l'ordre dominant en la perturbation $h_{\alpha\beta}$.

Question 4. On introduit la *perturbation à trace renversée*

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{h}{2}\eta_{\alpha\beta}\,, \tag{8}$$

où $h \equiv \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ est la trace de $h_{\alpha\beta}$. En calculant sa trace $\bar{h} \equiv \eta^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta}$, justifier le nom de $\bar{h}_{\alpha\beta}$. Pour que les expressions soient plus simples par la suite, on défini la quantité auxiliaire

$$V_\alpha \equiv \eta^{\beta\gamma} \frac{\partial \bar{h}_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}\,. \tag{9}$$

Question 5. On appelle *tenseur d'Einstein*, noté $G_{\alpha\beta}$, le membre de gauche de l'équation (3). Montrer qu'il admet la décomposition suivante :

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\Box \bar{h}_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta}[V] + O(h^2)\,, \tag{10}$$

où $\Box \equiv \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ est l'opérateur d'Alembertien sur l'espace-temps de Minkowski, et $L_{\alpha\beta}[V]$ désigne un tenseur agissant comme un opérateur linéaire sur V_α (son expression exacte n'est pas demandée.)

IV. JAUGE DE LORENZ POUR LES OG

Nous voyons, d'après les résultats de la section précédente, que l'équation d'Einstein linéarisée (3) peut s'écrire sous la forme

$$\Box \bar{h}_{\alpha\beta} - 2L_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}\,. \tag{11}$$

Dans le cas où $L_{\alpha\beta} = 0$, l'équation obtenue est une équation de d'Alembert pour la perturbation $\bar{h}_{\alpha\beta}$. Puisque l'opérateur $L_{\alpha\beta}$ est linéaire, on a $L_{\alpha\beta} = 0$ dès lors que $V_\alpha = 0$. Nous allons montrer, dans cette dernière partie, qu'il est toujours possible d'imposer la condition $V_\alpha = 0$ en exploitant l'invariance par changement de coordonnées.

Nous allons passer des anciennes coordonnées x^α aux nouvelles, notées y^α, et définies par la formule

$$y^\alpha(x) = x^\alpha + \xi^\alpha(x)\,, \tag{12}$$

où les ξ^α sont quatre fonctions de $x^\alpha \in \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, on utilisera la notation $\hookrightarrow$ pour passer d'une quantité évaluée dans les coordonnées x^α (à gauche de $\hookrightarrow$) aux coordonnées y^α (à droite de $\hookrightarrow$). Par exemple, on a la loi de transformation pour les composantes de la métrique (que l'on utilisera plus bas) :

$$g_{\alpha\beta} \hookrightarrow g_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial y^\beta}\,. \tag{13}$$

Question 6. On fait l'hypothèse que ce changement de variable est *infinitésimal*, dans le sens où $|\partial \xi^\alpha / \partial x^\beta| \ll 1$ et on va négliger toutes les non-linéarités en $\partial_\beta \xi^\alpha$. Montrer, en inversant (12), que l'on a

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} = \delta^\alpha_\beta - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\,. \tag{14}$$

Question 7. En exploitant la loi de transformation des composantes de la métrique, montrer que dans les nouvelles coordonnées la métrique vérifie toujours l'hypothèse (4), et que la perturbation subit la *transformation*

$$h_{\alpha\beta} \hookrightarrow h_{\alpha\beta} - \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha}\right). \tag{15}$$

Question 8. Établir alors des lois de transformation similaires pour la trace h, puis $\bar{h}_{\alpha\beta}$, et enfin montrer que vecteur perturbation V_α est transformé comme

$$V_\alpha \hookrightarrow V_\alpha - \Box \xi_\alpha\,, \quad \text{où} \quad \xi_\alpha \equiv \eta_{\alpha\beta}\xi^\beta\,. \tag{16}$$

Question 9. En utilisant le résultat de la question précédente, expliquer, alors, comment choisir des coordonnées pour lesquelles, à l'ordre dominant, l'équation d'Einstein linéarisée est une équation de d'Alembert pour $\bar{h}_{\alpha\beta}$.

Question 10. Par analogie avec les équations de Maxwell, le fait de choisir des coordonnées pour simplifier mathématiquement le problème (sans en changer la physique) s'appelle un *choix de jauge*. Choisir des coordonnées annulant le vecteur V_α correspond à se placer dans la jauge de Lorenz. En exploitant ce devoir et vos connaissances personnelles, établissez un dictionnaire entre les ondes gravitationnelles d'une part, et les ondes électromagnétiques de l'autre (sous la forme d'un tableau comme le suivant, par exemple) :

	Ondes EM	*RG linéarisée*
Générateur		
Potentiel		
Transformation de jauge		
Invariant de jauge		
Jauge de Lorenz		
Invariant de jauge		
Loi de conservation		
Équation d'onde		