Partie I et II

Réponse 1. Par définition de la notation anti-symétrique $[\ldots]$, on a

$$\nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} \;=\; \frac{1}{3!}(\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} \quad \nabla_\alpha F_{\gamma\beta} \quad \nabla_\beta F_{\alpha\gamma} \quad \nabla_\gamma F_{\beta\alpha}).$$

Les termes de même couleur sont égaux, puisque $F_{\alpha\beta}$ est anti-symétrique, e.g., $\nabla_\alpha F_{\gamma\beta} = \quad \nabla_\alpha F_{\beta\gamma}$. Si les coordonnées ne sont pas précisées, les symboles de Christoffels ne sont pas nuls et on a :

$$\begin{aligned}
3\nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} &= \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} \\
&= \partial_\alpha F_{\beta\gamma} \quad {}^{\delta}_{\alpha\beta}F_{\delta\gamma} \quad {}^{\delta}_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta} \\
&+ \partial_\beta F_{\gamma\alpha} \quad {}^{\delta}_{\beta\gamma}F_{\delta\alpha} \quad {}^{\delta}_{\beta\alpha}F_{\gamma\delta} \\
&+ \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \quad {}^{\delta}_{\gamma\alpha}F_{\delta\beta} \quad {}^{\delta}_{\gamma\beta}F_{\alpha\delta}
\end{aligned}$$

Cette fois-ci, les termes de même couleur sont opposés, par la symétrie ${}^{\delta}_{\alpha\beta} = {}^{\delta}_{\beta\alpha}$ et par l'anti-symétrie $F_{\gamma\beta} = \quad F_{\beta\gamma}$. Il reste donc, quelque soient les coordonnées

$$3\nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 3\partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]},$$

pour les même raisons que précédement. Ainsi, la première équation de Maxwell reste vraie si $\nabla = \partial$.

La seconde ne l'est pas. En effet $\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + {}^{\alpha}_{\alpha\gamma}F^{\gamma\beta} + {}^{\beta}_{\alpha\gamma}F^{\alpha\gamma}$. Or ${}^{\beta}_{\alpha\gamma}F^{\alpha\gamma} = 0$ puisque ${}^{\beta}_{\alpha\gamma}$ est symétrique et $F^{\alpha\gamma}$ anti-symétrique. Ainsi, la deuxième équation de Maxwell s'écrit

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + {}^{\alpha}_{\alpha\gamma}F^{\gamma\beta} = \epsilon_0{}^{\;1}J^\beta.$$

On peut donc remplacer ∇ par ∂ dans un système de coordoonées où ${}^{\alpha}_{\alpha\gamma} = 0$. On peut donc choisir des coordoonées inertielles, pour lesquelles tous les symboles de Christoffels sont nuls, où alors on peut simplement demander que seuls les ${}^{\alpha}_{\alpha\gamma}$ soient nuls.

Réponse 2. On vérifie facilement que $(\eta_{\alpha\gamma}\delta^0_\beta \quad \eta_{\beta\gamma}\delta^0_\alpha)$ est par construction anti-symétrique en $\alpha\beta$, et par définition du symbole de Levi-Civita $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, le second terme l'est aussi. $F_{\alpha\beta}$ est anti-symétrique, donc ses 6 composantes indépendantes sont, e.g., F_{01}, F_{02}, F_{03} et F_{12}, F_{13}, F_{23}. Calculons-en deux, disons F_{01} et F_{23}. Les autres calculs sont identiques. Pour F_{01}, on remplace $\alpha\beta$ par 01 dans la formule :

$$\begin{aligned}
F_{01} &= (\eta_{0\gamma}\delta^0_1 \quad \eta_{1\gamma}\delta^0_0)X^\gamma + c\varepsilon_{01\mu\nu}\delta^\mu_0 Y^\nu \\
&= \quad \eta_{1\gamma}X^\gamma + c\varepsilon_{010\nu}Y^\nu \\
&= \quad X^1
\end{aligned}$$

On a utilisé $\delta^0_1 = 0$, $\delta^0_0 = 1$ et $\delta^\mu_0 \neq 0 \Leftrightarrow \mu = 0$ pour passer de la première ligne à la seconde, puis $\eta_{1\gamma} \neq 0 \Leftrightarrow \gamma = 1$, $\eta_{11} = 1$ et $\varepsilon_{010\nu} = 0$ pour tout ν puisque 010ν n'est pas une permutation de 0123. On trouve de la même manière : $F_{02} = \quad X^2$ et $F_{03} = \quad X^3$.

On procède de même pour F_{23} :

$$\begin{aligned}
F_{23} &= (\eta_{2\gamma}\delta^0_3 \quad \eta_{3\gamma}\delta^0_2)X^\gamma + c\varepsilon_{23\mu\nu}\delta^\mu_0 Y^\nu \\
&= c\varepsilon_{230\nu}Y^\nu \\
&= cY^1
\end{aligned}$$

On a utilisé $\delta^0_3 = 0$, $\delta^0_2 = 1$ et $\delta^\mu_0 \neq 0 \Leftrightarrow \mu = 0$ pour passer de la première ligne à la seconde, puis $\varepsilon_{230\nu} \neq 0 \Leftrightarrow \nu = 1$, auquel cas, 2301 étant une permutation paire de 0123, on a $\varepsilon_{2301} = +1$. On trouve de la même manière $F_{12} = cY^3$ et $F_{13} = \quad cY^2$.

Réponse 3. On considère d'abord la première équation de Maxwell $\partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]}=0$. On a déjà vu que $\partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]}={}^1\!/\!_3(\partial_\alpha F_{\beta\gamma}+\partial_\beta F_{\gamma\alpha}+\partial_\gamma F_{\alpha\beta})$. Donc il suffit de résoudre

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma}+\partial_\beta F_{\gamma\alpha}+\partial_\gamma F_{\alpha\beta}=0.$$

Vue les symétries de cette équation, on a deux possibilités.

- Commençons par $\alpha\beta\gamma=0ij$, où i,j sont des indices spatiaux, i.e., à valeur dans $[\![1;3]\!]$. Puisque $F_{0i}=\quad X^i$ et $F_{j0}=\quad F_{0j}=X^j$, on a

$$\partial_0F_{ij}+\partial_iX^j\quad\partial_jX^i=0.$$

Si $i=j$, on obtient trivialement $0=0$. Il reste donc les 3 cas $ij=12,13,23$. On obtient alors avec les résultats précédents et en ré-arrangant, une équation pour chaque cas

$$c\partial_0Y^1=\quad(\partial_2X^3\quad\partial_3X^2),\quad c\partial_0Y^2=\quad(\partial_3X^1\quad\partial_1X^3)\quad\text{et}\quad c\partial_0Y^3=\quad(\partial_1X^2\quad\partial_2X^1).$$

On reconnait sur la droite un rotationnel, et sur la gauche une dérivée par rapport à $x^0=ct$. Plus explicitement, on a donc $\partial\vec{Y}/\partial t=\quad\vec{\nabla}\times\vec{X}$, i.e. l'équation de Maxwell-Faraday, avec le champ électrique $\vec{X}$ et champ magnétique $\vec{Y}$.

- Prenons miantenant par $\alpha\beta\gamma=ijk$, avec toujours $i,j,k\in[\![1;3]\!]$. L'équation étant invariante par permutation, on peut prendre $ijk=123$. On trouve :

$$\partial_1Y^1+\partial_2Y^2+\partial_3Y^3=0.$$

Que l'on reconnait comme étant une divergence. Plus explicitement, on a donc $\vec{\nabla}\cdot\vec{Y}=0$, qui est bien l'équation de Maxwell-Thompson pour le champ magnétique $\vec{Y}$.

Passons à la deuxième équation de Maxwell. Calculons d'abord les composantes de $F^{\alpha\beta}$. On a bien-sûr $F^{\alpha\alpha}=0$ et $F^{\alpha\beta}=\quad F^{\beta\alpha}$ comme pour $F_{\alpha\beta}$. Pour les composantes indépendantes, on trouve facilement, avec les propriétés de la métrique de Minkowski :

$$F^{0i}=\eta^{0\alpha}\eta^{i\beta}F_{\alpha\beta}=\quad F_{0i}\quad\text{et}\quad F^{jk}=\eta^{j\alpha}\eta^{k\beta}F_{\alpha\beta}=F_{jk}.$$

On considère maintenant la seconde équation de Maxwell avec $\beta=0$. On trouve alors, puisque $F^{0i}=\quad F_{0i}=X^i$ et $F^{00}=0$:

$$\partial_1X^1+\partial_2X^2+\partial_3X^3=\epsilon_0{}^{\ 1}J^0$$

qui est l'équation de Maxwell-Gauss $\vec{\nabla}\cdot\vec{X}=\epsilon_0{}^{\ 1}J^0$ pour le champ électrique $\vec{X}$, associé à la densité volumique de charge J^0.

On considère maintenant la seconde équation de Maxwell avec $\beta=i\in[\![1,3]\!]$. On obtient, à nouveau, 3 équations. En remplaçant et en les ré-arrangant, on trouve

$$\begin{aligned}\partial_0X^1&=c(\partial_2Y^3\quad\partial_3Y^2)+\epsilon_0{}^{\ 1}J^1\\ \partial_0X^2&=c(\partial_3Y^1\quad\partial_1Y^3)+\epsilon_0{}^{\ 1}J^2\\ \partial_0X^3&=c(\partial_1Y^2\quad\partial_2Y^1)+\epsilon_0{}^{\ 1}J^3\end{aligned}$$

On reconnait à nouveau la dérivée par rapport à $x^0=ct$, et le rotationnel. In fine, on peut écrire ces trois équations comme $c\ {}^{2}\partial\vec{X}/\partial t=\vec{\nabla}\times\vec{Y}+\mu_0(c\vec{J})$, où $\mu_0=1/c^2\epsilon_0$, et on reconnait l'équation de Maxwell-Ampère, associée au vecteur densité de courant $\quad c\vec{J}$.

Réponse 4. On remplace $F^{\alpha\beta}$ par $\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\mu}F_{\gamma\mu}$ puis $F_{\gamma\mu}$ par $\partial_\gamma Z_\mu \quad \partial_\mu Z_\gamma$ dans la seconde équation de Maxwell. On trouve alors, avec les notations introduites dans l'énoncé et n se rappelant que $\partial_\alpha \eta^{\beta\gamma} = 0$ car $\eta^{\beta\gamma} = \mathrm{diag}(\quad 1, 1, 1, 1)$ en coordonnées inertielles :

$$\Box Z^\beta \quad \partial^\beta(\partial_\alpha Z^\alpha) = \epsilon_0{}^{1} J^\beta.$$

Réponse 5. La condition la plus simple est bien sûr $\partial_\alpha Z^\alpha = 0$, qui permet d'avoir $\Box Z^\beta = \epsilon_0{}^{1} J^\beta$, i.e., une équation de d'Alembert.

Réponse 6. En effet, si on remplace Z_α par $Z_\alpha + \partial_\alpha \Phi$, on a

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha(Z_\beta + \partial_\beta \Phi) \quad \partial_\beta(Z_\alpha + \partial_\alpha \Phi) = \partial_\alpha Z_\beta \quad \partial_\beta Z_\alpha + \partial_\alpha\partial_\beta \Phi \quad \partial_\beta\partial_\alpha \Phi$$

Les deux derniers termes s'annulent dès lorsque que Φ est C^2, par le théorème de Schwarz. Ainsi, $F_{\alpha\beta}$ est indépendant de Φ, et comme $F_{\alpha\beta}$ contient toute l'information physique, on peut choisir Φ à loisir. Remplaçons donc Z^β par $\bar{Z}^\beta = Z^\beta + \partial^\beta \Phi$ dans l'équation ci-dessus. On a alors $\Box \bar{Z}^\beta$ $\partial^\beta(\partial_\alpha \bar{Z}^\alpha) = \epsilon_0{}^{1} J^\beta$. Mais cette fois-ci, la jauge de Lorenz consiste à supposer que $\partial_\alpha \bar{Z}^\alpha = 0$. Ceci revient à prendre $\partial_\alpha Z^\alpha + \Box \Phi = 0$. Autrement dit, soit Z_α vérifie la jauge de Lorenz automatiquement, soit elle ne le vérifie pas, et dans ce cas il suffit de choisir Φ tel que $\Box \Phi = \quad \partial_\alpha Z^\alpha$ et d'ajouter ∂_α au potentiel (ce qui est toujours possible, l'opérateur d'Alembertien étant inversible). Dans tous les cas, on obtient une équation de d'Alembert pour le potentiel.

Réponse 7. Reprenons l'équation $\Box \bar{Z}^\beta = \epsilon_0{}^{1} J^\beta$, et insérons $Z^\alpha = \mathcal{X}\delta_0^\alpha + c\mathcal{Y}^\alpha$. On a alors suivant que $\alpha = 0$ ou $\alpha = i$, les équations $\Box \mathcal{X} = \epsilon_0{}^{1} J^0$ et $\Box \vec{\mathcal{Y}} = (c\epsilon_0) \quad {}^{1} \vec{J}$

qui sont bien les équations de d'Alembert pour le potentiel (scalaire) électrique $\mathcal{X}$ et le potentiel (vecteur) magnétique $\mathcal{Y}^i$.

Partie II et IV

Réponse 1. On part de $g_{\alpha\gamma}g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta$ et on utilise l'hypothèse $g_{\alpha\gamma} = \eta_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\gamma}$. A priori, on ne connaît pas la correction d'ordre $O(h)$ à $g^{\beta\gamma}$. On notera donc $g^{\beta\gamma} = \eta^{\beta\gamma} + H^{\beta\gamma}$, et on cherche $H^{\beta\gamma}$. On ne connait pas son expressions, mais on s'ait qu'il est $O(h)$. En remplacant tout ce beau monde on trouve

$$\eta_{\alpha\gamma}\eta^{\beta\gamma} + \eta_{\alpha\gamma}H^{\beta\gamma} + h_{\alpha\gamma}\eta^{\beta\gamma} + h_{\alpha\gamma}H^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta.$$

Ensuite, on a $\eta_{\alpha\gamma}\eta^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta$ et $h_{\alpha\gamma}H^{\beta\gamma} = O(h^2)$. D'où $\eta_{\alpha\gamma}H^{\beta\gamma} = \quad h_{\alpha\gamma}\eta^{\beta\gamma} + O(h^2)$. Il reste à multiplier par $\eta^{\alpha\mu}$ à gauche (matrice inverse de $\eta_{\alpha\gamma}$, i.e. $\eta^{\alpha\mu}\eta_{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\mu$) pour isoler $H^{\beta\gamma}$. On trouve alors, par définition de $h^{\alpha\beta}$, l'égalité $H^{\beta\mu} = \quad h^{\beta\mu} + O(h^2)$, d'om le résultat.

Réponse 2. On prend la définition des Christoffels et on remplace (schématiquement) les g par $\eta + h$. Dans la partie avec les dérivées (à droite, entre parenthèses), seuls survivent les h (car les η sont constants). Dans le terme de gauche (en facteur des parenthèses) on a la partie η qui donne un terme $O(h)$ et l'on garde et la partie h qui va contribuer à l'ordre $O(h^2)$. On obtient bien le résultat de l'énoncé.

Réponse 3. D'après la question 2, on a (schématiquement) $\quad = O(h)$. Le tenseur de Ricci étant défini (schématiquement aussi) par $R = \partial \quad \partial \quad + \quad$, les deux derniers termes sont $O(h^2)$, et il ne reste donc que les deux premiers. On obtient bien le résultat de l'énoncé. Il en va de même pour le scalaire de Ricci, puisque $R_{\alpha\beta} = O(h)$. Leurs expressions au premier ordre en h sont données par les Eqs. (6.16) et (6.19) du cours d'Éric Gourgoulhon.

Réponse 4, 5, 6, 7, 8, 9. Pour toutes ces questions, voir les calculs des sections 6.2.2 jusqu'à 6.3.3 inclus du cours d'Éric Gourgoulhon.

Réponse 10. Voir le tableau 2 de la page 28 du chapitre 1 du livre ci-après (disponible en libre accès ici : https://arxiv.org/abs/1607.04202) *An Overview of Gravitational Waves: Theory and Detection, edited by G. Auger and E. Plagnol (World Scientific, 2016).*