Devoir Maison de théorie des champs n°9

Quelques calculs de théorie des champs en relativité générale

Ce Devoir est le dernier d'une série de 9 que vous avez réalisés ! Il est nettement plus difficile que les autres histoire de finir en beauté et de vous motiver pour la suite...

Je vais essayer de vous proposer un contexte physique pour que ce devoir ne soit pas trop « hors-sol ». Je vais cependant prendre un certain nombre de raccourcis pour ne pas entrer dans trop de détails qui pourraient nuire à votre santé mentale et à la concision de ce document. J'espère que vous ne m'en voudrez pas trop et que je ne dirai pas trop de bêtises par omission. Certains d'entre vous en apprendront bien plus dans un cours de cosmologie, les idées que nous proposons d'étudier ici étant simplifiées pour en permettre un traitement initiatique.

La théorie de la relativité générale (RG) est une théorie classique de la gravitation, elle repose sur le principe d'équivalence.

Elle remporte un grand nombre de succès lorsqu'on la confronte à la nature à travers des observations de celle-ci. Il n'en demeure pas moins vrai qu'un certain nombre de *choses* doivent être incorporées pour rendre compte de l'ensemble des propriétés observées dans différentes conditions.

Pour rendre compte par exemple de certaines propriétés de formation et d'évolution des galaxies et des amas de galaxies on doit, dans le contexte de la relativité générale introduire de la matière noire. Cette matière couplée à la gravitation, mais insensible aux autres interactions, doit représenter plus d'un quart du contenu matériel de l'Univers lorsqu'on le décrit par son tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$. En outre ce contenu sombre est en quasi totalité constitué de matière non baryonique : c'est-à-dire de matière composée, à l'échelle la plus fondamentale connue actuellement, par l'assemblage de 3 quarks.

Pour rendre compte des propriétés dynamiques de l'Univers, et plus particulièrement du caractère accéléré de son expansion que l'on pense observer, il a été proposé de ne plus considérer les versions les plus simples des équations d'Einstein classiques.

Ces équations qui s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

fournissent les 10 composantes indépendantes [1] $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique $\boldsymbol{g}$ lorsque l'on fixe le contenu matériel de l'espacetemps. Sans hypothèses sur la géométrie de cet espacetemps, on ne peut pas dire grand chose sur les propriétés des solutions de ces équations : on ne sait même pas si le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique... On peut par contre restreindre l'ensemble dans lequel on va chercher ces solutions compte-tenu des propriétés observables de l'univers. A grande échelle l'univers observable semble jouir de propriétés simples et remarquables :

- L'espacetemps est homogène et isotrope ;
- Un des paramètres d'évolution de l'espacetemps est le temps cosmique t, il permet d'en fabriquer des foliations en sections spatiales ;
- Ces sections spatiales semblent être de dimension 3 ;

Ces propriétés, que l'on pense observer, peuvent devenir le cadre de « principes cosmologiques » dans lesquels on va tenter de résoudre les équations d'Einstein afin d'obtenir des modèles cosmologiques que l'on va tester à travers de nombreuses expériences et/ou simulations numériques.

On sait depuis les travaux des géomètres de la fin du XIX^e siècle qu'il n'existe que trois familles de variétés riemaniennes homogènes et isotropes en dimension 4 distinguées par le signe de leur courbure qui ne peut être que constante. Dans le cours de cosmologie vous verrez que les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique dans ces variétés ne dépendent que de deux paramètres : un facteur d'échelle $a(t)$ et le signe de la courbure $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$.

Dans ce contexte particulièrement simplifié mais compatible avec les principes cosmologiques, le facteur d'échelle décrit l'évolution de la distance entre deux points libres dans une section spatiale de l'espacetemps. Sous un certain nombre d'hypothèses physiques acceptables, on montre que les équations d'Einstein imposent $a(t) \geq 0$, $\dot{a}(t) > 0$ et $\ddot{a}(t) < 0$. La première de ces contraintes indique qu'une distance est positive ou nulle, la seconde que l'univers est en expansion et la dernière que cette expansion est décélérée.

L'observation directe [2] de la distance de différentes galaxies à des temps cosmiques différents semble contredire le fait que $\ddot{a}(t) < 0$. Pour tenter de rendre compatibles les modèles avec ces observations plusieurs possibilités sont envisageable :

- On peut tout jeter à la poubelle, y compris les observations : ce serait une attitude non scientifique ;
- Aménager le principe d'équivalence pour obtenir une théorie de la gravitation modifiée compatible avec les observations ;
- Aménager les principes cosmologiques pour tenter d'obtenir des solutions des équations d'Einstein plus en accord avec ce que l'on observe.

Nous proposons dans ce devoir de suivre certaines de ces pistes !

1. Il n'y en a que 10 sur les 16 qui sont indépendantes car $\boldsymbol{g}$ est symétrique et d'ordre 2.
2. C'est-à-dire par des moyens non cosmologiques...

1 La constante cosmologique

En considérant des équations d'Einstein de la forme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \text{ avec } \chi = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{1}$$

où Λ est un scalaire appelé constante cosmologique, on peut sans modifier les principes cosmologiques, obtenir des solutions pour lesquelles le signe de $\ddot{a}$ n'est pas fixé une fois pour toutes : l'expansion de l'univers peut alors accélérer à partir d'une certaine époque.

❏ − **1**. Quelles sont les unités physiques de Λ ?

❏ − **2**. On note $\mathcal{L}_m$ la densité de lagrangien décrivant le contenu matériel de l'espacetemps. Comment peut-on modifier très simplement l'action

$$S = \int [R - 2\chi\mathcal{L}_m] \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x \tag{2}$$

pour obtenir les équations d'Einstein avec constante cosmologique (1).

❏ − **3**. Pourquoi le rajout de ce terme est-il licite dans le cadre de la relativité générale ? Cherchez une ou des interprétations pour le terme Λ.

2 Modifications de la relativité générale

La relativité générale est une théorie qui satisfait grand nombre de tests. Que ce soit sur terre ou dans le système solaire, elle n'a pas été mise en défaut et permet de rendre compte de phénomènes très fins (avance du périhélie de Mercure, test du principe d'équivalence, mesures géodésiques, distance Terre-Lune, Effet Sagnac, ...). A plus grande échelle les observations récentes dues à des objets compacts (ondes gravitationnelles, trous noirs supermassifs,...) sont en très bon accord avec la relativité générale. A très grande échelle, les choses sont plus compliquées avec l'introduction nécessaire de la matière noire et de l'énergie noire que l'on ne sait pas encore rattacher à autre chose que des quantités théoriques. A plus petite échelle, de nombreuses choses restent à comprendre comme le grand nombre de paramètres nécessaires pour « caler » le modèle standard de la physique des particules...

Les possibilités de modification et/ou d'extension de la relativité ne semblent donc possibles dans des domaines où elle n'a été que peu testée. La conservation du tenseur énergie impulsion dans des conditions de champ fort fait partie de ces recoins.

Une façon simple et élégante de procéder est d'introduire un couplage supplémentaire entre $T_{\mu\nu}$ et R à travers une violation de la conservation de l'énergie impulsion : cela revient à imposer froidement

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0 \rightarrow D^\mu T_{\mu\nu} = \frac{\xi}{2\chi} D_\nu R \quad \text{en conservant les identités de Bianchi } D^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

La constante ξ est un paramètre de la théorie qui reste à déterminer. Nous appellerons cette modification la relativité générale une théorie de $\mathfrak{R}$–Gravité. Elle n'introduit qu'un nouveau couplage entre le secteur matière de l'univers et sa courbure locale.

Pour avoir une chance d'exister ce genre de modification doit non seulement passer des tests expérimentaux mais aussi théoriques : on aimerait par exemple qu'une telle modification prenne sa source dans un formalisme lagrangien afin de ne pas avoir créé un monstre. Nous vous proposons d'étudier cet aspect des choses dans les lignes qui suivent...

Jouons donc aux apprentis sorciers de la physique !

On définit le scalaire d'énergie impulsion $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$. On rappelle que $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, par abus de langage on dit que R est la trace de $R_{\mu\nu}$ tout comme T est celle de $T_{\mu\nu}$. Pour être précis, il faudrait parler de contraction par le tenseur métrique d'un tenseur d'ordre 2...

❏ − **4**. Montrer que la trace de la métrique est égale à 4.

❏ − **5**. Montrer qu'une équation du champ de la forme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi\left[T_{\mu\nu} - \frac{\gamma - 1}{2}g_{\mu\nu}T\right] \tag{3}$$

est compatible avec la $\mathfrak{R}$–Gravité. On exprimera la constante sans dimension γ en fonction de ξ.

L'action (2) étudiée à la question **2** peut être généralisée en considérant non plus le seul terme R mais une fonction plus générale $f(R, T, \mathcal{L}_m)$ restant à préciser, on aura alors

$$S = \int [f(R, T, \mathcal{L}_m) - 2\chi\mathcal{L}_m] \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x \tag{4}$$

On considère une première expression de f très simple et telle que

$$f(R, T) = \frac{1}{a}R + b\chi T \tag{5}$$

Les deux paramètres $a \neq 0$ et b de cette fonction sont des constantes et l'on cherche à savoir si l'on peut trouver une relation entre a et b qui permettrait de retrouver les nouvelles hypothèses de la $\mathfrak{R}$–gravité.

❏ – **6**. Montrer que les équations du champ, qui correspondent à un extremum de l'action (4) avec l'hypothèse (5) sous des variations de la métrique $\delta g^{\mu\nu}$, s'écrivent sous la forme $G_{\mu\nu} = \chi \tilde{T}_{\mu\nu}$ où l'on exprimera le tenseur $\tilde{T}_{\mu\nu}$ en fonction de a, b, χ, T, $T_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ et du tenseur $\mathbf{\Theta}$ dont la composante complètement convariante s'écrit $\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} - g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}$.

❏ – **7**. Déterminer une condition ne concernant que le tenseur énergie impulsion $\boldsymbol{T}$ permet à la $\mathfrak{R}$–gravité d'avoir une formulation lagrangienne.