Un petit exercice de relativité restreinte...

Cet exercice est inspiré d'une exégèse la bible : Relativité Restreinte par Eric Gourgoulhon, CNRS éditions, 2010.

1. La condition initiale pour la 3–vitesse est donc nulle, et la 3–accélération initiale est selon (Ox)...

2. La conservation de la norme des 4–vecteurs dans $M_{4,\mathbb{R}}$ s'écrit $\boldsymbol{u}(0)\cdot\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t)=c^2$ et $\boldsymbol{a}(0)\cdot\boldsymbol{a}(0)=\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)=a^2$ soit
$$\boxed{\left[u^0(t)\right]^2-\left[u^1(t)\right]^2=c^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\left[a^0(t)\right]^2-\left[a^1(t)\right]^2=-a^2} \tag{1}$$
on a donc $a^1(t)=\pm\sqrt{\left[a^0(t)\right]^2+a^2}$ce qui montre que $\left|a^1(t)\right|\geq a$ et donc que $a^1(t)$ ne peut pas changer de signe lorsque t varie. Ainsi puisque $a^1(0)=a$ c'est le signe $+$ pour obtenir
$$\boxed{a^1(t)=\sqrt{\left[a^0(t)\right]^2+a^2}} \tag{2}$$
Le même type de raisonnement sur les composantes de la 4–vitesse permet d'obtenir
$$\boxed{u^0(t)=\sqrt{\left[u^1(t)\right]^2+c^2}} \tag{3}$$

3. Par définition de la 4–accélération on a $\boldsymbol{a}(t)=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$ soit
$$a^0(t)=\frac{du^0}{dt} \quad \text{et } a^1(t)=\frac{du^1}{dt}$$
on a donc
$$\boxed{a^0(t)=\frac{du^1}{dt}\frac{u^1(t)}{\sqrt{\left[u^1(t)\right]^2+c^2}}} \Longrightarrow \frac{a^0(t)}{u^1(t)}=\frac{du^1}{dt}\frac{1}{\sqrt{\left[u^1(t)\right]^2+c^2}}$$
la relation (1) s'écrit donc
$$\frac{du^1}{dt}=\frac{a}{c}\sqrt{\left[u^1(t)\right]^2+c^2}$$
en regroupant tout on obtient $\boxed{\frac{a}{c}\sqrt{\left[u^1(t)\right]^2+c^2}=\frac{du^1}{dt}}$

4. On peut intégrer cette équation différentielle :
$$a\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u^1}{\sqrt{\left[\frac{u^1(t)}{c}\right]^2+1}}=c\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} \Longrightarrow \frac{a}{c}t+K=\arg\mathrm{sh}\,(x)$$
$$\text{soit } u^1(t)=c\mathrm{sh}\left(\frac{at}{c}+K\right)$$
La constante d'intégration est nulle car $u^1(0)=0$, ainsi $\boxed{u^1(t)=c\mathrm{sh}\left(\frac{at}{c}\right)}$, la relation (1) donne finalement
$$\left[u^0(t)\right]^2-c^2\mathrm{sh}^2\left(\frac{at}{c}\right)^2=c^2 \Longrightarrow \boxed{u^0(t)=c\mathrm{ch}\left(\frac{at}{c}\right)}$$

5. En écrivant que, par définition, $\boldsymbol{u}(t)=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ on peut obtenir les deux seules coordonnées $x^0(t)$ et $x^1(t)$ non identiquement nulles de $\boldsymbol{x}$ dans la base $(\boldsymbol{e}'_0,\boldsymbol{e}'_1)$:
$$\left\{\begin{array}{l}\frac{dx^0}{dt}=u^0(t)=c\mathrm{ch}\left(\frac{at}{c}\right)\\ \frac{dx^1}{dt}=u^1(t)=c\mathrm{sh}\left(\frac{at}{c}\right)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^0(t)=\frac{c^2}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{at}{c}\right)+K^0\\ x^1(t)=\frac{c^2}{a}\mathrm{ch}\left(\frac{at}{c}\right)+K^1\end{array}\right.$$
Les origines des temps coïncident donc $x^0(0)=0=K^0$ et celle des espaces aussi donc $K^1=-c^2/a$ on obtient donc
$$\boxed{x^0(t)=\frac{c^2}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{at}{c}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{x^1(t)=\frac{c^2}{a}\left[\mathrm{ch}\left(\frac{at}{c}\right)-1\right]}$$

6. Pour résumer
$$\left\{\begin{array}{l} t' = c\,\mathrm{sh}\,(at/c)\,/a \\ x' = c^2\left[\mathrm{ch}\,(at/c) - 1\right]/a \end{array}\right. \tag{4}$$
Ces relations sont celles qui correspondent à la transformation de Lorentz dans notre changement de référentiel accéléré. Ce n'est plus une transformation linéaire! Ces deux relations permettent de former
$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{sh}\,(at/c) = at'/c \\ \mathrm{ch}\,(at/c) = ax'/c^2 + 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{f\left(x', t'\right) = \left(\frac{ax'}{c^2} + 1\right)^2 - \frac{a^2 t'2}{c^2} - 1 = 0} \tag{5}$$
Le graphe de f est une $\boxed{\text{hyperbole}}$ non centrée sur l'origine..., qui généralise la $\boxed{\text{parabole}}$ que l'on aurait obtenu en mécanique classique.

7. Dans le référentiel fixe $\mathcal{R}'$, la fusée se déplace en ligne droite le long de l'axe $(O'x')$ selon la loi horaire que l'on déduit de (5) soit
$$x'\left(t'\right) = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t'^2}{c^2}} - 1\right]$$
La fusée passe bien en l'origine O' de cet axe à l'instant $t' = 0$. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, la composante de la vitesse de la fusée sur cet axe s'écrit simplement
$$\boxed{v'\left(t'\right) = \frac{dx'}{dt'} = \frac{at'}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t'2}{c^2}}}}$$
Comme prévu, la fusée possède bien une vitesse nulle en $t' = 0$: $\boxed{v'(0) = 0}$, enfin cette solution semble cohérente avec les concepts de la relativité restreinte car $\boxed{\lim_{t' \to +\infty} v'\left(t'\right) = c}$.

8. Enfin, toujours dans le référentiel $\mathcal{R}'$, la composante de l'accélération de la fusée selon $(O'x')$ s'écrit
$$a'\left(t'\right) = \frac{dv'}{dt'} = \frac{a}{\left(1 + \frac{a^2 t'^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$
Vue depuis l'origine du référentiel fixe, cette accélération ne vaut a qu'au départ de la fusée. Elle décroit ensuite pour tendre vers 0 au fur et à mesure que $v' \to c$ lorsque $t' \to +\infty$. Vu depuis la terre la fusée semble ne plus accélérer, mais ce n'est que le point de vue terrestre...

9. On peut donc remplir un carnet de temps de voyages depuis la Terre dans une fusée telle que $a = 10\,m \cdot s^{-2}$. La distance entre la Terre et la destination est x'. La première chose que l'on peut calculer c'est la durée du voyage vu depuis la Terre supposée fixe. Il s'agit simplement d'exprimer $t'\left(x'\right)$ avec la relation (5) il vient
$$t'\left(x'\right) = \frac{c}{a}\sqrt{\left(\frac{ax'}{c^2} + 1\right)^2 - 1}$$
C'est le temps propre de l'observateur fixe. Une fois ce temps connu on en déduire le temps propre du voyageur dans la fusée par la relation (4) il vient
$$t = \frac{c}{a}\,\mathrm{arg\,sh}\,\left(at'/c\right)$$
Puisque l'on accélère jusqu'à la moitié et que l'on décélère jusqu'à la destination, le temps du voyage aller est le double de celui mis pour atteindre la moitié de la distance $d/2$ à parcourir. L'aller-retour est le double de l'aller... on a donc
$$T' = \frac{4c}{a}\sqrt{\left(\frac{ad}{2c^2} + 1\right)^2 - 1} \qquad \text{soit} \quad \boxed{T' = 4\sqrt{\frac{d^2}{4c^2} + \frac{d}{a}}}$$
Pour le temps propre dans la fusée il faut faire attention au fait que l'argsh n'est pas linéaire... ainsi
$$\boxed{T = \frac{4c}{a}\,\mathrm{arg\,sh}\left(\frac{a}{c}\sqrt{\frac{d^2}{4c^2} + \frac{d}{a}}\right)}$$

10. On peut donc remplir le tableau de voyage

Destination	Distance à la Terre : d	Durée du voyage vu de la Terre : T'	Durée du voyage à bord : T
Lune	386 000 km	6h 49mn	6h 49mn
α–Centauri	4,37 Al	11 ans 357 jours	7 ans 33jours
Centre Galactique	26,5 kAl	53 kans	38 ans 339 jours
Galaxie d'Andromède	2,55 MAl	5 Mans	56 ans 80 jours
Bord de l'Univers observable	13,7 GAl	27,5 Gans	89 ans

On voit que les voyageurs peuvent atteindre ces contrées lointaines (!!!) en une vie...
Il ne reste plus qu'à trouver un moyen pour conserver une accélération de $1g$ pendant ces durées relativement importantes. Mais c'est un autre problème et il concerne les ingénieurs... En faisant l'hypothèse que l'on convertit la totalité de la masse du carburant en énergie (moteur avec un rendement énergétique égal à 1), c'est-à-dire que l'on dispose d'un moteur à anti-matière parfait... Les masses de carburant à emporter semblent rédibitoires (voir par exemple `http://math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/Rocket/rocket.html`)

Un dernier problème est posé par le pilotage d'une telle fusée : outre les manœuvres d'évitement des objets sur le parcours, à ces vitesse tous les rayons lumineux perçus par le pilote sont horriblement décalés vers le rouge et concentrés en un tout petit point situé dans la direction de propagation. C'est une conséquence de l'effet doppler et de l'abberation de la lumière associés aux propriétés de conservation du 4–vecteur d'onde.

Le retournement de la fusée doit être également effectué à vitesse nulle sans quoi les passager vont mourrir !

Bon voyage !