Quelques propriétés simples

Correction proposée

Les idées que je propose ici ne sont que des pistes... On peut faire autrement, ou pas !

Comme d'habitude, si vous trouvez des erreurs, des imprécisions voire des fautes, je suis preneur! Je donne cette correction car nous sommes confinés et sans autre possibilité d'interaction...

1 Géométrie algébrique

P1 : Si deux évènement sont séparés par un intervalle de genre temps (resp. espace), alors il existe un référentiel dans lequel il se produisent au même endroit (resp. simultanés) et il n'existe aucun référentiel dans lequel ils sont simultanés (resp. se produisent au même endroit).

Solution Sans nuire à la généralité considérons des évènements dont les coordonnées sont nulles suivant les axes 2 et 3 : on se restreint à des boosts. Soit $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux évènements distincs séparés par un intervalle de genre temps. Considérons les composantes contravariantes de ces évènements dans un référentiel $\mathcal{R}$, soit $x^\mu = [x^0, x^1, 0, 0]^\top$ et $y^\nu = [y^0, y^1, 0, 0]^\top$, on a donc

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \left(x^0-y^0\right)^2 - \left(x^1-y^1\right)^2 > 0 \text{ par hypothèse.}$$
$$\implies \kappa = \left|\frac{x^1-y^1}{x^0-y^0}\right| < 1 \tag{1}$$

Faisons un boost de rapidité ψ pour passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ on aura

$$\left\{\begin{array}{l} x'^0 = x^0\mathrm{ch}\psi + x^1\mathrm{sh}\psi \\ x'^1 = x^0\mathrm{sh}\psi + x^1\mathrm{ch}\psi \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} y'^0 = y^0\mathrm{ch}\psi + y^1\mathrm{sh}\psi \\ y'^1 = y^0\mathrm{sh}\psi + y^1\mathrm{ch}\psi \end{array}\right.$$

Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ se produisent au même endroit dans $\mathcal{R}'$ c'est que $x'^1 = y'^1$, étudions cette possibilité :

$$x'^1 - y'^1 = \left(x^0-y^0\right)\mathrm{sh}\psi + \left(x^1-y^1\right)\mathrm{ch}\psi = 0$$
$$\implies \mathrm{th}\psi = -\frac{x^1-y^1}{x^0-y^0} = -\kappa$$

La condition (1) et le fait que la tangente hyperbolique est bijective sur $]-1,1[$ permettent d'affirmer qu'il existe une unique rapidité qui permet de se placer dans un référentiel tel que $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ se produisent au même endroit. Dans ce référentiel on verifie que $x'^0 \neq y'^0$ et donc que les deux évènements ne sont pas simultanés. On ne peut d'ailleurs pas trouver un tel référentiel $\tilde{\mathcal{R}}$ car il faudrait que $\mathrm{th}\tilde{\psi} = -1/\kappa$ dont le module est plus grand que 1.□

Le cas de deux évènements séparés par un intervalle de genre espace est complètement symétrique.

P2 : Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des évènements de genre temps pointés vers le futur (i.e. $x^0 > 0$ et $y^0 > 0$) laquelle de ces deux propriétés est vraie :

- ils sont séparés par un intervalle de genre temps;
- leur produit scalaire est positif.

Que devient cette propriété lorsque $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des évènements de genre espace ?

Solution Les deux vecteurs sont de genre temps pointés vers le futur , cela signifie que $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} > 0$ avec $x^0 > 0$ et $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} > 0$ avec $y^0 > 0$

1. La première proposition est fausse, voici un contre-exemple : supposons que dans un référentiel galiléen se produisent les évènements $\boldsymbol{x} = [x^0, 0, 0, 0]$ avec $x^0 > 0$ pour que $\boldsymbol{x}$ soit bien pointé vers le futur et $\boldsymbol{y} = [y^0 = x^0, k, 0, 0]$ avec $k < y^0$ pour que $\boldsymbol{y}$ soit bien de genre temps pointé vers le futur. Un calcul simple montre que $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = -k^2 < 0$ ce qui prouve que ces deux évènement sont séparés par un intervalle de genre espace.
   Physiquement, si deux événements se situent dans le futur d'un événement donné dans un référentiel galiléen, il n'y a aucune raison pour que l'un soit dans le cône causal de l'autre : pour que cela ne soit pas le cas, il suffit par exemple que ces événements surviennent en même temps et à des endroits différents dans le référentiel considéré. C'est d'ailleurs comme cela que nous avons construit notre contre-exemple.
2. Puisque $\boldsymbol{x}$ est de genre temps, il existe un référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel toutes ses composantes spatiales sont nulles. Ainsi $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x^0 y^0 > 0$ par hypothèse, comme $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ est un 4–scalaire sa valeur n'est pas affectée par changement de référentiel. $\square$
   Géométriquement, ces deux vecteurs sont dans le cône du futur de l'origine, leur angle est inférieur à inférieur à $\pi/2$ en prenant $c = 1$...

P3 : Soit $\boldsymbol{x}$ un évènement de genre temps, si $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$ alors $\boldsymbol{y}$ est un évènement de genre espace.

Solution Puisque $\boldsymbol{x}$ est de genre temps, il existe un référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel toutes ses composantes spatiales sont nulles. De plus sa composante temporelle n'est pas nulle car il est de genre temps et pas de genre lumière... donc dans $\mathcal{R}$, $x^\mu = [x^0, 0, 0, 0]$ avec $x^0 \neq 0$. Soit $\boldsymbol{y}$ un autre évènement, dont la composante contravariante s'écrit $y^\mu = [y^0, y^1, y^2, y^3]^\top$ dans $\mathcal{R}$ tel que $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$. On peut faire ce calcul dans $\mathcal{R}$ pour trouver (comme dans tous les référentiels) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x^0 y^0 = 0$ et comme $x^0 \neq 0$ on a forcément $y^0 = 0$. Ainsi dans $\mathcal{R}$ on aura $\boldsymbol{y}^2 = -\left((y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2\right) < 0$, cette valeur étant indépendante du référentiel. L'évènement $\boldsymbol{y}$ est donc de genre espace.$\square$

P4 : Soit $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux évènement de genre lumière : $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont colinéaires.

Solution On a donc $(x^0)^2 = -x^i x_i$ et $(y^0)^2 = -y^j y_j$. On remarque qu'ici $x^i x_i = -\vec{x}\cdot\vec{x} = -|\vec{x}|^2 < 0$ ainsi $|x^0| = |\vec{x}|$ et $|y^0| = |\vec{y}|^2$ .Par ailleurs on peut aussi écrire $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x^0 y_0 - \vec{x}\cdot\vec{y}$ or l'inégalité de Cauchy-Schwarz indique que $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq |\vec{x}|\,|\vec{y}| = |x^0|\,|y^0|$ le cas d'égalité n'étant atteint ssi $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont proportionnels. En conséquence,

- Si $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$ alors $|\vec{x}\cdot\vec{y}| = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \implies \exists\lambda \neq 0, \vec{x} = \lambda\vec{y} \implies \boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$, cette dernière implication étant directe pour des vecteurs de genre lumière.
- Si par ailleurs, $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$ alors $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \lambda\left(y^0 y_0 - \vec{y}\cdot\vec{y}\right) = 0$ car $\boldsymbol{y}$ est de genre lumière

Ceci montre l'équivalence.$\square$
Physiquement ces deux évènements sont sur le même rayon de lumière...

P5 : Le cône du futur (resp. passé) est convexe.

Solution Montrons que si $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^+$ avec $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ alors $\forall a \in [0,1]$, le vecteur $\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + (1-a)\,\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}^+$. Précisons que l'origine n'est pas dans le cone du futur !

1. On remarque que $z^0 = ax^0 + (1-a)\,y^0$ est la combinaison convexe de deux nombres strictement positifs donc $z^0 > 0$.
2. On calcule

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}^2 &= a^2\boldsymbol{x}^2 + (1-a)^2\,\boldsymbol{y}^2 + 2a\,(1-a)\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\\ &= (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2\,a^2 + 2\boldsymbol{y}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,a + \boldsymbol{y}^2\end{aligned}$$

On cherche les racines de l'équation du second degré en a : son discriminant réduit est

$$\Delta' = [\boldsymbol{y}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})]^2 - \boldsymbol{y}^2\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2 = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2$$

Ce discriminant est un 4–scalaire on peut donc le calculer dans un référentiel adapté à la situation, sa valeur ne changera pas

   - Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont séparés par un intervalle de genre temps alors il existe un référentiel dans lequel il se produisent au même endroit mais pas au même temps : $x^\mu = [x^0, 0, 0, 0]^\top$ et $y^\nu = [y^0, 0, 0, 0]^\top$ on a alors $\Delta' = 0$; Dans ce cas $\boldsymbol{z}^2$ est même signe que le coefficient de a^2 ainsi $\mathrm{sgn}(\boldsymbol{z}^2) = \mathrm{sgn}\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2\right] > 0$ car $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont séparés par un intervalle de genre temps.
   - Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont séparés par un intervalle de genre lumière alors il existe un référentiel dans lequel $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ ce qui est impossible.
   - Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont séparés par un intervalle de genre espace alors il existe un référentiel dans lequel ils sont simultanés mais pas au même endroit : $x^\mu = [0, x^1, x^2, x^3]^\top$ et $y^\nu = [0, y^1, y^2, y^3]^\top$: ce cas est impossible car $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^+$ et sont donc des vecteurs de genre temps.

Ceci termine la démonstration.$\square$

Interprétation physique : N'en déplaise à Marty Mac Fly, le doc ne peut pas relier deux évènements de son futur en passant par un évèment qui ne serait pas situé dans son futur ! (dans l'ailleurs ou dans son passé par exemple...)

2 Algèbre

R1 Démontrer que $\partial^\mu x^\nu = \eta^{\mu\nu}$, en déduire que $\partial^\mu x'^\nu = \mathscr{L}^{\nu\mu}$

Solution Il suffit d'écrire $\partial^\mu x^\nu = \eta^{\mu\nu}$ que l'on multiplie les deux membres de l'égalité par $\eta_{\beta\mu}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\eta_{\beta\mu}\eta^{\mu\nu} &= \delta^\nu_\beta\\ \eta_{\beta\mu}\partial^\mu x^\nu = \partial_\beta x^\nu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} = \delta^\nu_\beta \qquad \square\end{aligned}$$

pour la seconde égalité on explicite le boost : $\partial^\mu x'^\nu = \partial^\mu\left(\mathscr{L}^\nu{}_\alpha\, x^\alpha\right) = \mathscr{L}^\nu{}_\alpha\,\partial^\mu x^\alpha$ car $\partial^\mu \mathscr{L}^\nu{}_\alpha = 0$ on écrit ensuite que $\partial^\mu x^\alpha = \eta^{\mu\alpha}$ en utilisant le résultat précédent, et on obtient finalement $\partial^\mu x'^\nu = \mathscr{L}^\nu{}_\alpha\eta^{\mu\alpha} = \mathscr{L}^{\nu\mu}$ $\square$

R2 Déterminer l'inverse de $\mathscr{L}^{\mu\nu}$

Solution On cherche un tenseur $\boldsymbol{X}$ d'ordre 2 dont la composante complètement covariante $X_{\alpha\beta}$ vérifie $X_{\alpha\mu}\mathscr{L}^{\mu\nu} = \delta^\nu_\alpha$. Multiplions cette relation par x_ν et l'on obtient

$$X_{\alpha\mu}\mathscr{L}^{\mu\nu}x_\nu = \delta^\nu_\alpha x_\nu \implies X_{\alpha\mu}x'^\mu = x_\alpha \implies X_{\alpha\mu} = \mathscr{L}_{\alpha\mu}$$

R3 Soit X un tenseur d'ordre 2 et Y un 4-vecteur tels que $X_{\mu\nu} = Y_{\mu,\nu} - Y_{\nu,\mu}$. Montrer que le tenseur dont la composante complètement covariante est donnée par $D_{\mu\nu\rho} = X_{[\mu\nu,\rho]}$ est le tenseur nul d'ordre 3. On rappelle que la notation entre crochet indique qu'il faut additionner toutes les permutations circulaires concernées :

$$X^{[i_1 i_2 \cdots i_k]} = X^{i_1 i_2 \cdots i_k} + X^{i_2 i_3 \cdots i_k i_1} + X^{i_3 i_4 \cdots i_k i_1 i_2} + \cdots + X^{i_k i_1 \cdots i_{k-1}}$$

Solution C'est un simple exercice de manipulation de virgule...

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu,\rho} &= Y_{\mu,\nu\rho} - Y_{\nu,\mu\rho} \\ X_{\nu\rho,\mu} &= Y_{\nu,\rho\mu} - Y_{\rho,\nu\mu} \\ X_{\rho\mu,\nu} &= Y_{\rho,\mu\nu} - Y_{\mu,\rho\nu} \end{aligned} \tag{2}$$

Remarquons que l'on peut permuter les indices situés après la virgule, c'est le théorème de Schwarz :

$$X_{\dots,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 X_{\dots}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial^2 X_{\dots}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} = X_{\dots,\beta\alpha}$$

Finalement on trouve $D_{\mu\nu\rho} = X_{[\mu\nu,\rho]} = X_{\mu\nu,\rho} + X_{\nu\rho,\mu} + X_{\rho\mu,\nu} \equiv 0$ en faisant la somme des trois relations (2) $\square$