# Eléments de correction

## 1 Pour entrer dans le sujet...

1. C'est un calcul très classique . Dans $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$, les coordonnées polaires s'écrivent $x_1 = r\cos\theta$ et $x_2 = r\sin\theta$ avec une jacobien $\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\theta)} = r$ ainsi

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left|\overrightarrow{x}\right|^2}\, d\overrightarrow{x} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} = \pi$$

de plus en coordonnées cartésiennes

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left|\overrightarrow{x}\right|^2}\, d\overrightarrow{x} = \int\int e^{-x_1^2}e^{-x_2^2}dx_1dx_2 = \left(\int e^{-x_1^2}dx_1\right)^2 = I_1^2 \tag{1}$$

Le calcul de $I_2$ donne donc $I_1 = \sqrt{\pi}$.

2. C'est la simple généralisation du résultat précédent :

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left|\overrightarrow{x}\right|^2}\, d\overrightarrow{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int ... \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n\ e^{x_1^2+...+x_n^2} = \left(\int e^{-x_1^2}dx_1\right)^n = \pi^{n/2}$$

3. D'après le résultat précédent et le résultat proposé on a donc $\pi^{n/2} = |S_{n-1}|\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{n-1}dr$ le calcul de l'intégrale fait apparaître la fonction d'Euler, en posant $r^2 = s$ il vient en effet

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{n-1}dr = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-s}s^{\frac{n}{2}-1}ds = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

On obtient finalement $|S_{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, ainsi $|S_1| = 2\pi$, $|S_2| = 4\pi$, etc...

4. Le calcul est direct. Une fonction radiale $f$ ne dépend que de $r := |\overrightarrow{x}| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{df}{dr}$$

et de la même façon

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{x_i^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)\\ &= \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{x_i^2}{r^3}\frac{df}{dr} + \frac{x_i^2}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2}\end{aligned}$$

la sommation sur les $x_i$ pour le calcul du laplacien simplifie la chose :

$$\begin{aligned}\Delta_n f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \frac{n}{r}\frac{df}{dr} + \left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{r^3}\frac{df}{dr}\right)\sum_{i=1}^n x_i^2\\ &= \frac{n-1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}\end{aligned}$$

dont on peut bien vérifier l'écriture factorisée

$$\frac{n-1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(\frac{df}{dr}r^{n-1}\right) \tag{2}$$

5. Pour trouver cette fameuse fonction de Green du laplacien radial, il suffit d'utliser les indications les yeux fermés ... On cherche $g_n$ radiale telle que pour toute $\varphi$ radiale et "gentille"

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_n \, \Delta_n \left(\varphi\left(\overrightarrow{x}\right)\right) \, d\overrightarrow{x} = \varphi\left(0\right)$$

en utilisant la formule factorisée du laplacien on a donc en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$

$$\varphi\left(0\right) = \left|S_{n-1}\right| \int_0^{+\infty} \frac{g_n}{r^{n-1}} \frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr} r^{n-1}\right) r^{n-1} dr = \left|S_{n-1}\right| \int_0^{+\infty} g_n \frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr} r^{n-1}\right) dr$$

une intégration par partie du terme de gauche donne alors

$$\varphi\left(0\right) = \left|S_{n-1}\right| \left[g_n \frac{d\varphi}{dr} r^{n-1}\right]_0^{+\infty} - \left|S_{n-1}\right| \int_0^{+\infty} r^{n-1} \frac{dg_n}{dr} \frac{d\varphi}{dr} dr$$

Pour $n > 1$, le terme tout intégré disparaît grâce à $r$ en 0 et à $\varphi$ en l'infini, et pour avoir le résultat cherché, conformément à la dernière indication, une possibilité est de prendre

$$\left|S_{n-1}\right| r^{n-1} \frac{dg_n}{dr} = 1$$

soit

$$g_n\left(\overrightarrow{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\ln r}{2\pi} & \text{si } n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)\left|S_{n-1}\right| r^{n-2}} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

les éventuelles polynômes auxquels d'aucuns pourraient songer sont exclus par les comportements asymptotiques exigés par la définition de $g_n$ proposée dans l'énoncé. Cette définition vise une utilisation future de cette fonction pour définir un potentiel ...

# 2 La gravitation non relativiste et non quantique

1. L'élément de force s'exerce entre deux masse ponctuelle $m$ et $m' = \rho\left(\vec{r}'\right) d\vec{r}'$, c'est donc la formule de Newton qui s'applique

$$d\vec{F}\left(\vec{r}\right) = -Gm\rho\left(\vec{r}'\right) d\vec{r}' \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$

le principe de superposition et le fait que la fonction $\rho$ soit à support compact (ce qui règle les problèmes d'existence) autorisent le passage à l'intégrale pour la force totale, ainsi

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = -G \int \frac{m\rho\left(\vec{r}'\right)\left(\vec{r} - \vec{r}'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3} d\vec{r}'$$

2. On remarque tout simplement que

$$\text{grad}_{\vec{r}} \left(\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}\right) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$

ainsi en dérivant sous le signe somme (ce qui est permi grâce au support de $\rho$) on obtient[1]

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = -m \, \text{grad}_{\vec{r}} \; \psi\left(\vec{r}\right) \;\text{ avec } \psi\left(\vec{r}\right) = -G \int \frac{\rho\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} d\vec{r}'$$

[1]Pour faire ce calcul proprement il est utile de recourir aux distributions...

3. Dans l'expression de $\psi(\vec{r})$ on reconnaît un produit de convolution entre la fonction de Green du laplacien radial en dimension 3, $g_3(\vec{r}) = -\dfrac{1}{|S_2|\, r}$, il manque juste le facteur apporté par la surface de la boule unité dans $\mathbb{R}^3$, i.e. $S_2 = 4\pi$ on a donc

$$\psi = 4\pi G\, \rho * g_3$$

Tout l'intérêt de cette formulation réside dans le fait que chaque terme est "facilement" interprétable. Le produit de convolution entre la source $\rho$ et une fonction de Green permet de voir la gravitation comme la réponse d'une "boite noire" à une sollicitation (la source). La boite noire est ici l'espace isotrope car c'est le laplacien qui doit intevenir (opérateur spatial d'ordre 2 et isotrope). La constante $G$ fixe les unités de manière à ce que le potentiel $\psi$ divisé par une longueur soit une force. La constante $k_3 = 4\pi$ est une normalisation qui permet d'attribuer la même masse à toutes les sphères homogènes de rayon et de densité unité. Cette écriture permet de mieux comprendre l'interaction gravitationnelle classique lorsque l'on a compris sa formulation relativiste.

4. En dimension $n$, le potentiel gravitationnel pourrait être donné comme un simple prolongement naturel qui préserve les propriétés évoquées ci-dessus, on aurait donc

$$\psi = |S_{n-1}|\, G\, \rho * g_n$$

Le potentiel serait donc proportionel à $r^{-(n-2)}$ et la force serait en $r^{-(n-1)}$. Pour tester des dimensions supplémentaire à petite échelle, il suffit de tester la nature de l'interaction gravitationnelle à ces échelles. Cette interaction étant $10^{-41}$ fois plus faible que l'interaction electrostatique, il est nécessaire d'utiliser des particules neutres, des neutrons ou des neutrinos par exemple, mais ce sont (puisqu'elle sont neutres) des particules difficiles à manipuler, l'expérience est donc plus que délicate, l'état de l'art actuel atteint tout de même une vérification de la loi en $1/r^2$ jusqu'à des échelles de l'ordre du dixième de nanomètre (Search for deviations from the inverse square law of gravity at nm range using a pulsed neutron beam, C. C. Haddock et al., Phys. Rev. D 97, 062002, 2018). Jusqu'à cette échelle, point de théorie des cordes...

# 3 La dimension des sections spatiales de l'espace-temps.

1. Montrons le théorème d'Euler pour des fonctions scalaire de $\mathbb{R}$ : si $f$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est homogène de degré $k$ alors $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ pour tout $x$ et tout $\lambda$ compatibles avec le domaine de définition de $f$. La dépendance en $\lambda$ permet la dérivation, ainsi en dérivant cette relation par rapport à $\lambda$ on obtient $xf'(\lambda x) = k\lambda^{k-1} f(x)$, cette relation étant vraie pour toute valeur de $\lambda$ on peut l'écrire pour $\lambda = 1$ ce qui donne le résultat. La généralisation est immédiate en dimension $n$, la dérivée devient le gradient et le produit par $x$ un produit scalaire, on peut faire par exemple une démonstration par récurrence, on a donc

$$\boldsymbol{x} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$$

2. Pour $n \geq 2$, l'énergie cinétique totale $T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\boldsymbol{x}}_\alpha^2$ est évidement une fonction homogène de degré 2, on a en effet

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ T(\lambda \dot{\boldsymbol{x}}_1, \cdots, \lambda \dot{\boldsymbol{x}}_N) = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left(\lambda \dot{\boldsymbol{x}}_\alpha\right)^2 = \lambda^2 \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha^2 \dot{\boldsymbol{x}}_\alpha^2 = \lambda^2 T$$

Pour une distribution ponctuelle de masse $\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\alpha)$, le potentiel gravitationnel associé est donc

$$\psi(\boldsymbol{x}) = G\,|S_{n-1}|\,\left(\rho * g_n\right)(\boldsymbol{x}) = |S_{n-1}| \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\alpha) * g_n(\overrightarrow{x})$$

la distribution de Dirac étant l'élément neutre de la convolution il ne reste plus que

$$\psi(\boldsymbol{x}) = G\,|S_{n-1}| \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha g_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\alpha)$$

soit plus explicitement pour $n \geq 3$

$$\psi(\overrightarrow{x}) = -G \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_a\,|S_{n-1}|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\alpha|^{n-2}}$$

et pour l'énergie potentielle de gravitation pour cet ensemble de masse est donc

$$U(\boldsymbol{x}_1, \cdots, x_N) = -G\,|S_{n-1}| \sum_{\beta \neq \alpha = 1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_a m_\beta}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\alpha|^{n-2}} \text{ qui est homogène de dégré } k = -(n-2)$$

En introduisant les vecteurs $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, x_N)$ et $\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{\boldsymbol{x}}_1, \cdots, \dot{x}_N)$ on a donc

$$\boldsymbol{x} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} U = -(n-2)\,U \text{ et } \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \nabla_{\dot{\boldsymbol{x}}} T = 2T$$

3. Le lagrangien est simplement $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = T(\dot{\boldsymbol{x}}) - U(\boldsymbol{x})$, les impulsions sont simplement $\boldsymbol{p} = \nabla_{\dot{\boldsymbol{x}}} \mathcal{L} = \nabla_{\dot{\boldsymbol{x}}} T$ et $\mathcal{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - \mathcal{L}$ l'homogénéité de $T$ permet alors d'écrire que $\boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = 2T$ et donc que $\mathcal{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = T + U$. En écrivant simplement les masses comme un facteur $m$ on a donc

$$2T = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} \cdot \dot{\boldsymbol{p}}$$

Les équation de Hamilton donnent $\boldsymbol{x} \cdot \dot{\boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{x} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} U = +(n-2)\,U$ grâce à l'homogénéité de $U$. On a finalement la relation

$$2T - (n-2)\,U = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x})$$

En physique (notament en thermodynamique) la quantité $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}$ est appelée Viriel, elle a été introduite par Rudolf Clausius en 1870 pour étudier l'écart à la loi du gaz parfait pour un gaz réel. en passant aux valeurs moyennes temporelle, le terme dérivé du second membre disparait pour peu que le système soit borné et l'on trouve

$$2\overline{T} + (n-2)\overline{U} = 0$$

qui est la généralisation du théorème du viriel en dimension $n$.

En dimension 2, l'énergie potentielle n'est plus homogène et le théorème ne s'applique plus!

4. Pour les objets proposés le théorème du viriel s'écrit

$$Mv^2 - (n-2)\,\frac{GM^2}{R} = 0 \implies \eta = \frac{Rv^2}{GM} = (n-2)$$

On peut donc calculer le rapport $\eta$ avec les données proposées, on trouve

| | M41 | M13 | M31 |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{Rv^2}{GM}$ | 1,02 | 1,00 | 1,04 |

Il semblerait que nous soyons bien dans un univers qui à grande échelle possède 3 dimensions pour ses sections spatiales.
Les données utilisées sont toutefois ajustables et c'est plutôt l'inverse que l'on fait, i.e. on vérifie par ce calcul que l'objet est à l'équilibre ou pas. Cette condition est en effet essentielle pour annuler le terme du second membre dans le théorème du Viriel.

Un écart à l'affirmation de ce théorème signifie que quelque chose ne va pas pour l'objet observé : soit il n'est pas à l'équibre (ce qui n'est en général pas le cas si ses caractéristiques sont semblables à ses congénères) soit les paramètres que l'on observe ne sont pas les bons. Par exemple la masse de l'objet peut être plus grande que la somme des masses de ses constituants si une quantité importante de la masse n'est pas visible : on parle de matière noire !

En maintenant l'hypothèse d'équilibre (virialisation) on doit introduire entre 60 à 75% de matière noire dans les objets les plus massifs de l'univers (galaxies elliptiques géantes, amas de galaxies, etc.)