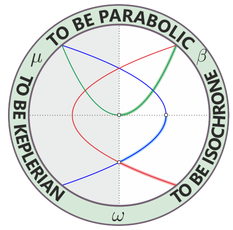
Devoir Maison n°3 de théorie des champs

Bienvenue en isochronie



Dans ce devoir, l'occasion vous est donnée de constater ce que peut être la recherche moderne dans le domaine des systèmes dynamiques classiques en physique théorique.

Dans un article récent, mettant en avant certains caractères pédagogiques, nous faisons le point sur l'application du formalisme hamiltonien à une famille de potentiels dans un espace à 3 dimensions à symétrie sphérique. Nous en tirons des résultats très généraux.

Lisez cet article assez vite afin de comprendre de quoi il parle ainsi que les principaux enchainements d'idées qu'il propose, puis répondre aux questions ci-dessous !

1. Page 3 : expliquer la phrase et démontrer l'affirmation « *As is well-known, the spherical symmetry implies that the motion is confined in a plane orthogonal to the angular momentum vector* ».

2. Ecrire le lagrangien d'une particule de masse unité dans un potentiel radial – i.e. $\psi = \psi(|\vec{r}\,|)$ – en variables polaires $\boldsymbol{q} = (r, \theta)$ dans le plan orbital. En déduire les équations (1.1) puis démontrer les relations (1.2) et (1.3) donnant les périodes radiales T et l'angle apsidal Θ pour des orbites bornées dans ce type de potentiels.

3. Démontrer les formules (1.7) donnant les périodes radiales les orbites d'énergie négative dans un potentiel de Kepler et positive dans un potentiel harmonique.
On donne
$$I_n = \int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x^n - a^n)(b^n - x^n)}} = \begin{cases} (a+b)\,\pi/2 & \text{si } n = 1 \\ \pi/2 & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

4. Dans l'appendice A.2 page 30, il est dit « *In an harmonic potential, the orbit is an ellipse, except that the origin of coordinates is at the centre of the ellipse, not at one of its focii (like the Keplerian case).* » Démontrer cette affirmation. Indication : on pourra se placer en coordonnées cartésiennes dans le plan orbital.

5. Montrer que les paramètres latins (a, b, c, d, e) de la parabole associée au potentiel de Kepler jaugé (voir dernier paragraphe de I.B) sont
$$[a, b, c, d, e] = \left[-\varepsilon, 1, 2\left(\lambda\varepsilon - \mu^2\right), -2\lambda, \lambda^2\right]$$
En déduire la période d'une particule d'énergie $\xi < 0$ dans un tel potentiel. Quelle est la relation entre le moment cinétique Λ et l'énergie ξ d'une orbite circulaire dans un tel potentiel. On vérifiera la cohérence de ces résultats dans la limite du potentiel non jaugé.
Les orbites dont la distance radiale est périodique (i.e. $\exists T < \infty$, $r(t+T) = r(t)$) dans de tels potentiels sont-elles toujours fermées (i.e. $\exists \tau < \infty$, $\vec{r}(t+\tau) = \vec{r}(t)$) ? Quelle est leur forme générale ?

6. Déterminer l'expression du hamiltonnien en variables angle-action pour une particule de masse unité, d'énergie ξ et de de moment cinétique Λ dans un potentiel de Képler jaugé. Décrire la dynamique de cette particule dans l'espace des phases d'un tel système.

7. Démontrer que la transformation $(r, R) \to (x, X)$ est canonique.

8. Déterminer la forme normale $N(J)$ du potentiel de Kepler non jaugé

9. En 5 lignes maximum : résumer l'énoncé et la démonstration du théorème fondamental de l'isochronie et du théorème de Bertrand.