Devoir Maison n°3 de théorie des champs
Bienvenue en isochronie

Eléments de correction

1. La symétrie en question est celle de l'invariance du système par rotation si le potentiel est radial : le lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{r},\vec{v}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} - m\psi(|\vec{r}|) = \mathcal{L}(|\vec{r}|,\vec{v})$ est invariant par toutes les rotations spatiales autour de chacun des axes du référentiel défissant $\vec{r}$. Le théorème de Noether implique donc la conservation au cours du temps de toutes les composantes du moment cinétique $\vec{L} = m\vec{r}\wedge\vec{v}$ sur chacun de ces axes. Le mouvement s'effectue donc dans le plan orthogonal à ce vecteur.
2. Le système est conservatif le lagrangien est donc $\mathcal{L}(\vec{r},\vec{v}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} - m\psi(|\vec{r}|)$ on se place dans le plan orbital en coordonnées polaires $\vec{r} = r\widehat{e_r}$ et donc $\vec{v} = \dot{r}\widehat{e_r} + r\dot{\theta}\widehat{e_\theta}$ ainsi le système possède 2 degrés de liberté

$$\mathcal{L}(\vec{r},\vec{v}) = \mathcal{L}\left(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}+r^2\dot{\theta}^2\right) - m\psi(r)$$

les équations de Lagrange donnent pour chaqune des coordonnées généralisées

$$\begin{cases} 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + m\psi'(r) \\ 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) \implies \Lambda = r^2\dot{\theta} = cste \end{cases}$$

en injectant $\dot{\theta} = \Lambda/r^2$ dans la première équation, puis en multipliant par $\dot{r}$ et en intégrant on trouve

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \xi - \frac{\Lambda^2}{2r^2} - \psi(r) \quad \blacksquare \tag{1}$$

la constante d'intégration ξ s'interprète comme l'énergie totale divisée par la masse.
La période radiale s'écrit simplement

$$T = \int_t^{t+T} dt = 2\times\int_t^{t+T/2} dt = 2\times\int_0^{T/2} dt$$

à $t=0$, $r = r_{\min} = r_p$, comme précisé en haut de la page 4, puis la particule met la moitié de la période pour rejoindre l'apocentre $r(T/2) = r_{\max} = r_a$ puis elle revient en $r = r_p$ à l'instant t. En passant en variable r dans l'intégrale définissant la période et en explicitant $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ dans (1) on obtient

$$\dot{r} = \sqrt{2}\left(\xi - \frac{\Lambda^2}{2r^2} - \psi(r)\right)^{1/2}$$

$$T = 2\int_{r_p}^{r_a}\frac{dt}{dr}dr = \sqrt{2}\int_{r_p}^{r_a}\left[\xi - \frac{\Lambda^2}{2r^2} - \psi(r)\right]^{-1/2}dr \quad \blacksquare$$

Pour l'angle apsidal c'est pareil sauf qu'il faut intégrer l'angle et pas le temps :

$$\Theta = \int_t^{t+T} d\theta = 2\times\int_{r_p}^{r_a}\frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr}dr$$

puis en utilisant $\dot{\theta} = \Lambda/r^2$ et toujours l'équation (1) il vient

$$\Theta = \sqrt{2}\int_{r_p}^{r_a}\left[\xi - \frac{\Lambda^2}{2r^2} - \psi(r)\right]^{-1/2}\frac{dr}{r^2} \quad \blacksquare$$

3. Pour le Kepler $\psi = -\mu/r$ et $\xi < 0$ ainsi

$$T = \sqrt{2}\int_{r_p}^{r_a}\left[\xi - \frac{\Lambda^2}{2r^2} + \frac{\mu}{r}\right]^{-1/2} dr = \sqrt{2/|\xi|}\int_{r_p}^{r_a}\left[-r^2 + \frac{\mu}{|\xi|}r - \frac{\Lambda^2}{2|\xi|}\right]^{-1/2} rdr$$
$$= \sqrt{2/|\xi|}\int_{r_p}^{r_a}\left[(r-r_p)(r_a-r)\right]^{-1/2} rdr \qquad \text{avec} \begin{cases} r_p + r_a = \mu/|\xi| \\ r_p r_a = \Lambda^2/(2|\xi|) \end{cases}$$

en utilisant I_1 on trouve donc $T_{\text{Ke}} = 2\pi\mu/(2|\xi|)^{3/2}$ ■ On peut aussi utiliser les lois de Kepler mais c'est moins drôle...
Pour l'harmonique $\psi = \frac{1}{8}\omega^2 r^2$ et $\xi > 0$ ainsi

$$T = \sqrt{2}\int_{r_p}^{r_a}\left[\xi - \frac{\Lambda^2}{2r^2} - \frac{1}{8}\omega^2 r^2\right]^{-1/2} dr = \frac{4}{\omega}\int_{r_p}^{r_a}\left[-r^4 + \frac{8\xi}{\omega^2}r^2 - \frac{4\Lambda^2}{\omega^2}\right]^{-1/2} rdr$$
$$= \frac{4}{\omega}\int_{r_p}^{r_a}\left[\left(r^2 - r_p^2\right)\left(r_a^2 - r^2\right)\right]^{-1/2} rdr \quad \text{avec} \begin{cases} r_p^2 + r_a^2 = 8\xi/\omega^2 \\ r_p^2 r_a^2 = 4\Lambda^2/\omega^2 \end{cases}$$

en utilisant I_2 on trouve donc $T_{\text{Ke}} = 2\pi/\omega$ ■.

4. Le langangien est $\mathcal{L}(\vec{r},\vec{v}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{1}{8}m\omega^2 r^2$. En coordonnées cartésiennes dans le plan orbital $\vec{r} = x\widehat{e}_x + y\widehat{e}_y$ et $\vec{v} = \dot{x}\widehat{e}_x + \dot{y}\widehat{e}_y$ ainsi les équations du mouvement sont $\ddot{x} + \omega^2 x/4 = 0$ et $\ddot{y} + \omega^2 y/4 = 0$ dont les solutions sont $x(t) = X\cos\left(\frac{\omega}{2\pi}t + \varphi_X\right)$ et $y(t) = Y\cos\left(\frac{\omega}{2\pi}t + \varphi_Y\right)$ où $(X, Y, \varphi_X, \varphi_Y)$ sont 4 constantes d'intégration. En posant $u = \frac{\omega}{2\pi}t + \varphi_X$ il vient $x(u) = X\cos(u)$ et $y(t) = Y\cos[u - (\varphi_X - \varphi_Y)]$. Il s'agit bien de l'équation paramétrique d'une ellipse centrée sur l'origine de demi-axes X et Y et tournée de l'angle $\varphi_X - \varphi_Y$.

5. Le potentiel de Kepler jaugé est $\psi(r) = \varepsilon + \frac{\lambda}{2r^2} - \frac{\mu}{r}$. On passe en variables de Hénon $\psi(x) = \varepsilon + \frac{\lambda}{x} - \frac{\mu\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$ et donc $Y(x) = x\psi(x) = \varepsilon x + \lambda - \mu\sqrt{2x}$. On pose $y = Y(x)$ et il vient $y - \varepsilon x - \lambda = -\mu\sqrt{2x}$ soit $(y - \varepsilon x)^2 - 2\lambda y + 2(\lambda\varepsilon - \mu^2)x + \lambda^2 = 0$ les paramètres latins de cette parabole sont donc

$$[a, b, c, d, e] = \left[\varepsilon, 1, 2\left(\lambda\varepsilon - \mu^2\right), -2\lambda, \lambda^2\right]$$

On utilise la formule (2.5) et on trouve ($\delta = ad - bc = +2\mu^2 - 4\lambda\varepsilon$)

$$T^2 = -\frac{\pi^2}{4}\frac{(2\mu^2 - 4\lambda\varepsilon)}{(\varepsilon + \xi)^3} \tag{2}$$

Sans la jauge ($\varepsilon = 0$ et $\lambda = 0$) on retrouve $T^2 = \frac{4\mu^2\pi^2}{(-2\xi)^3}$ c'est bien la période képlerienne.

L'orbite circulaire est carcatérisée par le fait que l'action radiale J est nulle. En utilisant la formule (2.7) on trouve donc

$$J = 0 \implies \sqrt{\frac{4\lambda\varepsilon - 2\mu^2}{\varepsilon + \xi_c}} = \sqrt{2\Lambda^2 + 2\lambda + 2\sqrt{\Lambda^4 + 2\lambda\Lambda^2 + \lambda^2}}$$

soit

$$4\lambda\varepsilon - 2\mu^2 = 4\left(\Lambda^2 + \lambda\right)(\varepsilon + \xi_c) \tag{3}$$

Encore une fois, sans la jauge on trouve $\xi_c = -\mu^2/(2\Lambda^2)$ qui est bien la valeur de l'énergie d'une orbite circulaire pour une valeur fixée du moment cinétique dans un potentiel képlerien. On peut le vérifier de maintes manières...

Les orbites périodiques dans de tels potentiels ne sont pas *toutes* fermées : on peut l'affirmer en appliquant le théorème de Bertrand qui dit que seul les harmoniques non-jaugés et les keplers non-jaugés ont une telle propriété. On peut aussi calculer l'angle apsidal pour ce potentiel (formule (2.6))

$$\frac{\Theta^2}{\pi^2} = \frac{2\Lambda^4 + 2\lambda\Lambda^2}{\Lambda^4 + 2\lambda\Lambda^2 + \lambda^2} + \frac{2\Lambda^2}{\sqrt{\Lambda^4 + 2\lambda\Lambda^2 + \lambda^2}} \neq \frac{n^2}{p^2} \text{ avec } (n,p) \in \mathbb{Z}^2$$

Les trajectoires sont généralement des rosettes dans le plan orbital.

6. On utilise la formule (2.9) il vient $[a,b,c,d,e] = [\varepsilon, 1, 2(\lambda\varepsilon - \mu^2), -2\lambda, \lambda^2]$

$$\mathcal{H}(J,\Lambda,z_J,z_\Lambda) = \mathcal{H}(J,\Lambda) = -\varepsilon - \frac{\mu^2 - 2\lambda\varepsilon}{2\left(J + \sqrt{\Lambda^2 + \lambda}\right)^2}$$

Ce hamitonien ne dépend pas des variables d'angle (z_J, z_Λ) qui sont donc des variables cycliques. Les équations de Hamilton s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{J} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_J} = 0 \implies J = cste \\ \dot{\Lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_\Lambda} = 0 \implies \Lambda = cste \end{array} \right. \implies \mathcal{H}(J,\Lambda) = cste = \xi$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_j = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \omega_J(J,\Lambda) = cste \\ \dot{z}_\Lambda = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda} = \omega_\Lambda(J,\Lambda) = cste \end{array} \right.$$

En choisissant une condition initiale on fixe les valeurs de ξ et de Λ, ce qui fixe une valeur pour J et qui détermine les valeurs des fréquences ω_J et ω_Λ. Dans l'espace des phases la particule évolue à la surface d'un tore de rayons Λ et J (voir figure 3). Selon la relation (2.13) si $\omega_J/\omega_\Lambda \in \pi\mathbb{Q}$ l'orbite se referme au bout d'un certain nombre de tours et le tore n'est pas complètement recouvert, il l'est sinon.

Une autre condition initiale définira un autre tore et une autre orbite sur celui-ci...

7. Il suffit de calculer un jacobien et de montrer qu'il est égal à 1...
8. Il suffit d'appliquer la formule (3.22) dans le cas de ce potentiel :

$$N(J) = \xi_c + \frac{2\pi}{T(\xi_c)}J + \frac{1}{2}\left(-\frac{4\pi^2 T'(\xi_c)}{T(\xi_c)^3}\right)J^2$$

on utilise (3) pour avoir

$$\xi_c = -\frac{\mu^2}{2\Lambda^2}$$

on en déduit la période pour cette énergie avec la relation (2), il vient

$$T^2 = -\frac{\pi^2}{2}\frac{\mu^2}{\xi^3} \implies T(\xi_c) = \frac{2\Lambda^3\pi}{\mu^2}$$

puis

$$T'(\xi_c) = \frac{dT(\xi_c)}{d\Lambda} = \frac{6\Lambda^2\pi}{\mu^2}$$

soit finalement

$$N(J) = -\frac{2\mu^2}{4\Lambda^2} + \frac{\mu^2}{\Lambda^3}J - \frac{3\mu^4}{2\Lambda^7}J^2$$

9. expression libre... !