Le vecteur de Lagrange-Lenz-Runge-Laplace-Hermann

Tentative de correction ...

A - Une constante du mouvement très particulière.

1 C'est immédiat

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \wedge m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{0} - \vec{r} \wedge \operatorname{grad} V(r) = -\frac{dV}{dr}\vec{r} \wedge \frac{\vec{r}}{r} = \vec{0}$$

Le mouvement s'effectue donc dans le plan orthogonal au moment cinétique.

2 Le système est conservatif, son lagrangien s'écrit $L = T - U = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - V$, la force est radiale donc le mouvement est plan, en coordonnées polaires dans ce plan $\vec{r} = r\widehat{e_r}$ et $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\widehat{e_r} + r\dot{\theta}\widehat{e_\theta}$ ainsi $L = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mV(r)$, les deux coordonnées généralisées sont r et θ, il vient

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 - m\frac{dV}{dr}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{ainsi } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 + m\frac{dV}{dr} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \text{ainsi } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

La quantité constante qui apparaît dans la seconde équation de Lagrange est le module du moment cinétique $L = mr^2\dot{\theta}$. En l'injectant dans la première on trouve

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{2m^2r^3} + \frac{dV}{dr} = 0$$

3 C'est un calcul immédiat

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\dot{r}}{r^2}\vec{r} = -\frac{1}{r^3}\left(r\dot{r}\vec{r} - r^2\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

or $\vec{r} = r\widehat{e_r}$ et $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\widehat{e_r} + r\dot{\theta}\widehat{e_\theta}$ donc $r\dot{r} = \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ et $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$ donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\left[\left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right)\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\frac{d\vec{r}}{dt}\right]$$

on reconnaît donc un double produit vectoriel

$$\left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right)\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \wedge \left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\vec{r} \wedge \left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right) \quad \text{soit } \alpha = 3 \tag{1}$$

4 Encore un calcul...

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\pi}\wedge\vec{L}\right)=\frac{d\vec{\pi}}{dt}\wedge\vec{L}+\vec{\pi}\wedge\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\vec{\pi}}{dt}\wedge\vec{L}$$

Le PFD (ou les équations de Hamilton) s'écrivent $\frac{d\vec{\pi}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\vec{r}}=\vec{F}=-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}}=-\frac{dV}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$ ainsi

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\pi}\wedge\vec{L}\right)=-\frac{dV}{dr}\frac{1}{r}\left(\vec{r}\wedge\vec{L}\right)=-m\frac{dV}{dr}\frac{1}{r}\left[\vec{r}\wedge\left(\vec{r}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\right]$$

en utilisant le résultat (1) il vient

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\pi}\wedge\vec{L}\right)=-m\frac{dV}{dr}\frac{1}{r}\left[-r^3\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\right]=mr^2\frac{dV}{dr}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

5 Si $V(r)=-\dfrac{k}{r}$ alors $\frac{d}{dt}\left(\vec{\pi}\wedge\vec{L}\right)=mr^2\left(\frac{k}{r^2}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=mk\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{d}{dt}\left(mk\frac{\vec{r}}{r}\right)$ qui montre bien que $\frac{d\vec{A}}{dt}=\vec{0}$. Il est clair que d'une part $\left(\vec{\pi}\wedge\vec{L}\right)\cdot\vec{L}=0$ et que d'autre part $\dfrac{km}{r}\vec{r}\cdot\vec{L}=0$, le vecteur de Lenz est donc orthogonal au moment cinétique, il est donc contenu dans le plan orbital.

B - La symétrie de Noether associée.

6 On écrit que $PF=OP-OF=a-ae=a(1-e)$ puis $PS=OP+OS=a+ae=a(1+e)$, on écrit la définition de l'ellipse au périgée soit $PF+PS=2a=\Upsilon$. Par symétrie, on a $KF=KS$ et par définition $KF+KS=2a$ soit $KF=a$. Le triangle OKF est rectangle en K, on a donc $b=OK=\sqrt{a^2-a^2e^2}=a\sqrt{1-e^2}$. Les relations trigonométriques dans ce triangle s'écrivent

$$\sin\widehat{OFK}=\sin f=\frac{OK}{FK}=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{a}=\sqrt{1-e^2}\quad\text{et donc }\cos f=-e\text{ on a donc }f=\frac{5\pi}{6}$$

7 La loi des aires donne directement $\frac{df}{dt}=\frac{L}{mr^2}$ par ailleurs $\dfrac{dr}{df}=e\sin(f)\;\;p(1+e\cos f)^{-2}=\frac{er^2}{p}\sin f$ ainsi

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)&=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{df}{dt}\frac{d\vec{r}}{df}\\&=\frac{L}{mr^2}\frac{dr}{df}\left(\cos f\;\widehat{e_x}+\sin f\;\widehat{e_y}\right)+\frac{L}{mr}\left(-\sin f\;\widehat{e_x}+\cos f\;\widehat{e_y}\right)\\&=\frac{L}{mp}\left[e\sin f\left(\cos f\;\widehat{e_x}+\sin f\;\widehat{e_y}\right)+(1+e\cos f)\left(-\sin f\;\widehat{e_x}+\cos f\;\widehat{e_y}\right)\right]\\&=\frac{L}{mp}\left(e\;\widehat{e_y}-\sin f\;\widehat{e_x}+\cos f\;\widehat{e_y}\right)\end{aligned}$$

On en déduit que le vecteur vitesse parcours le cercle de rayon $R=\frac{L}{mp}$, centré sur le point C tel que $\overrightarrow{OC}=\frac{Le}{mp}\;\widehat{e_y}$

8 Au périgée $r=FP=OP-OF=a-ae=a(1-e)$ et $f=0$ donc $\vec{v}(P)=\frac{L}{mp}(1+e)\;\widehat{e_y}$ ainsi

$$E=\frac{L^2}{2mp^2}(1+e)^2-\frac{m\mu}{a(1-e)}$$

A l'apogée $r = FA = AP - FP = 2a - a(1-e) = a(1+e)$ et $f = \pi$ donc $\vec{v}(A) = -\frac{L}{mp}(1-e)\ \widehat{e_y}$ ainsi

$$E = \frac{L^2}{2mp^2}(1-e)^2 - \frac{m\mu}{a(1+e)}$$

L'énergie est un constante du mouvement donc

$$\begin{aligned}
\frac{L^2}{2mp^2}(1+e)^2 - \frac{L^2}{2mp^2}(1-e)^2 &= \frac{m\mu}{a(1-e)} - \frac{m\mu}{a(1+e)} \\
\frac{L^2}{2mp^2}\left[(1+e)^2 - (1-e)^2\right] &= \frac{m\mu}{a}\left(\frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e}\right) \\
\frac{4eL^2}{2mp^2} = \frac{m\mu}{a}\frac{2e}{1-e^2} \qquad &\Longrightarrow\ \mu = \frac{L^2 a\left(1-e^2\right)}{m^2p^2} = \frac{L^2}{m^2p}
\end{aligned}$$

En injectant cette valeur dans l'expression de l'énergie au périgée − par exemple − il vient

$$\begin{aligned}
E &= \frac{L^2}{2mp^2}(1+e)^2 - \frac{L^2}{mpa(1-e)}\frac{1+e}{1+e} \\
&= \frac{L^2}{2mp^2}(1+e)^2 - \frac{L^2(1+e)}{mpa(1-e^2)} \\
&= \frac{L^2}{2mp^2}\left[(1+e)^2 - 2(1+e)\right] \\
&= -\frac{L^2}{2mp^2}\left[1-e^2\right] \qquad \Longrightarrow \quad L = \sqrt{-\frac{2mp^2E}{1-e^2}}
\end{aligned}$$

9 On a vu qu'en K, $\cos f = -e$ et $\sin f = \sqrt{1-e^2}$ on a donc $\vec{v}(K) = \frac{L}{mp}\left(e\ \widehat{e_y} - \sqrt{1-e^2}\widehat{e_x} - e\ \widehat{e_y}\right) = -\frac{L\sqrt{1-e^2}}{mp}\widehat{e_x}$ en utilisant l'expression de L obtenue à la question précédente on a donc

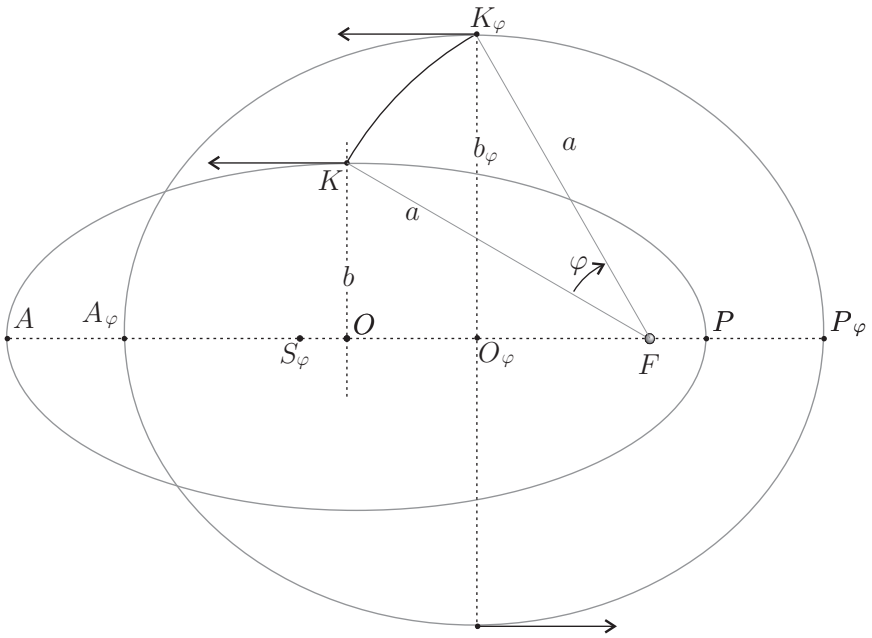
$$\vec{v}(K) = -\sqrt{-\frac{2E}{m}}\widehat{e_x}$$

Le fait qu'en K', $\cos f = -e$ et $\sin f = -\sqrt{1-e^2}$ permet d'avoir $\vec{v}(K') = \sqrt{-\frac{2E}{m}}\widehat{e_x} = -\vec{v}(K)$.

10 La transformation conserve le vecteur vitesse et le demi-grand axe, l'énergie est donc conservée. Il s'agit toujours d'un problème à deux corps, avec une énergie négative, l'orbite est donc une ellipse de même foyer.

11 Puisque la vitesse en K_φ est parallèle à $\widehat{e_x}$, le demi-petit axe est la distance entre K_φ et l'axe OF. Sur la transformation proposée le demi-petit axe augmente, on a vu que $f = \frac{5\pi}{6}$ losrque M est en K ainsi $\widehat{OFK}$ est son complémentaire à π soit $\widehat{OFK} = \frac{\pi}{6}$, comme $\varphi = \frac{\pi}{6}$ également, nous avons $b_\varphi = K_\varphi H_\varphi = a\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}\right) = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'excentricité est définie par la relation $e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$ si b augmente alors e diminue, ici $e_\varphi^2 = 1 - \frac{3}{4}$ soit $e_\varphi = \frac{1}{2}$. La nouvelle orbite, de foyer F de demi-grand axe a de demi petit-axe $b_\varphi = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'excentricité $e_\varphi = \frac{1}{2}$, son nouveau centre est O_φ tel que $O_\varphi F = ae_\varphi = a/2$. Le second foyer de cette ellipse est donc le point O centre de l'ancienne orbite. On

peut donc tracer la nouvelle orbite



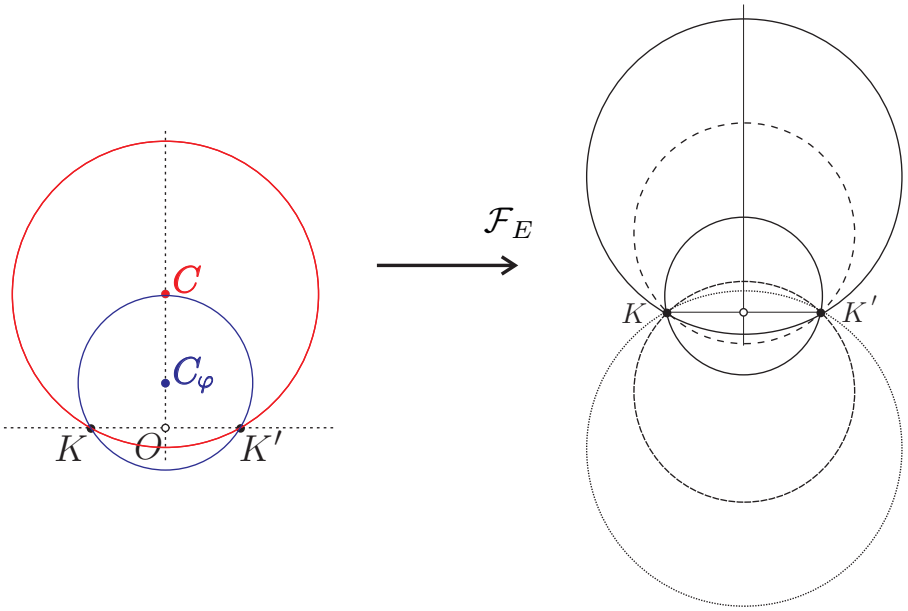
12 Le module du moment cinétique est affecté par la transformation $L_\varphi = \sqrt{-\frac{2mp_\varphi^2 E}{1-e_\varphi^2}}$ ainsi avec $p_\varphi = a(1-e_\varphi^2)$ il vient $\sqrt{-2ma^2E\left(1-e_\varphi^2\right)}$ dans la transformation proposée l'excentricité diminue donc L_φ augmente. On a numériquement $e_\varphi = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}e$ donc $L_\varphi = \sqrt{-2ma^2E\left(1-\frac{1}{3}e^2\right)} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}e^2}{1-e^2}}L$ soit avec $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $L_\varphi = \sqrt{3}L \simeq 1,71\ L$.

Le nouveau paramètre focal de la nouvelle ellipse est $p_\varphi = a\left(1-e_\varphi^2\right) = a\left(1-\frac{1}{3}e^2\right) = p\frac{1-\frac{1}{3}e^2}{1-e^2} = 3p$.

Le nouveau rayon du cercle des vitesses est donc $R_\varphi = \frac{L_\varphi}{mp_\varphi} = \frac{L}{mp}\sqrt{\frac{1-e^2}{1-\frac{1}{12}e^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}R \simeq 0,57R$, il est centré sur le point C_φ tel que $\overrightarrow{OC_\varphi} = \frac{L_\varphi\ e_\varphi}{mp_\varphi}\ \widehat{e_y} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, ainsi le centre du nouveau cercle des vitesses est situé plus près du point O et son rayon est diminuné de près de 40%.

Les deux cercles ont deux points en communs car $\vec{v}\,(K)$ et $\vec{v}\,(K')$ sont inchangés dans la transformation. Ces deux points sont sur l'axe $(O, \widehat{e_x})$. La construction de l'hodographe de ces deux orbites et sa

généralisation à toutes les orbites de même énergie est alors aisée.



13 La famille $\mathcal{F}_E$ est l'image par projection stéréographique des grands cercles de $\mathcal{S}_2$ passant par les points z_1 et z_2 . Le point z_1' correspond au point K et z_2' correspond au point K'. La famille $\mathcal{F}_E$ dans le plan de projection est globalement invariante lorsque l'on applique une rotation à $\mathcal{S}_2$ autour de l'axe $z_1 z_2$.

14 La sphère $\mathcal{S}_2$ devient la sphère $\mathcal{S}_3$ (ensemble des points de $\mathbb{R}^4$ à la même distance d'un point O), les hypersurfaces $\mathcal{S}_3$ correspondant aux grands cercles deviennent des sphères $\mathcal{S}_2$ dont la projection stéréographique dans $\mathbb{R}^3$ correspond à l'hodographe général. La rotation de la sphère $\mathcal{S}_3$ autour d'un axe passant par les 2 points communs à toutes les sphères $\mathcal{S}_2$ laisse invariant l'hodographe. C'est la symétrie de Noether associée à la conservation du vecteur de Lenz.

Merci de votre attention,
Par un beau samedi soir du printemps 2015,
Jérôme Perez