A Mise en place

1. Dans le référentiel barycentrique centré sur M on a $\mu = G(M+m)$, si $M \gg m$ on a donc $\mu \simeq GM$ comme attendu. Si l'on se place dans le référentiel barycentrique c'est la même chose car le barycentre peut être confondu avec M si $M \gg m$.

2. $\vec{L} = m\vec{r}\wedge\vec{v}$ est tel que $\dot{\vec{L}} = 0$ le mouvement s'effectue donc dans le plan orthogonal à $\vec{L}$ dont deux vecteurs de base peuvent être la position et la vitesse à un instant quelconque.

3. On écrit que $\vec{r} = r\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ donc $\vec{L} = r^2\dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi$ avec $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$ ainsi $r^2 = \frac{L}{\dot{\theta}}$, par ailleurs on a $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r$ soit $\vec{e}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}}\dot{\vec{e}}_\theta$. On en déduit que $-\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r = \frac{GMm}{L}\dot{\vec{e}}_\theta$ ainsi en posant
$$\vec{u} = k\,\vec{e}_\theta \text{ avec } k = \frac{GMm}{L} \text{ on aura } \frac{d}{dt}(\vec{v}-\vec{u}) = 0$$

4. On a $\vec{v} = \vec{h} + \vec{u} = \vec{h} + k\vec{e}_\theta$. Nous avons montré que $\vec{h}$ et k sont constants donc l'hodographe est un arc du cercle de rayon k centré sur l'extrémité du vecteur $\vec{h}$. Si l'angle polaire θ parcours la totalité de l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'hodographe est le cercle entier, sinon il en est simplement une partie.

5. Par définition $\vec{u}\cdot\vec{h} = uh\cos\alpha$ avec $\alpha = \widehat{\left(\vec{u},\vec{h}\right)}$ par ailleurs on sait aussi que $\vec{h} = \vec{v} - \vec{u}$ donc $\vec{u}\cdot\vec{h}$ $= uv\cos\delta - u^2$ avec $\delta = \widehat{(\vec{v},\vec{u})}$ mais $\vec{u} \propto \vec{e}_\theta$ et $\widehat{(\vec{r},\vec{e}_\theta)} = \frac{\pi}{2}$ donc $\delta = \frac{\pi}{2} + \widehat{(\vec{v},\vec{r})} = \frac{\pi}{2} - \widehat{(\vec{r},\vec{v})}$. Ainsi $\cos\delta = \sin\widehat{(\vec{r},\vec{v})}$, mais comme $L = rv\sin\widehat{(\vec{r},\vec{v})}$ on obtient finalement $\cos\delta = \frac{L}{rv}$. En utilisant ce résultat dans les deux expressions de $\vec{u}\cdot\vec{h}$ obtenues on trouve
$$\frac{L}{r} = h\cos\alpha + u \implies r = \frac{L}{h\cos\alpha + u} = \frac{L/u}{1+\frac{h}{u}\cos\alpha}$$
Pour que ce soit une conique il faut que α soit l'angle θ de la base polaire locale. C'est bien le cas en choisissant $\vec{h}$ comme vecteur directeur de l'axe Ox dans l'espace des vitesses (i.e. l'axe Oy de l'axe des vitesses). La trajectoire est alors une conique de paramètre focal $p = \frac{L}{u}$, d'excentricité $e = \frac{h}{u}$.

6. Tout d'abord précisons que la notation $\propto$désigne une proportionalité avec une constante *positive*.

   Plaçons nous en $\theta = 0$, au périgée, c'est-à-dire au point où la postion et la vitesse sont tels que $\widehat{(\vec{r}_P,\vec{v}_P)} = \frac{\pi}{2}$. L'axe dirigé par $\vec{r}_P$ passe par les deux foyers de la conique, il est un axe de symétrie de celle-ci. Il est noté $(M,\widehat{e}_x)$. Au périgée $\vec{v}_P \propto \widehat{e}_y$ et $\widehat{e}_\theta = \widehat{e}_y$ ainsi $\vec{h} \propto \widehat{e}_y$ et comme il est constant on peut conserver ce résultat en chaque point. Par ailleurs, toujours au périgée $\widehat{e}_\varphi = \widehat{e}_r \wedge \widehat{e}_\theta = \widehat{e}_z$, en déterminant le moment cinétique au périgée on a donc $\vec{L} \propto \widehat{e}_z$ constant. En définissant $\vec{A} = \vec{h}\wedge\vec{L}$ on obtient directement que $\vec{A}$ est constant et en calculant sa valeur au périgée on a $\vec{A} \propto \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \propto \widehat{e}_x$: le vecteur de Lagrange dirige donc l'axe de symétrie de la conique.

7. On se doute qu'il faut faire apparaitre l'énergie cinétique, on écrit donc $\frac{1}{2}m\vec{h}^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m\vec{u}^2 - muv\cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{u}}\right)$. On a vu que $\cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{u}}\right) = \sin(\vec{r},\vec{v})$ ainsi $m\cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{u}}\right) = \frac{L}{rv}$ et $\frac{1}{2}mh^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mu - u\frac{L}{r}$ et comme $u = \frac{GMm}{L}$ il vient $\frac{1}{2}mh^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 - \frac{GMm}{r}$ et finalement $\frac{1}{2}m\left(h^2-u^2\right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E$.

B Construction de l'orbite à la règle et au compas

8. Précisons tout d'abord que $\vec{L}$ est constant et donc sa norme aussi, nous la calculerons à $t = 0$. Dans le cas qui nous concerne $\delta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $m = 1$ nous avons $\left\|\vec{L}\right\| = \|m\vec{r}\wedge\vec{v}\| = r_0v_0\sin\delta_0$. Pour construire $v_0\sin\delta_0$ il suffit de projetter orthogonalement l'extrémité V du vecteur $\vec{v}_0$ sur l'axe dirigé par $\vec{r}_0$. Cette projection est obtenue en construisant la droite perpendiculaire à $(M,\vec{r}_0)$ passant par V. Une fois cette longueur mesurable au compas on la reporte sur l'axe $(M,\vec{e}_x)$ on reporte la longueur du vecteur $\vec{r}_0$ sur l'axe $(M,\vec{e}_y)$

et un déplaçement parallèle de la droite D_1 vers la droite D_2 permet de mesurer $L = r_0 v_0 \sin \delta_0$. Fait remarquable cette construction donne $L = 1$, c'est bien normal car la trajectoire avait été bien préparée, numériquement en l'occurence...

La construction est présentée sur la figure 1.

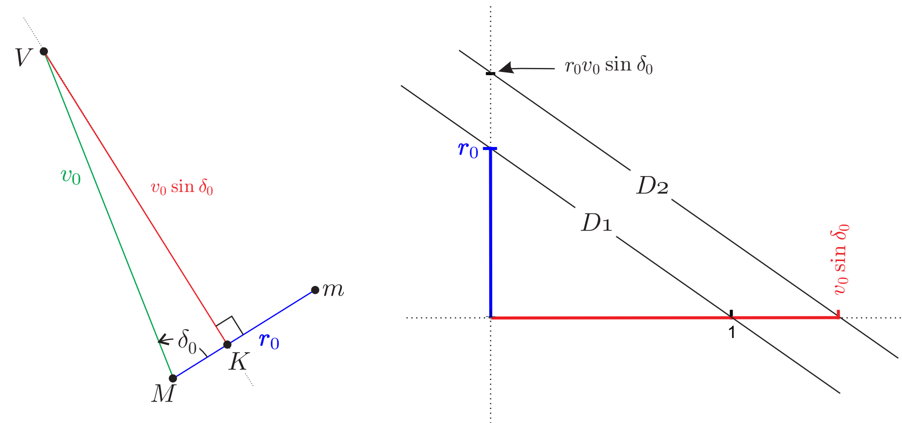


Figure 1: Construction de $L = r_0 v_0 \sin \delta_0$

9. On construit le vecteur $\vec{e}_\theta\,(0)$ unitaire et dans une direction tournée de $+\frac{\pi}{2}$ par rapport à celle de $\vec{r}_0$. Dans nos unités de mesures $k = 1$, ainsi $\vec{u} = \vec{e}_\theta\,(0)$. On peut donc construire facilement $\vec{h} = \vec{v}_0 - \vec{e}_\theta\,(0)$. On remarque ici que $\vec{h} = \frac{1}{2}\vec{e}_y$. Nous avons vu plus haut que l'hodographe est un cercle centré sur l'extremité de $\vec{h}$ (posé à l'origine) et dont nous connaissons le rayon puisque nous avons un point de ce cercle... Tout cela donne ceci :

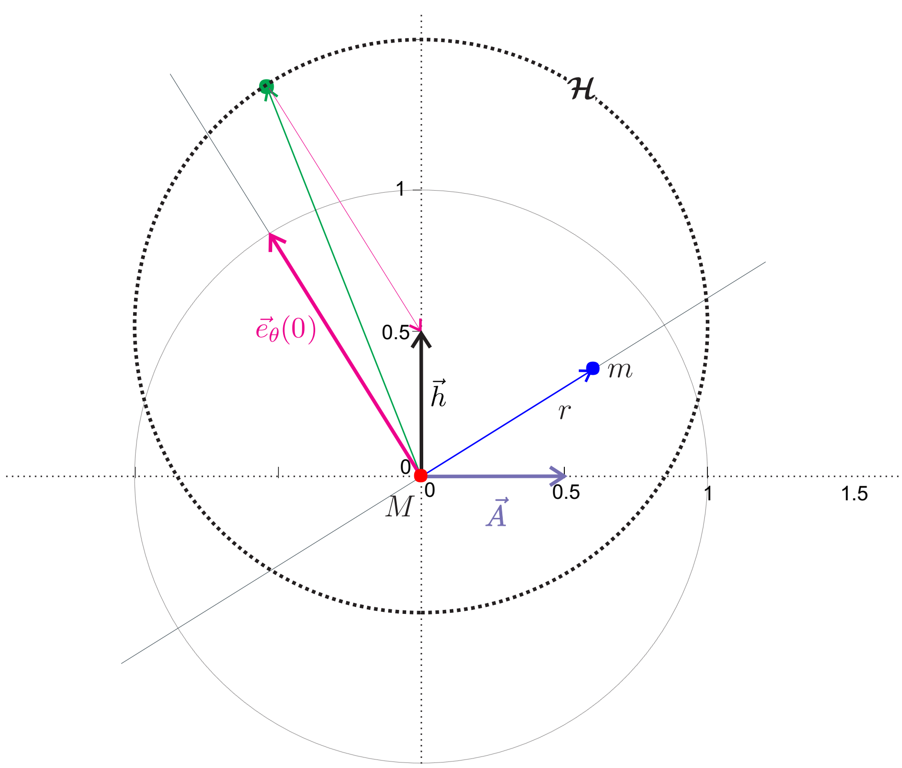
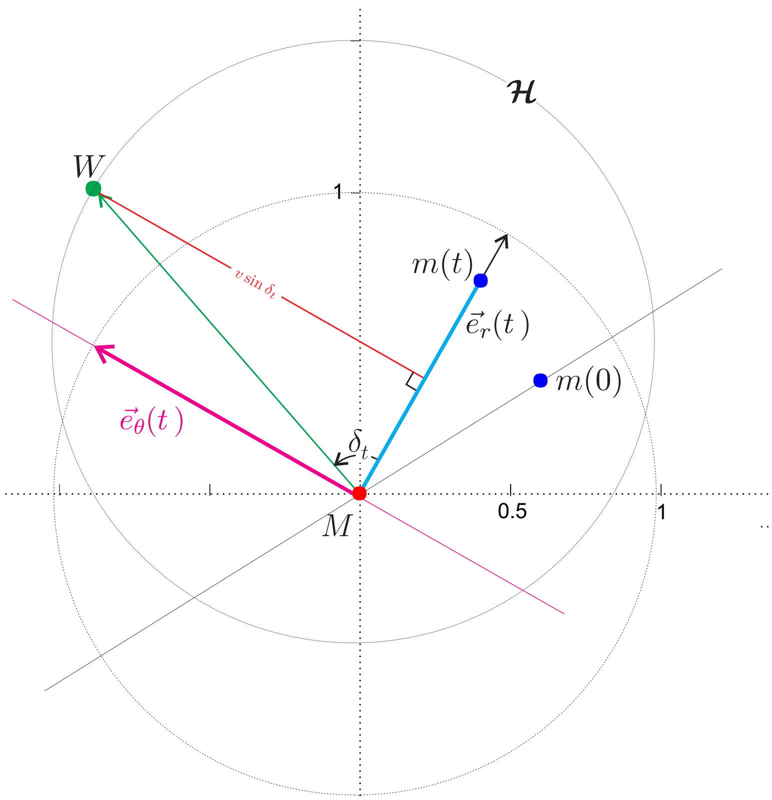
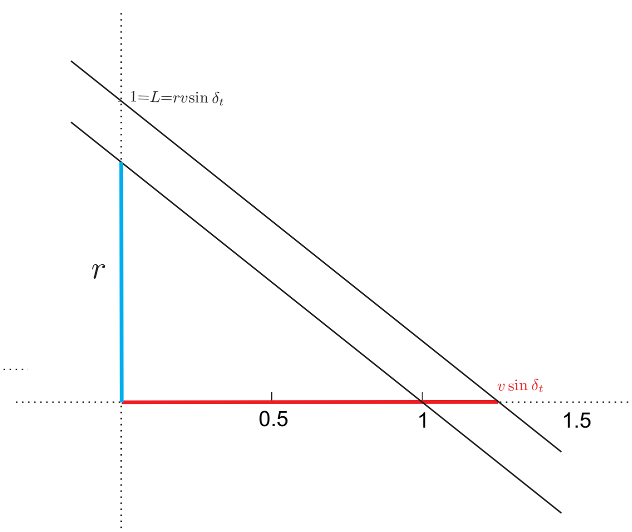


Figure 2: Le vecteur de Hamilton, l'hodographe et le vecteur de Lagrange.

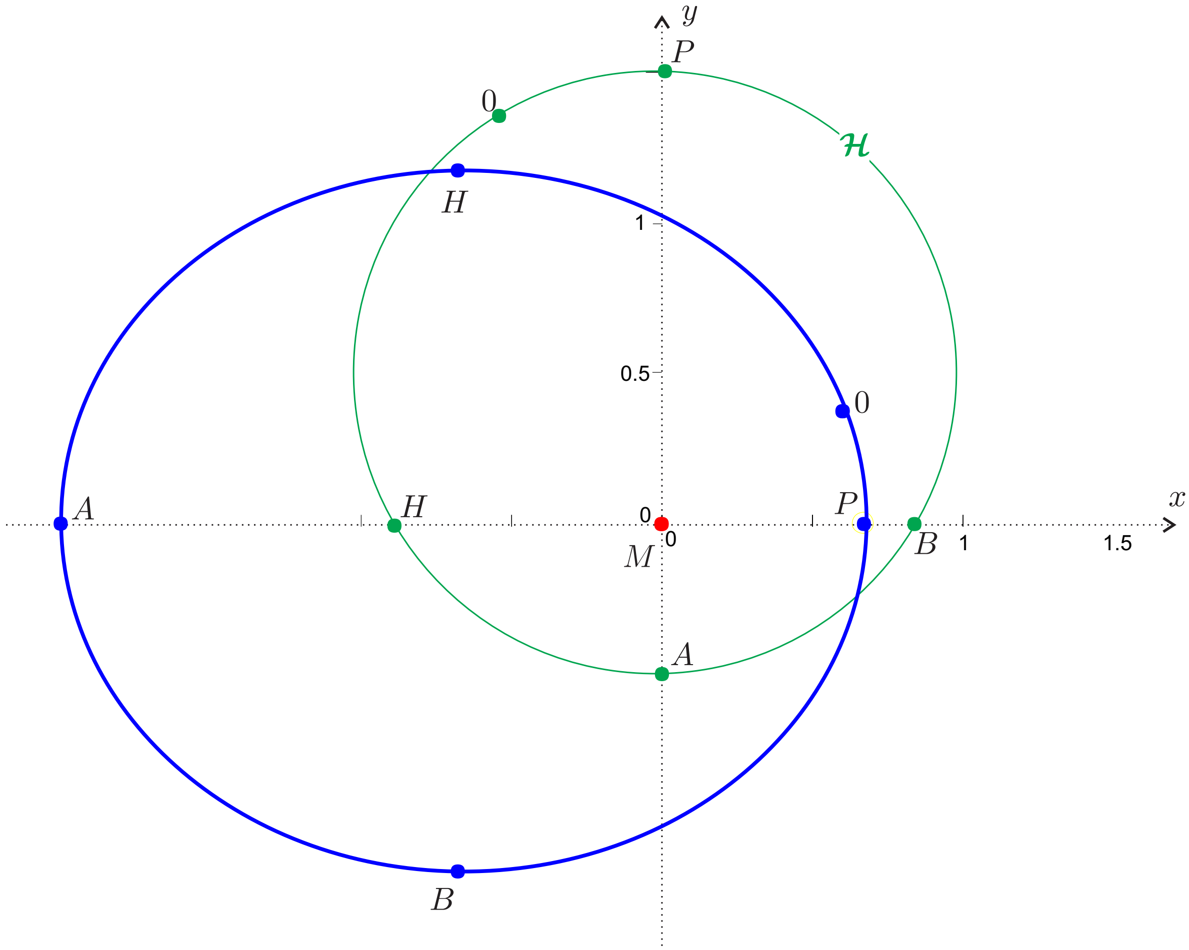
10. On a vu que $\vec{A} = \vec{h} \wedge \vec{L}$, le vecteur $\vec{A}$ est donc orthogonal à $\vec{h}$ – trouvé selon $\vec{e}_y$ – et $\vec{L}$ – trouvé selon $\vec{e}_z$ –si la construction est bien faite on trouve très vite que $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{e}_x$. Il est représenté sur la figure 2.

11. On choisit un autre point sur l'hodographe W : Le vecteur $\vec{v}_t = \overrightarrow{OW}$ est le vecteur vitesse à l'instant t. On construit $\vec{u}_t = \vec{v}_0 - \vec{h}$ qui donne le vecteur $\vec{e}_\theta\,(t)$. En tracant la médiatrice passant par O de la droite engendrée par $\vec{e}_\theta\,(t)$ on trouve le vecteur $\vec{e}_r\,(t)$. Pour trouver $\vec{r}\,(t)$ il ne suffit plus que de connaitre sa longueur que l'on trouve avec le fait que $L = 1 = rv\sin\delta_t$...





12. La trajectoire est une ellipse puisque $e = h/u = 1/2$, son grand axe est dirigé par $\vec{A}$ et son petit axe par $\vec{h}$. On construit le périgée et l'apogée en trouvant l'image des points de l'hodographe qui coupent l'axe $(M, \vec{h})$, etc... L'orbite est représentée au dos de cette feuille!



Merci de votre attention,

Jérôme Perez un samedi après-midi à Beyrouth...