

# Introduction à la physique des particules

Notes de cours  
2026-V1

ENSTA première année

PAQT12

04/06/2026

DEBU Pascal

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives  
Département de physique des particules

## Prérequis

Mécanique quantique, relativité restreinte, mécanique analytique (théorie classique des champs)

## Objectifs du cours

- Introduire la physique des particules et son modèle standard
- Présenter quelques applications et retombées de la physique corpusculaire

La physique nucléaire et la physique des particules représentent des enjeux de société importants, culturels et économiques.

## Documents fournis

- Polycopié
- Notes de cours avec un résumé des points importants à la fin de chaque chapitre
- Exercices
- Corrigés des exercices (disponibles au fur et à mesure)

## Évaluation

- Contrôle continu et devoirs maison à rendre.

## Programme

|             |                                            |
|-------------|--------------------------------------------|
| CHAPITRE 1  | Introduction                               |
| CHAPITRE 2  | Espace, temps, matière                     |
| CHAPITRE 3  | Antimatière                                |
| CHAPITRE 4  | Particules et interactions                 |
| CHAPITRE 5  | Un soupçon de théorie quantique des champs |
| CHAPITRE 6  | Interaction électromagnétique              |
| CHAPITRE 7  | Diagrammes de Feynman                      |
| CHAPITRE 8  | Interaction forte                          |
| CHAPITRE 9  | Interaction faible                         |
| CHAPITRE 10 | Modèle standard                            |

## Bibliographie

*Introduction à la physique  
subatomique*

A. Rougé

Les éditions de l'école polytechnique,  
2005

*Particle Physics:  
A Comprehensive Introduction*

A. Seiden

Pearson, Addison Wesley, 2005

*Fundamentals in Nuclear Physics*

J-L Basdevant, J. Rich, M. Spiro  
Springer, 2005

*Advanced Quantum Mechanics*

Franz Schwabl

Springer, 2008

*Théorie des champs*

*Les équations de la physique*

J. Pérez

Les presses de l'ENSTA, 2017

*Particules et noyaux*

*Une introduction à la physique des  
particules et à la physique nucléaire*

P. Debu

Presses des Mines, 2021

# TABLE DES MATIÈRES

|            |                                                              |     |
|------------|--------------------------------------------------------------|-----|
| CHAPITRE 1 | Introduction .....                                           | 1   |
| A -        | Les origines .....                                           | 1   |
| B -        | Les rayons cathodiques et la découverte de l'électron.....   | 3   |
| C -        | Physique des particules .....                                | 4   |
| D -        | Une avalanche de particules.....                             | 5   |
| E -        | Découvrir et étudier les particules et les interactions..... | 6   |
| F -        | À retenir .....                                              | 8   |
| CHAPITRE 2 | Espace, temps, matière .....                                 | 9   |
| A -        | Constantes fondamentales.....                                | 9   |
| B -        | Unités naturelles .....                                      | 10  |
| C -        | Relativité restreinte .....                                  | 11  |
| D -        | Rappels de mécanique quantique .....                         | 25  |
| E -        | Générateurs infinitésimaux .....                             | 34  |
| F -        | Équation de Klein-Gordon .....                               | 53  |
| G -        | À retenir .....                                              | 59  |
| CHAPITRE 3 | Antimatière.....                                             | 60  |
| A -        | Équation de Dirac.....                                       | 60  |
| B -        | Covariance de l'équation de Dirac .....                      | 65  |
| C -        | Quadrivecteur densité de courant .....                       | 73  |
| D -        | Solutions de l'équation de Dirac .....                       | 75  |
| E -        | Rapport gyromagnétique de l'électron.....                    | 79  |
| F -        | Antimatière.....                                             | 90  |
| G -        | Insuffisances de la théorie .....                            | 99  |
| H -        | À retenir .....                                              | 101 |

|            |                                                             |     |
|------------|-------------------------------------------------------------|-----|
| CHAPITRE 4 | Particules et interactions.....                             | 102 |
| A -        | Interactions fondamentales .....                            | 102 |
| B -        | Classification des particules élémentaires .....            | 104 |
| C -        | Lois de conservation .....                                  | 108 |
| D -        | Dynamique des processus élémentaires .....                  | 109 |
| E -        | À retenir.....                                              | 126 |
| CHAPITRE 5 | Un soupçon de théorie quantique des champs .....            | 127 |
| A -        | Opérateurs de création et d'annihilation.....               | 128 |
| B -        | Seconde quantification du champ scalaire .....              | 131 |
| C -        | Espace de Fock.....                                         | 135 |
| D -        | Rappel du théorème de Noether.....                          | 144 |
| E -        | Principe de moindre action généralisé.....                  | 145 |
| F -        | Relations de commutation à temps égaux .....                | 149 |
| G -        | Hamiltonien de Klein-Gordon .....                           | 155 |
| H -        | Champ de Dirac.....                                         | 161 |
| I -        | À retenir.....                                              | 175 |
| CHAPITRE 6 | Interaction électromagnétique .....                         | 177 |
| A -        | Équations de Maxwell .....                                  | 177 |
| B -        | Lagrangien électromagnétique.....                           | 178 |
| C -        | Conservation de la charge pour les fermions.....            | 180 |
| D -        | Invariance de jauge locale .....                            | 187 |
| E -        | Interaction électromagnétique pour les fermions .....       | 190 |
| F -        | Conservation de la charge pour les bosons .....             | 192 |
| G -        | Invariance de jauge locale .....                            | 197 |
| H -        | Interaction électromagnétique pour les bosons chargés ..... | 200 |

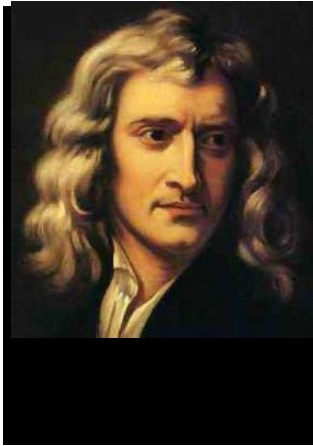
|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| I - Interaction électromagnétique des bosons.....           | 201 |
| J - Propriétés de l'interaction électromagnétique .....     | 203 |
| K - Photons .....                                           | 204 |
| L - Seconde quantification du champ électromagnétique ..... | 205 |
| G - Mécanisme de Higgs simplifié .....                      | 208 |
| H - À retenir .....                                         | 222 |
| CHAPITRE 7 Diagrammes de Feynman .....                      | 223 |
| A - Représentation en interaction .....                     | 223 |
| B - Série de DYSON .....                                    | 228 |
| C - Matrice $S$ , matrice $M$ .....                         | 232 |
| D - Taux de désintégration .....                            | 236 |
| E - Section efficace.....                                   | 249 |
| F - Cas du boson de Higgs .....                             | 252 |
| G - Diagrammes de Feynman .....                             | 276 |
| H - Renormalisation .....                                   | 296 |
| I - À retenir .....                                         | 312 |
| CHAPITRE 8 Interaction forte .....                          | 313 |
| A - Nombre baryonique et modèle des quarks.....             | 313 |
| B - Nécessité de la couleur et propriétés des hadrons ..... | 317 |
| C - Chromodynamique quantique .....                         | 322 |
| D - À retenir .....                                         | 344 |
| CHAPITRE 9 Interaction faible.....                          | 345 |
| A - Propriétés générales.....                               | 345 |
| B - Courants chargés : bosons $W^{\pm}$ .....               | 347 |
| C - Courants neutres : boson $Z^0$ .....                    | 350 |

|                                         |                                                              |            |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------|------------|
| D -                                     | Vertex de l'interaction faible .....                         | 351        |
| E -                                     | Neutrinos.....                                               | 353        |
| F -                                     | Violation des symétries discrètes .....                      | 359        |
| G -                                     | À retenir.....                                               | 372        |
| <b>CHAPITRE 10 Modèle standard.....</b> |                                                              | <b>373</b> |
| A -                                     | Quel groupe de jauge pour les interactions faibles ? .....   | 373        |
| B -                                     | Théorie électrofaible (Glashow-Salam-Weinberg) .....         | 383        |
| C -                                     | Masse des particules (mécanisme de Brout-Englert-Higgs)..... | 396        |
| D -                                     | Le modèle standard.....                                      | 399        |
| E -                                     | À retenir.....                                               | 403        |



# CHAPITRE 1 Introduction

## A - Les origines



**1687 Newton**  
*Mécanique  
classique*



**1824 Carnot**  
*Thermo-  
dynamique*



**1865 Maxwell**  
*Électro-  
magnétisme*

Fin du XIX<sup>ème</sup> : Mécanique, thermodynamique, électromagnétisme

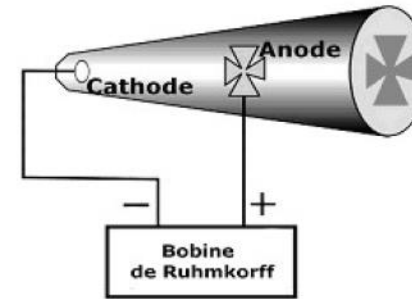
## La fin de la physique ?

Il restait quelques « petits » problèmes à résoudre :

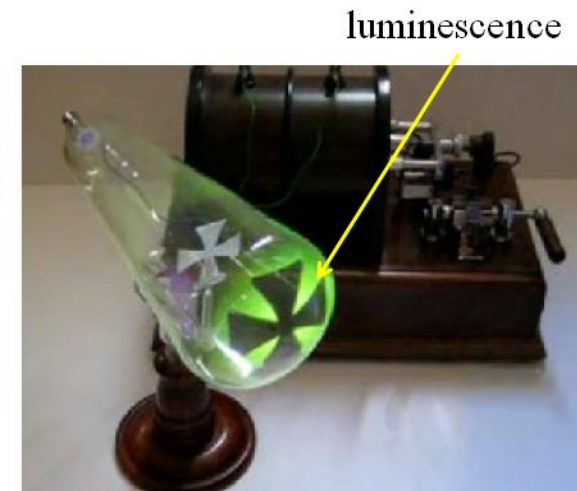
- la constance de la vitesse de la lumière → relativité restreinte
- le mouvement du périhélie de Mercure → relativité générale
- le rayonnement du corps noir → théorie des quanta
- l'effet photo-électrique → dualité onde-corpuscule
- spectres atomiques → mécanique quantique, théorie des champs
- mais aussi celui de la nature des *rayons cathodiques*...

## B - Les rayons cathodiques et la découverte de l'électron

Rayons cathodiques : Hittorf 1869



Tube de Crooks



1897 : Découverte de l'électron par Joseph Thomson

déviations des rayons cathodiques par un champ électrique ou magnétique  
rapport  $e/m \rightarrow$  indépendant du gaz, de la cathode et de l'anode !



La physique des particules est née !

Les rayons X venaient d'être découverts par Wilhelm Roentgen en 1895

## C - Physique des particules

- Étude des constituants élémentaires de la matière et de leurs interactions :
  - Électromagnétique : électricité, magnétisme et chimie !
  - Forte : cohésion des noyaux des atomes
  - Faible : radioactivité
  - Gravitation : chute des corps, mouvement des corps célestes
- ↔ Étude du contenu et de l'histoire de l'Univers (cosmologie)
- Innombrables applications et retombées technologiques (énergie, médecine, électronique, matériaux WEB...)



Inventeur du WEB  
Tim Berners-Lee  
CERN

## D - Une avalanche de particules

Matière ordinaire

|               |                                                                      |                                 |
|---------------|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| – 1897        | électron                                                             | Thomson                         |
| – 1911        | noyau                                                                | Rutherford                      |
| – 1919        | proton                                                               | Rutherford                      |
| – 1932        | neutron                                                              | Chadwick                        |
| – 1933        | positron                                                             | Anderson                        |
| – 1936        | muon                                                                 | Anderson, Neddermeyer           |
| – 1947        | pions chargés                                                        | Powell et al                    |
| – 1947        | kaons neutres                                                        | Rochester, Butler               |
| – depuis 1948 | lambdas, pion neutre, kaons chargés, deltas, des dizaines de hadrons |                                 |
| – 1953        | antineutrino électron                                                | Reines, Cowan                   |
| – 1955        | antiproton                                                           | Segré, Chamberlain              |
| – 1956        | antineutron                                                          | Cork                            |
| – 1962        | neutrino muon                                                        | Lederman, Schwartz, Steinberger |
| – 1974        | J/ψ quark c, tau                                                     | Richter-Ting, Perl              |
| – 1976        | Υ quark b                                                            | Lederman                        |
| – 1983        | bosons faibles W et Z                                                | Rubbia, van der Meer            |
| – 1995        | quark t                                                              | Fermilab                        |
| – 2000        | neutrino tau                                                         | Fermilab                        |
| – 2012        | <b>boson de Higgs</b>                                                | <b>CERN</b>                     |

## **E - Découvrir et étudier les particules et les interactions**

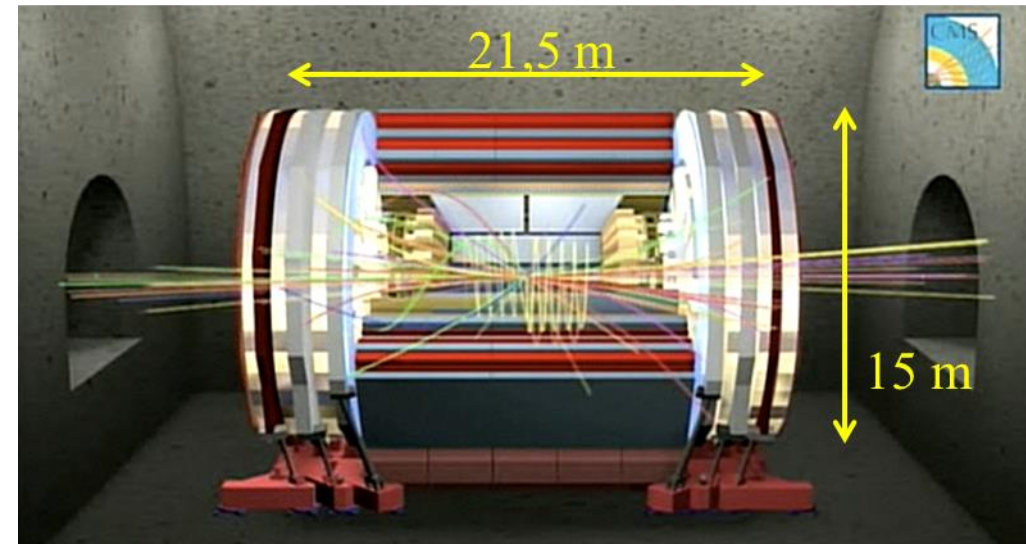
- Observation de nouvelles particules :
  - Rayons cosmiques
  - Radioactivité
  - Accélérateurs de particules
- Processus permettant leur détection et leur identification
  - Échauffement
  - Ionisation
  - Vaporisation, condensation
  - Luminescence
  - Effet Tcherenkov
  - Rayonnement de transition

Nous n'aborderons pas les techniques expérimentales, pourtant indispensables pour les progrès de la physique :

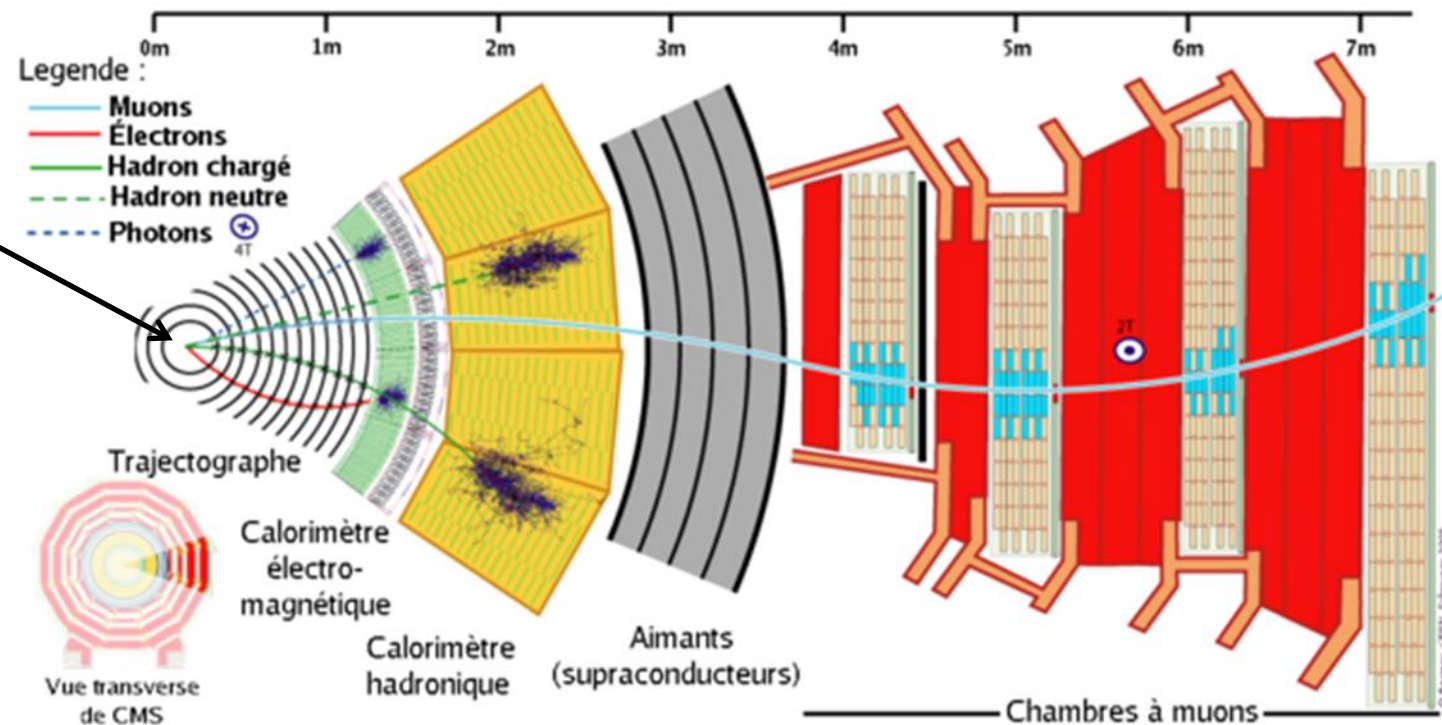
C'est l'expérience qui est le « juge de paix » et qui permet de choisir entre maints modèles mathématiques.

## Schéma d'un détecteur

Exemple :  
Détecteur CMS auprès du  
Large Hadron Collider  
CERN



Point de collision des  
faisceaux de protons



## **F - À retenir**

- 1895 : découverte des rayons X par W Roentgen
- 1897 : découverte de l'électron par Joseph Thomson
- 1911 : découverte du noyau par Ernest Rutherford
- 1919 ; découverte du proton par Ernest Rutherford
- 1932 : découverte du neutron par James Chadwick
- 1933 : découverte du positron par Carl David Anderson
- 2012 : découverte du boson de Higgs au CERN à Genève



## CHAPITRE 2 Espace, temps, matière

### A - Constantes fondamentales

- Charge élémentaire :  $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$
- Constante de Planck :  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Constante de Planck réduite :  $\hbar = h/2\pi = 1,055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Constante de Boltzmann :  $k = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
  
- Unités pratiques pour la physique corpusculaire :
  - $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$
  - $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$  (femtomètre ou fermi)
  
- Constante de conversion utile :
  - $\hbar c = 197 \text{ MeV fm} \cong 200 \text{ MeV fm}$

## B - Unités naturelles

- On définit le système d'unités naturelles : dans ce système :  $\hbar = c = k = \varepsilon_0 = 1$
- On omet alors d'écrire ces constantes dans les formules  
Si  $[A] = L^1 M^m t^n T^r Q^s$  et  $[B] = L^\lambda M^\mu t^\nu T^\rho Q^\sigma$ , alors il existe en général une façon unique d'écrire de façon homogène :  $A = c^x \hbar^y k^z \varepsilon_0^v B^w$   
On réduit alors la relation à :  $A = B^w$

• Pour les applications numériques, il faut rétablir l'homogénéité !

- Exemples :

$$L \sim \frac{1}{E} \sim t : \quad 1 \text{ fm} \approx \frac{1}{200 \text{ MeV}} \approx 3,3 \times 10^{-24} \text{ s}$$

$$E \sim T : \quad 1 \text{ eV} \approx 12 \text{ 000 K}$$

$$[E] \sim [P] \sim [M] \sim [L]^{-1} \sim [t]^{-1} \sim [T]$$

## C - Relativité restreinte

### I. Fondement

#### Deux principes d'invariance :

- Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie  
(et notamment les lois de l'électromagnétisme)
- Dans le vide, la lumière se déplace toujours avec la même vitesse indépendamment de la vitesse de la source

#### Conséquences :

- Changement de référentiel d'inertie : la transformation de Lorentz
- Espace-temps de Minkowski
- Quadri-vecteur énergie-impulsion



## II. Changement de référentiel : transformations de Lorentz

Soient deux référentiels d'inertie  $R(O,x,y,z,t)$  et  $R'(O',x',y',z',t')$

L'origine  $O'$  de  $R'$  est animé d'une vitesse  $v$  mesurée dans  $R$

On choisit l'axe  $Ox$  du repère  $R$  comme portant la trajectoire de  $O'$  dans  $R$

Réciproquement, l'origine  $O$  de  $R$  est animée d'une vitesse  $-v$  mesurée dans  $R'$

On choisit l'axe  $O'x'$  comme portant la trajectoire de  $O$  dans  $R'$

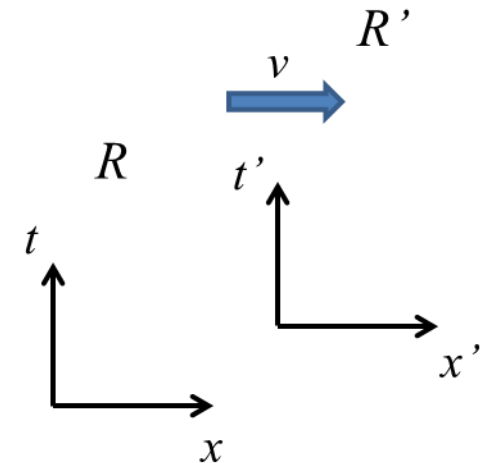
L'origine des temps dans  $R$  et  $R'$  est choisie de telle sorte que les points  $O$  et  $O'$  coïncident pour  $t = t' = 0$

On choisit les axes transverses de sorte que  $y = y'$  et  $z = z'$

En mécanique newtonienne on aurait :

$$t' = t ; x' = x - vt ; y' = y ; z' = z$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v$$



En relativité restreinte, l'invariance de la vitesse de la lumière conduit à la transformation de Lorentz spéciale :

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \beta\gamma x \\ x' = -\beta\gamma ct + \gamma x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$v$  : vitesse de  $R'$   
mesurée dans  $R$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

On voit que la quantité  $c^2t^2 - x^2$  est invariante par changement de repère

On introduit la rapidité  $\Omega$  :

On pose :  $\boxed{\begin{matrix} \cosh \Omega = \gamma \\ \sinh \Omega = \beta\gamma \end{matrix}}$  alors :  $\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Omega & -\sinh \Omega \\ -\sinh \Omega & \cosh \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$

Avantage : la composition de deux transformations spéciales est une transformation spéciale de rapidité égale à la somme des rapidités des deux transformations

Transformation de Lorentz inverse :

vitesse de  $R$  mesurée dans  $R'$  :  $-v$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

on vérifie que  $\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cas général (direction des axes arbitraire) :

Une transformation de Lorentz homogène  $\Lambda$  est le produit de deux rotations et d'une transformation spéciale.

Alors la quantité  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  est indépendante du repère

Un **quadrivecteur** est défini comme un objet à 4 composantes réelles qui se transforme par la même transformation de Lorentz que les coordonnées d'espace-temps lors d'un changement de référentiel :

$$A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} A_0' \\ A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \text{ si } \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

### III. Composition des vitesses

particule en  $x_1' = 0$  à  $t_1' = 0$  de vitesse  $v'$  dans  $R'$

à  $t_2'$  elle est en  $x_2' = v't_2'$

$$\text{vitesse mesurée dans } R : \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\gamma x_2' + \beta \gamma c t_2' - 0}{\gamma t_2' + \beta \gamma x_2' / c - 0} = \frac{\gamma v' + \beta \gamma c}{\gamma + \beta \gamma v' / c} = \frac{v' + v}{1 + vv' / c^2}$$

si  $v' = c$  la vitesse dans  $R$  vaut aussi  $c$  !

la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du repère  
conformément au principe d'invariance de la relativité restreinte  
grâce à la transformation de Lorentz des coordonnées d'espace-temps



#### IV. Intervalle relativiste

Soient deux événements  $(ct_1, \vec{r}_1)$  et  $(ct_2, \vec{r}_2)$

$I = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - (ct_1 - ct_2)^2 = \Delta l^2 - c^2 \Delta t^2$  est invariant par changement de référentiel

c'est l'intervalle relativiste entre les deux événements.

Il est :

- Du genre espace si  $\Delta l > c\Delta t$  ; on pose  $\Delta s = \sqrt{\Delta l^2 - c^2 \Delta t^2}$
- Du genre temps si  $\Delta l < c\Delta t$  ; on pose  $c\Delta\tau = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}$   
 $\Delta\tau$  est le temps propre entre les deux événements
- De longueur nulle si  $\Delta l = c\Delta t$

On a ainsi défini une pseudo-métrique

## V. Notations quadridimensionnelles

Composantes contravariantes :  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$

Sommation sur les indices répétés :  $r = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu e_\mu \equiv x^\mu e_\mu$

Métrique de Minkowski :

$$[e_\mu \cdot e_\nu] = [\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; [\eta^{\mu\nu}] = [\eta_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; [\eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu}] = [\delta^\mu_\nu] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composantes covariantes :  $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \Rightarrow x_0 = ct$ ,  $x_1 = -x$ ,  $x_2 = -y$ ,  $x_3 = -z$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} ; \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} ; \text{d'alembertien : } \square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta = \partial_\mu \partial^\mu$$

Produit scalaire de deux quadrivecteurs  $X = {}^t(x^0, x^1, x^2, x^3)$  et  $Y = {}^t(y^0, y^1, y^2, y^3)$  :  
 $X \cdot Y = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$

« Scalaire » : invariant par changement de référentiel

Une transformation de Lorentz homogène  $\Lambda$  laisse le produit scalaire invariant

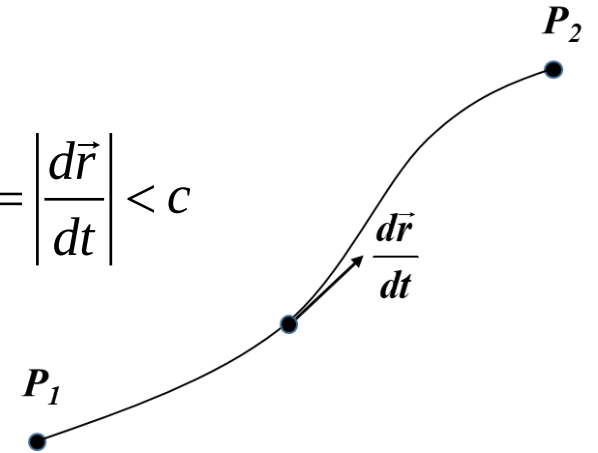
$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} ; y'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} y^{\nu} :$$

$$x'^{\mu} y'_{\mu} = x^{\mu} y_{\mu} \text{ soit : } \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda_{\mu}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$$

## VI. Dynamique

Ligne d'Univers  $P_1(ct_1, \vec{r}_1)P_2(ct_2, \vec{r}_2)$  d'un observateur  $v = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| < c$

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 = (c^2 - v^2) dt^2 \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



On sait que pour une particule libre la trajectoire entre  $P_1$  et  $P_2$  est telle que

$\Delta l = v\Delta t$  est le chemin le plus court joignant  $P_1$  et  $P_2$  et donc  $c^2 \Delta\tau^2$  est maximal

→ Action naturelle pour une particule libre indépendante du repère :

$$S = -K \int_{P_1}^{P_2} d\tau = -K \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\tau}{dt} dt = -K \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

avec  $K$  scalaire

Le lagrangien d'une particule libre est donc :  $L = -K \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

## VII. Masse invariante

$$\text{Si } v \ll c : L = -K + \frac{K}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

On doit retrouver le lagrangien non relativiste d'une particule libre :  $L = \frac{1}{2}mv^2$

Donc  $K = mc^2$  : m est un scalaire de Lorentz, c'est la **masse invariante**

La mécanique lagrangienne permet alors de calculer :

$$\textbf{Impulsion} : \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{v}$$

$$\textbf{Énergie} : E = \vec{p}\vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \quad \left( \Rightarrow \vec{v} = \vec{p}c^2 / E \right)$$

## VIII. Quadrivecteur énergie-impulsion

$$\text{Quadri-vitesse : } U = {}^t \left( \frac{cdt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right) = {}^t (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

où  $\tau$  est le temps propre : invariant relativiste

c'est un quadrivecteur

$$\rightarrow \text{Quadrivecteur énergie-impulsion : } mU = p = {}^t (p^\mu) = {}^t \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

Se comporte bien comme le quadrivecteur  ${}^t(cdt, \vec{r})$  par changement de référentiel

$$m^2 c^2 = p^\mu p_\mu = E^2 / c^2 - |\vec{p}|^2$$

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$$

# IX. Comparaison cinématique classique / relativiste

Mécanique classique

Relativité restreinte

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m \vec{v}$$

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m c^2$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$T$  : énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2 m}$$

$$T = E - m c^2$$

## X. Conservation de l'énergie-impulsion

| réaction                                                                                  |               |                     |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|---------------------|--------|
| $A$                                                                                       | $\rightarrow$ | $B$                 |        |
| $1 + 2 + \dots$                                                                           | $\rightarrow$ | $a + b + \dots$     | On a : |
| $E_1 + E_2 + \dots$                                                                       | $=$           | $E_a + E_b + \dots$ | soit : |
| $E_A$                                                                                     | $=$           | $E_B$               |        |
| $\vec{P}_A$                                                                               | $=$           | $\vec{P}_B$         | donc : |
| $\sqrt{E_A^2 - (\vec{P}_A)^2 c^2} = m_A c^2 = m_B c^2 = \sqrt{E_B^2 - (\vec{P}_B)^2 c^2}$ |               |                     |        |

Attention !!!

$$m_A \neq m_1 + m_2 + \dots$$

mais :

$$m_A c^2 = \sqrt{E_A^2 - P_A^2 c^2}$$



## D - Rappels de mécanique quantique

### 1) Fonction d'onde, opérateurs

- Les états d'un système forment un espace de Hilbert
- Ils sont décrits par une fonction d'onde représentant une amplitude de probabilité complexe de trouver le système dans cet état
- Superposition possible des états :  $\psi = \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2$
- Une quantité mesurable  $A$  est décrite par un opérateur linéaire hermitien  $A$
- Particule libre sans interaction : paquet d'ondes planes  
onde plane :  $\psi(\vec{r}, t) = C \exp[i(\vec{p} \cdot \vec{r} - E t) / \hbar]$

## XI. Principe de correspondance

$$\boxed{\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \quad x \rightarrow \text{multiplication par } x}$$

### Justification du principe de correspondance

#### a) Théorème d'Ehrenfest

Calculons pour toute observable

$$\begin{aligned} \frac{d\langle A \rangle}{dt} &= \frac{d}{dt} \int \bar{\psi} \hat{A} \psi d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{\psi} \hat{A} \psi d\tau = \int \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \hat{A} \psi + \bar{\psi} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi + \bar{\psi} \hat{A} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\tau = \\ &= \int \left( \frac{i}{\hbar} \bar{\psi} H^\dagger \hat{A} \psi + \bar{\psi} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi - \frac{i}{\hbar} \bar{\psi} \hat{A} H \psi \right) d\tau = \int \left( \frac{i}{\hbar} \bar{\psi} H \hat{A} \psi + \bar{\psi} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi - \frac{i}{\hbar} \bar{\psi} \hat{A} H \psi \right) d\tau = \int \bar{\psi} \left( \frac{i}{\hbar} [H, \hat{A}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right) \psi d\tau \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \frac{d\langle A \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} [A, H] \right\rangle$$

On retrouve la mécanique classique analytique :  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}$   
(  $f$  fonction quelconque des coordonnées généralisées)

*à condition d'identifier le crochet de Poisson  
au commutateur multiplié par  $(-i / \hbar)$  :*

$$\{ \cdot, \cdot \} \Leftrightarrow -\frac{i}{\hbar} [ \cdot, \cdot ]$$

Crochet de Poisson

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right]$$

b) Conséquence :

En mécanique analytique avec les coordonnées généralisées  $q_i$  et les impulsions

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \text{ on a :}$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \text{ soit avec les coordonnées usuelles :}$$

$$\Rightarrow [x, p_x] = i\hbar \text{ etc : relations de commutation canoniques}$$

Solution simple possible :  $x \rightarrow x \times ; \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$

**on obtient le principe de correspondance**

*D'autres solutions sont possibles, elles dépendent de la représentation des états par exemple on pourrait écrire des fonctions d'onde dépendant de  $\vec{p}$  et  $t$  :  $\phi(\vec{p}, t)$*

XII. Inégalités de Heisenberg :

$$\Delta A. \Delta B \geq \left| \left\langle \left[ \hat{A}, \hat{B} \right] \right\rangle \right| / 2 \text{ avec : } \left[ \hat{A}, \hat{B} \right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

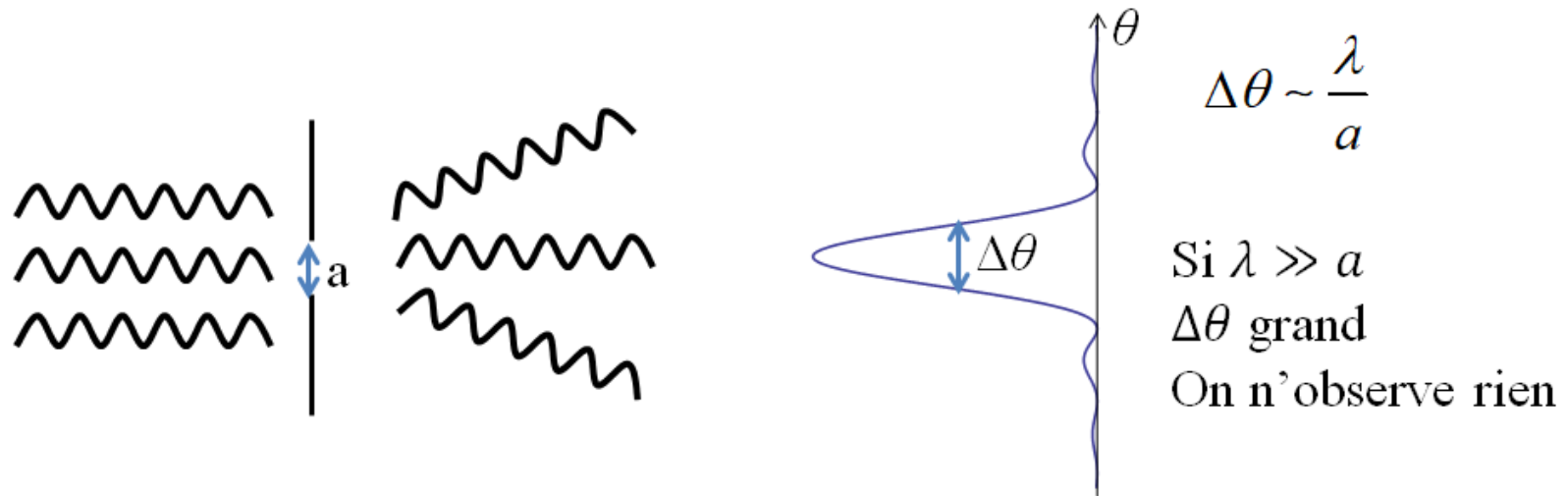
(exercice)

$$\text{Exemples : } \Delta x. \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} ; \Delta y. \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} ; \Delta z. \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

### XIII. Longueur d'onde de De Broglie

– Longueur d'onde de de Broglie  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}$

– Analogie optique :



- La résolution d'un objet de taille  $a$  nécessite  $\lambda \sim a$
- Un accélérateur de particules est un gigantesque microscope

## *Exemples*

- Électron de 1 keV ( $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$ ) (« non relativiste » :  $T \ll mc^2$ )
- Électron de 1 GeV (« ultra relativiste » :  $T \gg mc^2$ )
- Proton de 7 TeV ( $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2 \simeq 1 \text{ GeV}/c^2$ )

## XIV. Équation de Schrödinger

$$E = \left( \frac{p^2}{2m} + V \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{principe de correspondance} \\ \text{et remplacement de } E \text{ par } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \psi$$

- Incompatible avec la relativité restreinte





## XV. Évolution des systèmes

- Causale en l'absence de mesure : donnée par l'équation de Schrödinger
- « Réduction du paquet d'ondes » après une mesure :  
projection sur un vecteur propre de l'opérateur associé à la quantité mesurée

## E - Générateurs infinitésimaux

### 1) Translations

Soit un système décrit par une fonction d'onde  $\psi(x, y, z, t)$ .

On effectue une translation infinitésimale du système parallèle à l'axe des  $x$  de  $dx$   
On la note  $\mathcal{T}(dx)$ .

On cherche l'opérateur  $T(dx)$  qui fait passer de l'ancienne fonction d'onde à la nouvelle fonction d'onde :  $\psi' = T(dx)\psi$ .

Par définition de  $\mathcal{T}(dx)$ , on veut :

$$\psi'(x, y, z, t) = \psi(x - dx, y, z, t) = \psi - dx \partial_x \psi = \psi - dx \frac{i}{\hbar} p_x \psi$$

Soit :  $T(dx) = \hat{I} - dx \frac{i}{\hbar} p_x$ , où  $\hat{I}$  désigne l'opérateur identité.

## Intermède : opération exponentielle sur les matrices

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad ; \quad (\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$$

Attention :  $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$  si  $[A,B] \neq 0$

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A)) \quad \text{car : } P^{-1} \exp(A) P = \exp(P^{-1} A P)$$

Soit  $M = \exp(iG)$  , alors :

Si  $G$  est hermitienne,  $M$  est unitaire :

$$G^\dagger = G \Rightarrow \exp(-iG^\dagger) = \exp(-iG) \Rightarrow M^\dagger = M^{-1}$$

## Retour aux translations.

Une translation finie est le résultat d'une succession de translations infinitésimales.

On a ainsi :  $T(x+dx) = T(dx)T(x)$  et donc on veut :

$$T(x+dx) = T(dx)T(x) = \left( \hat{I} - dx \frac{i}{\hbar} p_x \right) T(x)$$

Donc :

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\frac{i}{\hbar} p_x T(x) \Rightarrow T(x) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} x p_x \right]$$

On peut facilement généraliser cette relation :

$$T(\vec{r}) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \vec{r} \cdot \vec{p} \right]$$

On dit que  $\vec{p}$  est le générateur infinitésimal des translations du système.

## XVI. Rotations géométriques

On s'intéresse maintenant aux rotations qui laissent invariant le point origine du repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

On définit la rotation infinitésimale d'angle  $d\alpha$  autour du vecteur unitaire  $\vec{u}$  par :

$$\mathcal{R}_{\vec{u}}(d\alpha)\vec{OM} = \vec{OM} + d\alpha \vec{u} \wedge \vec{OM}$$

Une rotation d'angle fini s'obtient par l'application successive de rotations infinitésimales :

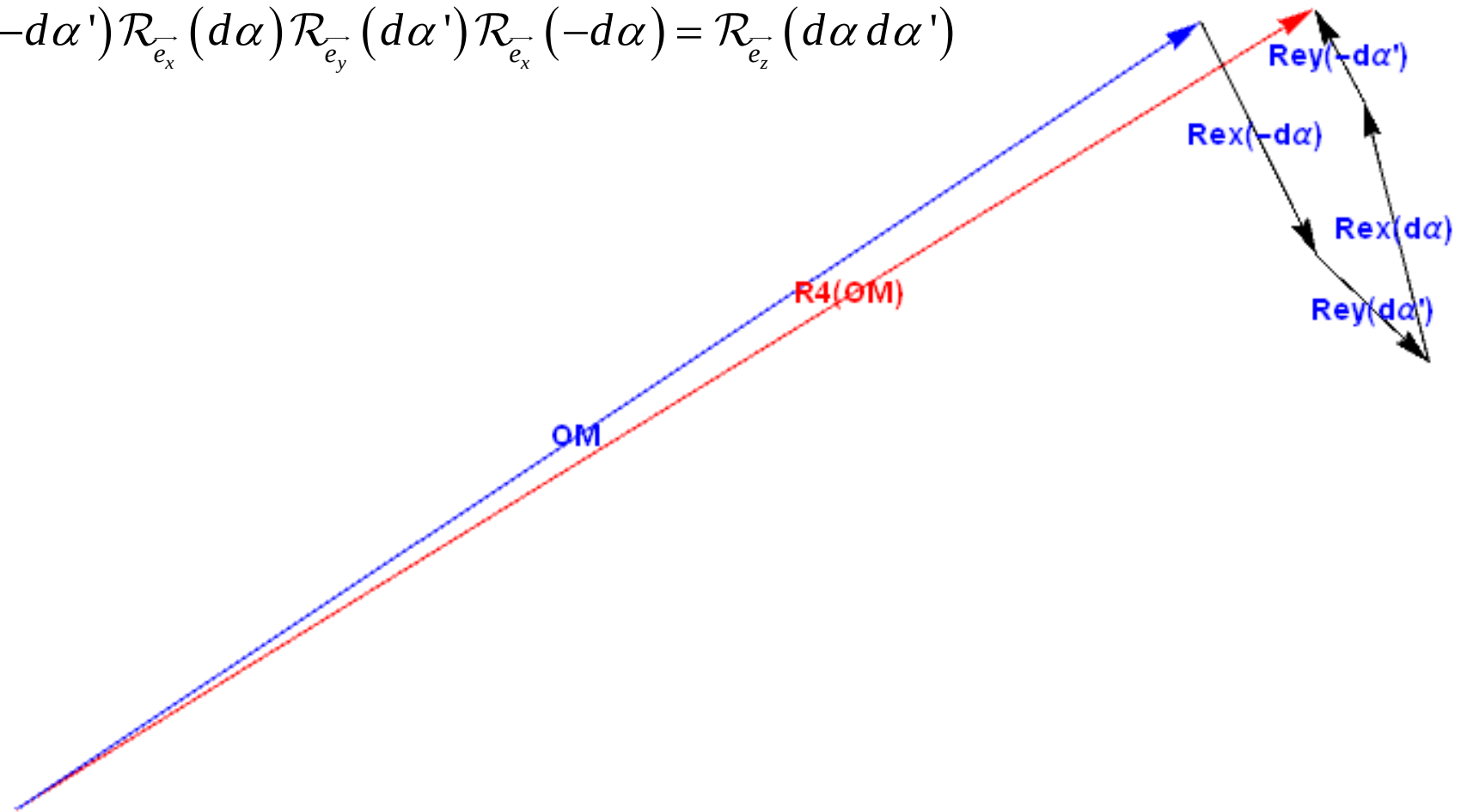
$$\mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha + d\alpha) = \mathcal{R}_{\vec{u}}(d\alpha)\mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha) = \mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha)\mathcal{R}_{\vec{u}}(d\alpha)$$

On a évidemment :  $\mathcal{R}_{\vec{u}}(0) = I$  (opération identité).

Les opérations de rotation autour de vecteurs différents ne commutent pas en général :  $\mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha)\mathcal{R}_{\vec{v}}(\beta) \neq \mathcal{R}_{\vec{v}}(\beta)\mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha)$

En particulier, la relation suivante va être utile pour la suite :

$$\mathcal{R}_4 \equiv \mathcal{R}_{\vec{e}_y}(-d\alpha')\mathcal{R}_{\vec{e}_x}(d\alpha)\mathcal{R}_{\vec{e}_y}(d\alpha')\mathcal{R}_{\vec{e}_x}(-d\alpha) = \mathcal{R}_{\vec{e}_z}(d\alpha d\alpha')$$



Montrons-la.

On constate d'abord que si  $d\alpha = 0$  ou si  $d\alpha' = 0$  alors  $\mathcal{R}_4 = I$ .

Donc  $\mathcal{R}_4 \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}$  est proportionnel à  $d\alpha d\alpha'$ . Pour calculer  $\mathcal{R}_4$ , il suffit donc de se limiter aux termes du premier ordre en  $d\alpha$  et  $d\alpha'$ .

Effectuons le calcul par étapes, en éliminant les termes d'ordre supérieur au fur et à mesure :

$$\mathcal{R}_{\vec{e}_x}(-d\alpha)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\vec{e}_y}(d\alpha')\mathcal{R}_{\vec{e}_x}(-d\alpha)\overrightarrow{OM} = \\ \overrightarrow{OM} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \overrightarrow{OM} + d\alpha' \vec{e}_y \wedge (\overrightarrow{OM} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \overrightarrow{OM}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}_{\vec{e}_x} (d\alpha) \mathcal{R}_{\vec{e}_y} (d\alpha') \mathcal{R}_{\vec{e}_x} (-d\alpha) \overrightarrow{OM} = \\
& \overrightarrow{OM} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \overrightarrow{OM} + d\alpha' \vec{e}_y \wedge \left( \overrightarrow{OM} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \overrightarrow{OM} \right) \\
& + d\alpha \vec{e}_x \wedge \left( \overrightarrow{OM} - \cancel{d\alpha \vec{e}_x \wedge \overrightarrow{OM}} + d\alpha' \vec{e}_y \wedge \left( \overrightarrow{OM} - \cancel{d\alpha \vec{e}_x \wedge \overrightarrow{OM}} \right) \right) = \\
& \overrightarrow{OM} + d\alpha' \vec{e}_y \wedge \left( \overrightarrow{OM} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \overrightarrow{OM} \right) + d\alpha d\alpha' \vec{e}_x \wedge \left( \vec{e}_y \wedge \overrightarrow{OM} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}_{\vec{e}_y} (-d\alpha') \mathcal{R}_{\vec{e}_x} (d\alpha) \mathcal{R}_{\vec{e}_y} (d\alpha') \mathcal{R}_{\vec{e}_x} (-d\alpha) \overrightarrow{OM} = \\
& \overrightarrow{OM} + d\alpha' \vec{e}_y \wedge \left( \overrightarrow{OM} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \overrightarrow{OM} \right) + d\alpha d\alpha' \vec{e}_x \wedge \left( \vec{e}_y \wedge \overrightarrow{OM} \right) \\
& - d\alpha' \vec{e}_y \wedge \left( \overrightarrow{OM} + \cancel{d\alpha' \vec{e}_y \wedge \left( \overrightarrow{OM} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \overrightarrow{OM} \right)} + \cancel{d\alpha d\alpha' \vec{e}_x \wedge \left( \vec{e}_y \wedge \overrightarrow{OM} \right)} \right) = \\
& \overrightarrow{OM} - d\alpha' d\alpha \vec{e}_y \wedge \left( \vec{e}_x \wedge \overrightarrow{OM} \right) + d\alpha d\alpha' \vec{e}_x \wedge \left( \vec{e}_y \wedge \overrightarrow{OM} \right)
\end{aligned}$$



On utilise alors la relation :  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) = 0$  pour obtenir :

$$\mathcal{R}_4 \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - d\alpha' d\alpha \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) = \overrightarrow{OM} + d\alpha' d\alpha \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OM} =$$

$$\mathcal{R}_{\vec{e}_z} (d\alpha d\alpha') \text{ CQFD}$$

Remarque : il faut bien enlever les termes en  $d\alpha^2$  car on doit avoir :

$$\mathcal{R}_{\vec{u}} (-d\alpha) \mathcal{R}_{\vec{u}} (d\alpha) = I.$$

Or :

$$\mathcal{R}_{\vec{u}} (-d\alpha) \mathcal{R}_{\vec{u}} (d\alpha) \overrightarrow{OM} = \mathcal{R}_{\vec{u}} (d\alpha) (\overrightarrow{OM} + d\alpha \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}) =$$

$$\overrightarrow{OM} + d\alpha \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM} - d\alpha \vec{u} \wedge (\overrightarrow{OM} + d\alpha \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}) =$$

$$\overrightarrow{OM} - \cancel{d\alpha^2 \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})}$$

### 3) Description quantique

On va voir dans ce paragraphe comment se traduisent les propriétés des rotations dans le cadre de la mécanique quantique.

#### Système sans spin

Soit un système décrit par la fonction d'onde  $\psi(x, y, z, t)$  (système sans spin). On effectue une rotation de  $d\alpha$  autour de l'axe des  $z$ .

Comme précédemment on cherche l'opérateur  $R_{e_z}^-(d\alpha)$  qui fait passer de  $\psi$  à  $\psi'$  avec :

$$\psi'(\vec{r}, t) = \psi(\mathcal{R}_{e_z}^-(-d\alpha)\vec{r}, t) = \psi(\vec{r} - d\alpha \vec{e}_z \wedge \vec{r}, t)$$

$$\psi'(x, y, z, t) = \psi(x + y d\alpha, y - x d\alpha, z, t)$$

$$\psi' = \psi + d\alpha (y\partial_x - x\partial_y)\psi = \psi - d\alpha \frac{i}{\hbar} L_z \psi$$

Donc :  $R_{\vec{e}_z}(d\alpha) = \hat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} L_z$

De même, on a :

$$R_{\vec{e}_x}(d\alpha) = \hat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} L_x \text{ et } R_{\vec{e}_y}(d\alpha) = \hat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} L_y$$

Plus généralement, on obtient, de façon analogue aux translations :

$$R_{\vec{u}}(d\alpha) = \hat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} \vec{u} \cdot \vec{L} \text{ et } R_{\vec{u}}(\alpha) = \exp\left(-\alpha \frac{i}{\hbar} \vec{u} \cdot \vec{L}\right)$$

L'opérateur  $\vec{L}$  est le générateur infinitésimal des rotations du système.

On peut vérifier que les relations de composition des rotations sont respectées.  
On dit que les opérateurs agissant sur le système constituent une représentation des opérations de rotation dans l'espace.

Considérons en particulier la relation démontrée plus haut :

$$\mathcal{R}_{e_y}(-d\alpha')\mathcal{R}_{e_x}(d\alpha)\mathcal{R}_{e_y}(d\alpha')\mathcal{R}_{e_x}(-d\alpha) = \mathcal{R}_{e_z}(d\alpha d\alpha')$$

On veut donc :

$$\left(\hat{I} + d\alpha' \frac{i}{\hbar} L_y\right) \left(\hat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} L_x\right) \left(\hat{I} - d\alpha' \frac{i}{\hbar} L_y\right) \left(\hat{I} + d\alpha \frac{i}{\hbar} L_x\right) = \hat{I} - d\alpha d\alpha' \frac{i}{\hbar} L_z$$

On obtient en conservant les termes du premier ordre en  $d\alpha$  et  $d\alpha'$  :  $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$  ce qui est bien vérifié, comme on l'a calculé directement à partir de la définition des opérateurs  $L_x, L_y$  et  $L_z$ . Par permutation circulaire des indices  $x, y, z$ , on retrouve aussi sans difficulté les autres relations de commutation.

Les relations de commutation des composantes du moment cinétique orbital apparaissent donc comme une conséquence de la non commutativité des opérations de rotation.

## Système avec spin

Le raisonnement du paragraphe précédent ne s'applique pas dans le cas général, car la relation entre  $\psi'$  et  $\psi$  n'est plus la même à cause de l'existence possible de degrés de liberté internes. Ainsi le spin va s'introduire naturellement.

On cherche un opérateur linéaire et unitaire  $R_{\vec{u}}(\alpha)$  qui relie  $\psi'$  et  $\psi$  pour une rotation  $\mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha)$  dans l'espace géométrique.

On veut aussi :  $R_{\vec{u}}(0) = \hat{I}$ , et donc on peut écrire en toute généralité pour une rotation infinitésimale d'angle  $d\alpha$  autour de  $z$  par exemple :

$$R_{\vec{e}_z}(d\alpha) = \hat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} J_z$$

$J_z$  est un opérateur que l'on cherche à caractériser.

Il est hermitien car  $R_{e_z}^-(d\alpha)$  est unitaire par hypothèse. En effet :

$$R_{e_z}^{-\dagger}(d\alpha)R_{e_z}^-(d\alpha) = \hat{I} \Leftrightarrow \left( \hat{I} + d\alpha \frac{i}{\hbar} J_z^{\dagger} \right) \left( \hat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} J_z \right) = \hat{I}$$

D'où, en gardant le premier ordre :  $J_z^{\dagger} - J_z = 0$ , CQFD.

On obtient les relations semblables pour les directions  $x$  et  $y$ .

Pour respecter les relations de composition des opérations de rotation, on est donc conduit, comme précédemment, aux relations :  $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$  et permutations circulaires sur  $x, y, z$ .

Cette fois, c'est une relation qui s'impose à l'opérateur  $\vec{J}$  pour qu'il représente le moment cinétique total du système, c'est-à-dire le générateur des rotations du système.

## XVIII. Définition des opérateurs moment cinétique

Ainsi se trouve justifiée la généralisation de la définition d'un moment cinétique comme opérateur vectoriel hermitien vérifiant les relations de commutation :

$$\left[ J_x, J_y \right] = i\hbar J_z \text{ et permutations circulaires}$$

On retiendra la relation :  $R_{\vec{u}}(\alpha) = \exp\left(-\alpha \frac{i}{\hbar} \vec{u} \cdot \vec{J}\right)$

L'opérateur  $\vec{J}$  est le générateur infinitésimal des rotations du système.

## XIX. Spin

L'étude générale des propriétés d'un opérateur moment cinétique montre que (**exercice**) :

- Les seules valeurs propres possibles de l'opérateur  $J^2$  sont de la forme :  $j(j+1)\hbar^2$  avec  $j$  entier ou demi-entier positif.
- Les valeurs propres des opérateurs  $J_x$ ,  $J_y$  et  $J_z$  sont les  $(2j+1)$  quantités  $m\hbar$  avec :  
 $m \in \{-j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j\}$  .

Ainsi, les particules peuvent porter un moment cinétique interne entier ou demi-entier, appelé spin.

La transformation de la fonction d'onde de spin est donnée par la relation

$$R_u(\alpha) = \exp\left(-\alpha \frac{i}{\hbar} \vec{u} \cdot \vec{J}\right)$$



Cas du spin  $\frac{1}{2}$  :

L'opérateur moment cinétique interne pour un spin  $\frac{1}{2}$  s'écrit :  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$   
( $\vec{\sigma}$  est le vecteur des matrices de Pauli).

Si on applique cette relation à la rotation de  $2\pi$  d'un spin  $\frac{1}{2}$  autour de l'axe des  $z$  on obtient :

$$R_{e_z}(2\pi) = \exp\left(-2\pi \frac{i}{\hbar} \frac{\hbar}{2} \sigma_z\right) = \begin{pmatrix} \exp(-i\pi) & 0 \\ 0 & \exp(i\pi) \end{pmatrix} = -\hat{I}$$

La rotation de  $2\pi$  n'est pas égale à l'identité, mais à  $-\hat{I}$  !

Cette possibilité provient du fait que nous avons construit les rotations à partir des rotations infinitésimales, sans imposer qu'une rotation de  $2\pi$  soit l'identité. On trouve ainsi des représentations sans équivalent classique du groupe des rotations avec les moments cinétiques demi-entiers.

Pour une rotation quelconque, l'opérateur qui s'applique à un spineur est :

$$R_{\vec{u}}(\alpha) = \exp\left(-\alpha i \vec{u} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)$$

Comme les matrices de Pauli sont hermitiennes de trace nulle,  $R_{\vec{u}}(\alpha)$  est une matrice  $2 \times 2$  unitaire de déterminant 1, elle appartient au groupe noté SU(2), groupe de Lie qui dépend de trois paramètres continus indépendants.

Réciproquement, toute matrice de SU(2) peut s'écrire sous la forme  $R_{\vec{u}}(\alpha)$  : les matrices de Pauli sont les générateurs du groupe SU(2).

*On peut facilement montrer que  $R_{\vec{u}}(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} \hat{I}_2 - i \sin \frac{\alpha}{2} \vec{u} \cdot \vec{\sigma}$ .*

## XX. Addition des moments cinétiques

Soit un système composé de deux sous-systèmes possédant des moments cinétiques associés aux opérateurs  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_2$  agissant sur des variables indépendantes. Il peut s'agir de deux particules, ou d'une seule particule avec son moment orbital et son moment intrinsèque, ou de systèmes plus complexes.

On s'intéresse à l'espace de Hilbert décrivant les états des moments cinétiques.

On utilise comme base les vecteurs propres pour les opérateurs  $J_1^2$ ,  $J_2^2$ ,  $J_{1z}$ ,  $J_{2z}$ .

On note ces  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  vecteurs  $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$  avec :

$$J_i^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = j_i(j_i + 1)\hbar^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

$$J_{iz} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = m_i \hbar |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

Les modules de  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_2$  sont fixés ( $j_1$  et  $j_2$  fixés), mais leurs orientations sont quelconques, les  $m_i$  peuvent donc prendre toutes les valeurs entre  $-j_i$  et  $+j_i$  par sauts de une unité.

Le moment cinétique total du système est :  $\boxed{\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2}$ .

On montre (**exercice**) que

- les valeurs propres de  $J^2$  sont  $J(J+1)\hbar^2$  avec :  $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$
- les valeurs propres de  $J_z$  sont  $M\hbar$  avec :  $-J \leq M \leq +J$

On peut ainsi construire une autre base de l'espace de Hilbert précédent à partir des vecteurs propres des opérateurs  $J^2$  et  $J_z$ .

On note les vecteurs de base  $|J, M\rangle$ . Ces vecteurs peuvent s'exprimer en fonction des vecteurs de base précédents (avec  $M = m_1 + m_2$ ):

$|J, M\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{JMm_1 m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ . Les phases des vecteurs de base sont choisies de façon que tous les **coefficients de Clebsch-Gordan**  $C_{JMm_1 m_2}$  soient réels.

*Nota bene* : les coefficients  $C_{JMm_1 m_2}$  dépendent de  $j_1$  et  $j_2$ , c'est pourquoi on devrait noter les vecteurs  $|J, M\rangle$  plutôt  $|j_1, j_2, J, M\rangle$ , mais on préfère ici alléger l'écriture.

## F - Équation de Klein-Gordon

### 1) Motivation

- Équation de Schrödinger : incompatible avec la relativité restreinte
- Principe de correspondance pour une particule relativiste libre :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \rightarrow \boxed{-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \Delta \psi + m^2 c^4 \psi}$$

Si on calcule les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène en partant de cette équation, on obtient des valeurs en bon accord avec les mesures.

Cependant la structure fine des raies – c'est-à-dire la dépendance de l'énergie d'un niveau  $n$  avec le moment cinétique orbital de l'électron (déjà très bien mesurée en 1925) était mal reproduite.

L'équation non relativiste donne finalement de meilleurs résultats.

## 2) Insuffisance des équations ?

- Il faut ajouter « à la main » un terme pour prendre en compte le spin de l'électron :

modification des niveaux d'énergie en présence d'un champ magnétique :

$$\Delta E = -g \frac{q}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B} \quad (g \simeq 2)$$

analogue à la relation classique :  $\Delta E = -\frac{q}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}$  au facteur mystérieux  $g$  près !

- L'équation de K-G est du second ordre en temps, la donnée de la fonction d'onde à l'instant initial ne permet pas de prédire son évolution, contrairement à l'équation de Schrödinger.

- L'équation de K-G a des solutions de masse négative :

$$\psi(\vec{r}, t) = N \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \left(Et - \vec{p} \cdot \vec{r}\right)\right] \text{ est solution pour } E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

- l'équation de Klein-Gordon ne permet pas de définir une probabilité de présence toujours positive !

(à partir d'ici, on utilise les unités naturelles :  $\hbar = c = k = \varepsilon_0 = 1$ )

Voyons d'abord ce qu'il en est avec **l'équation de Schrödinger** :

densité de courant de probabilité :  $\vec{j} = -\frac{i}{2m} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*]$

densité de probabilité :  $\rho = \psi^* \psi$

équation de continuité (voir démonstration page suivante) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

conservation de la probabilité de présence au cours du temps :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

Notons que, pour une onde plane :

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*] = \frac{|N|^2}{m} \vec{p} = |N|^2 \vec{v} = \rho \vec{v}.$$

## Démonstration de l'équation de continuité pour l'équation de Schrödinger :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}}_X$$

$$X = \left( +\frac{1}{i} \frac{\Delta \psi^*}{2m} - \frac{V}{i} \psi^* \right) \psi + \psi^* \left( -\frac{1}{i} \frac{\Delta \psi}{2m} + \frac{V}{i} \psi \right) \text{ car : } \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2mi} \Delta \psi + \frac{V}{i} \psi \\ \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = +\frac{1}{2mi} \Delta \psi^* - \frac{V}{i} \psi^* \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2mi} \left( \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi^*) \psi - \psi^* \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi) \right) = \frac{1}{2mi} \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad \text{CQFD}$$



## Cas de l'équation de K-G

Pour rester compatible avec la relativité, il faut définir un quadrivecteur courant :

$$j^\mu = i \left[ \psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^* \right] \quad \text{avec} \quad j^0 = \rho ; j^1 = j_x ; j^2 = j_y ; j^3 = j_z$$

En utilisant l'équation de K-G on obtient l'équation de continuité :

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

**Démonstration :**

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Delta \psi + m^2 \psi \quad \text{soit :} \quad \partial_\mu \partial^\mu \psi + m^2 \psi = 0$$

$$\text{Donc : } \partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi) = \underbrace{\partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi}_{\text{réel}} - \underbrace{\psi^* m^2 \psi}_{\text{réel}} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{CQFD.}$$

Problème :

Si on prend la solution  $\psi(\vec{r}, t) = N \exp\left[-i\left(Et - \vec{p} \cdot \vec{r}\right)\right]$ , on obtient :

$$j^0 = \rho = -\frac{1}{m} \operatorname{Im}\left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}\right] = -\frac{|N|^2}{m} \operatorname{Im}[-iE] = \frac{|N|^2}{m} E$$

Quantité négative pour les solutions d'énergie négative  $E = -\sqrt{p^2 + m^2}$  !

Difficile de concevoir une densité de probabilité négative !

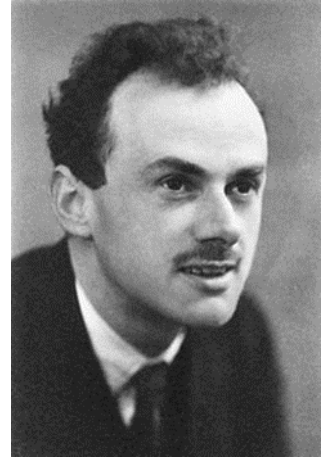
## G - À retenir

- Constantes fondamentales, unités naturelles  $\hbar = c = k = \varepsilon_0 = 1$
- Manipulation des notations quadridimensionnelles
- Transformations de Lorentz spéciales, rapidité, masse invariante
 
$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Omega & -\sinh \Omega \\ -\sinh \Omega & \cosh \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x c \end{pmatrix}; \quad \cosh \Omega = \gamma; \quad \sinh \Omega = \beta\gamma; \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$
- Longueur d'onde de de Broglie  $\lambda = h / p$
- Principe de correspondance : équations de Schrödinger et de Klein-Gordon
 
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \psi \quad ; \quad -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \Delta \psi + m^2 c^4 \psi$$
- Notion de générateur infinitésimal
- Définition d'un moment cinétique ;  $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$
- Valeur propre de  $J^2$  :  $j(j+1)\hbar^2$  avec  $j$  entier ou demi-entier
- Valeurs propres de  $J_{x,y,z}$  :  $m\hbar$  avec  $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$   $[(2j+1) \text{ valeurs}]$
- Addition des moments cinétiques :  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$  ;  $m = m_1 + m_2$

## CHAPITRE 3 Antimatière

### A - Équation de Dirac

Recherche d'une équation du 1<sup>er</sup> ordre : 
$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi$$



Compatible avec K-G : 
$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi = (-\nabla^2 + m^2) \psi$$

$$\begin{cases} \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1 \\ \alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = 0 \dots \text{etc} \dots \\ \alpha_x \beta + \beta \alpha_x = 0 \dots \text{etc} \dots \end{cases}$$

→  $\vec{\alpha}$  et  $\beta$  ne peuvent donc pas être des nombres → opérateurs  $\vec{\alpha}$  et  $\beta$

**NB** : la notation  $\vec{\alpha}$  ne doit pas laisser croire que  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  se transforment comme les composantes d'un vecteur, ce sont des constantes indépendantes du repère.

Propriétés de  $\vec{\alpha}$  et  $\beta$  :

- linéaires
- hermitiens car  $\left(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m\beta\right)$  est le hamiltonien du système et doit donc être hermitien (noter que  $-i\vec{\nabla} = \vec{p}$  est hermitien)
- de valeurs propres  $\pm 1$  car leur carré vaut l'identité
- de trace nulle

### Démonstration :

On rappelle que  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

$$\hat{\beta} \times (\hat{\alpha}_x \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_x = 0) \Rightarrow \hat{\beta} \hat{\alpha}_x \hat{\beta} = -\hat{\alpha}_x \Rightarrow \text{Tr}(\hat{\beta} \hat{\alpha}_x \hat{\beta}) = \text{Tr}(\hat{\alpha}_x) = -\text{Tr}(\hat{\alpha}_x) = 0$$

$$\hat{\beta} \times (\hat{\alpha}_x \hat{\alpha}_x = 1) \Rightarrow -\hat{\alpha}_x \hat{\beta} \hat{\alpha}_x = \hat{\beta} \Rightarrow \text{Tr}(\hat{\beta}) = -\text{Tr}(\hat{\beta}) = 0$$

$\Rightarrow$  Matrices  $2n \times 2n$  mais pas assez de matrices  $2 \times 2$  indépendantes  
 $\Rightarrow$  Matrices  $4 \times 4$  au minimum. Solution simple avec les matrices de Pauli :

$$\boxed{\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & -\hat{I} \end{pmatrix}}$$

avec  $\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

*Rappel :*  $\sigma_x^2 = \hat{I} \quad ; \quad [\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \quad ; \quad \sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$

et relations similaires par permutations circulaires des indices

**Conclusion :** On est conduit à élargir l'espace représentant les états

Ce n'est plus un espace de fonctions d'onde à valeurs complexes  
 mais un espace de fonctions à 4 composantes complexes qu'on appelle  
 (bi)spineurs.

**Il reste à interpréter physiquement ces fonctions.**

*Remarque :*

Notons qu'il est possible de trouver d'autres matrices solutions de ces équations. En fait tout ensemble de 4 matrices construites à partir des matrices précédentes par une transformation  $M \rightarrow U M U^\dagger$  où  $U$  est une matrice unitaire ( $U^\dagger = U^{-1}$ ) vérifie le système de contraintes, comme on peut le voir très facilement.

Toutes ces solutions conduisent à des **représentations équivalentes** de la physique. Il suffit de représenter le système physique initialement décrit par  $\psi$  par la nouvelle fonction d'onde  $\psi' = U\psi$  :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} &= (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m \beta) \psi \Rightarrow i \frac{\partial U \psi}{\partial t} = (-i U \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m U \beta) \psi \\ \Rightarrow i \frac{\partial U \psi}{\partial t} &= (-i U \vec{\alpha} U^\dagger \cdot \vec{\nabla} + m U \beta U^\dagger) U \psi \Rightarrow i \frac{\partial \psi'}{\partial t} = (-i \vec{\alpha}' \cdot \vec{\nabla} + m \beta') \psi' \end{aligned}$$

Réciproquement, tout système de matrices solutions du système s'obtient à partir d'une transformation définie plus haut (c'est un peu long à démontrer, et on admettra ce résultat).

## Matrices $\gamma$

Pour donner une forme plus symétrique entre les coordonnées spatiales et temporelle, on introduit les matrices  $\gamma^\mu$  :

$$\gamma^0 = \beta \quad ; \quad \gamma^{1,2,3} = \beta \alpha_{x,y,z}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{x,y,z} \\ -\sigma_{x,y,z} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 \times \left( i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m \beta) \psi \right) \rightarrow \boxed{(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0}$$



Équation de Dirac

### NOTA BENE :

Contrairement à ce que les notations pourraient faire croire, les matrices  $\gamma^\mu$  ne sont pas des composantes d'un quadrivecteur, ce sont des constantes, elles ne sont pas affectées par les transformations de Lorentz.



## B - Covariance de l'équation de Dirac

On doit assurer l'invariance de la forme de l'équation du mouvement par transformation de Lorentz pour satisfaire au principe de relativité **en définissant la loi de transformation du spineur  $\psi$** .

Soit une transformation de Lorentz  $\Lambda : x \rightarrow x' = \Lambda x$  (ou  $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ )

On cherche l'opérateur  $S(\Lambda)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m)\psi(x) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\gamma^{\mu} \partial'_{\mu} - m)\psi'(x') = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

On normalise  $S(\Lambda)$  en imposant  $\det S(\Lambda) = 1$

On trouve la condition qui détermine  $S(\Lambda)$  complètement :  $S^{-1}\gamma^{\nu}S = \Lambda^{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu}$

On montre de plus que pour les transformations orthochrones (qui ne renversent pas le sens du temps,  $\Lambda^0_0 > 0$ ) :  $S^{\dagger} = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0$  (**exercice** !).

## Démonstrations

$$\begin{aligned}
 (1) \&(2) \Rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu S^{-1} \psi'(x') = m S^{-1} \psi'(x') \Rightarrow Si\gamma^\mu \partial_\mu S^{-1} \psi'(x') = m \psi'(x') \\
 \Rightarrow iS\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu_\mu S^{-1} \psi'(x') = m \psi'(x') \Rightarrow iS\gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu S^{-1} \partial'_\nu \psi'(x') = m \psi'(x')
 \end{aligned}$$

Et on retrouve l'équation de Dirac à condition que :  $\gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu = S^{-1} \gamma^\nu S$   
 nombre réel

On a utilisé :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu \Rightarrow \partial_\mu = \partial'_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \partial'_\nu \Lambda^\nu_\mu$$

$$\text{De plus : } \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 \\ (\gamma^0 \gamma^{1,2,3})^\dagger = (\beta^2 \alpha_{x,y,z})^\dagger = \alpha_{x,y,z} = \gamma^0 \gamma^{1,2,3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \\ \gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \gamma^{\mu\dagger} \Lambda^\nu_\mu = S^\dagger \gamma^{\nu\dagger} S^{-1\dagger} \Rightarrow \gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 S^{-1\dagger} \gamma^0$$

nombre réel

$$\gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu = S^{-1} \gamma^\nu S \Rightarrow S^{-1} \gamma^\nu S = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 S^{-1\dagger} \gamma^0 \Rightarrow \gamma^\nu = (S \gamma^0 S^\dagger \gamma^0) \gamma^\nu (S \gamma^0 S^\dagger \gamma^0)^{-1}$$

Donc  $(S \gamma^0 S^\dagger \gamma^0)$  commute avec toutes les matrices  $\gamma$

$$\Rightarrow (S \gamma^0 S^\dagger \gamma^0) = c I_4 \Rightarrow S^\dagger \gamma^0 = c \gamma^0 S^{-1}$$

$c$  est réel car  $\gamma^0$  et  $S \gamma^0 S^\dagger$  sont hermitiennes.

$$\det S(\Lambda) = 1 \Rightarrow c^4 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

$$S^\dagger S = S^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S = c \gamma^0 S^{-1} \gamma^0 S = c \gamma^0 \Lambda^0_\nu \gamma^\nu \Rightarrow \text{Tr}(S^\dagger S) = 4c \Lambda^0_\nu \text{Tr}(\gamma^0 \gamma^\nu) = 4c \Lambda^0_\nu \eta^{0\nu} = 4c \Lambda^0_0$$

Or  $S^\dagger S$  est hermitienne, et si  $\psi$  est vecteur propre pour la valeur propre (réelle)  $a$

$$S^\dagger S \psi = a \psi \text{ donc } 0 < \langle S \psi | S \psi \rangle = \langle \psi | S^\dagger S \psi \rangle = a \langle \psi | \psi \rangle \Rightarrow 0 < a \Rightarrow \text{Tr}(S^\dagger S) > 0.$$

Finalement, si  $\Lambda$  est orthochrone, on a  $c = +1$ , CQFD.

On montre que pour une transformation infinitésimale  $\Lambda$  propre (déterminant 1) et orthochrone ( $\Lambda^0_0 > 0$ , sans renversement du sens du temps) :

$$S(\Lambda) = I_4 - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \text{ avec :}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu \ll 1$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

## Démonstration

a) Antisymétrie de  $\omega^{\mu\nu}$

Une transformation de Lorentz laisse invariante la métrique de Minkowski :

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta^{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}$$

On pose une transformation infinitésimale :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$$

Alors :

$$(\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma)\eta^{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}$$

Développement à l'ordre linéaire :

$$\eta^{\mu\nu} + \omega^\mu{}_\rho \eta^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\sigma \eta^{\mu\sigma} = \eta^{\mu\nu}$$

D'où :

$$\omega^\mu{}_\rho \eta^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\sigma \eta^{\mu\sigma} = 0$$

Soit :

$$\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0 \Rightarrow \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$$

Conclusion : le tenseur  $\omega^{\mu\nu}$  est antisymétrique, et possède donc 6 composantes indépendantes, correspondant aux 3 rotations ( $\omega^{ij}$ ) et 3 boosts ( $\omega^{0i}$ ).

## Transformation infinitésimale des spineurs de Dirac

On considère une transformation de Lorentz infinitésimale :

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu}, \quad \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$$

et on cherche la forme de la transformation dans l'espace des spineurs :

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

L'équation de Dirac doit rester covariante :

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu'} - m)\psi'(x') = 0$$

Avec  $x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu}x^{\nu}$  et  $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ , on impose :

$$S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu}$$

On pose :

$$S(\Lambda) = I + \delta S$$

et on développe à l'ordre linéaire :

$$(I + \delta S)\gamma^{\mu}(I - \delta S) \approx \gamma^{\mu} + [\delta S, \gamma^{\mu}] = \gamma^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu}$$

D'où la condition :

$$[\delta S, \gamma^{\mu}] = \omega_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu}$$

On propose l'ansatz :

$$\delta S = -\frac{i}{4} \omega_{\rho\sigma} \sigma^{\rho\sigma}, \quad \text{avec } \sigma^{\rho\sigma} = \frac{i}{2} [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]$$

On utilise l'identité :

$$[\sigma^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = i(\eta^{\mu\rho} \gamma^\sigma - \eta^{\mu\sigma} \gamma^\rho)$$

et on obtient :

$$[\delta S, \gamma^\mu] = -\frac{i}{4} \omega_{\rho\sigma} [\sigma^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = \frac{1}{4} \omega_{\rho\sigma} (\eta^{\mu\rho} \gamma^\sigma - \eta^{\mu\sigma} \gamma^\rho) = \omega_\nu^\mu \gamma^\nu$$

Ce qui prouve la covariance de l'équation de Dirac.

Conclusion : la transformation infinitésimale est :

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$$

Exemple d'une rotation de  $d\theta$  autour de  $\vec{e}_z$  :  $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\theta & 0 \\ 0 & d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les seules quantités  $\omega_{\mu\nu}$  non nulles sont :  $\omega_{12} = -d\theta$  et  $\omega_{21} = d\theta$ , il vient :

$$S(\Lambda) = I_4 + \frac{i}{4}\sigma^{12}d\theta - \frac{i}{4}\sigma^{21}d\theta = I_4 + \frac{i}{2}d\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } d\psi = \frac{i}{2}d\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \psi \Rightarrow \psi' = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \psi$$

si on considère une rotation finie de  $\theta$

Pour  $\theta = 2\pi$  on trouve  $\psi' = -\psi$  comme on l'avait trouvé pour un spin  $1/2$  !



## C - Quadrivecteur densité de courant

On pose :  $j^\mu = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  (en notant  $\psi^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}$ ) ; c'est bien un quadrivecteur :

Sous une transformation de Lorentz orthochrone :

$$j^\mu(x) \rightarrow j'^\mu(x') = \psi^\dagger(x) S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu S \psi(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0 S^{-1} \gamma^\mu S \psi(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^\nu \Lambda^\mu_\nu \psi(x) \\ = \Lambda^\mu_\nu j^\nu(x)$$

Se transforme comme un quadrivecteur !

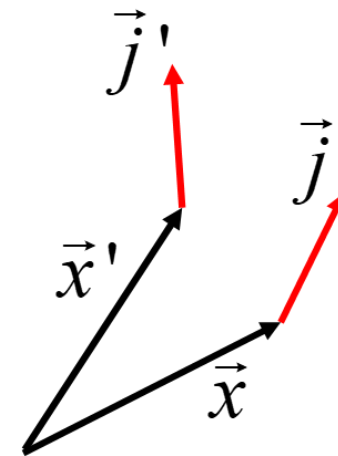
On a aussi :  $\partial_\mu j^\mu = 0$

(voir démonstration ci-dessous)

On a de plus :

$$j^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi > 0 !$$

**On peut définir une densité de probabilité positive et conservée !**



**Démonstration de l'équation de continuité  $\partial_\mu j^\mu = 0$  :**

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma^0 \gamma^\mu \psi + \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (\partial_\mu \psi)$$

$$\begin{aligned} \text{Équation de Dirac} \quad & \rightarrow \quad i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \Rightarrow i\gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\gamma^0 \psi = 0 \\ & \Rightarrow -i\partial_\mu \psi^\dagger (\gamma^0 \gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger \gamma^{0\dagger} = 0 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 \\ (\gamma^0 \gamma^{1,2,3})^\dagger = (\beta^2 \alpha_{x,y,z})^\dagger = \alpha_{x,y,z} = \gamma^0 \gamma^{1,2,3} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \partial_\mu j^\mu = -\frac{m}{i} \psi^\dagger \gamma^0 \psi + \psi^\dagger \gamma^0 \frac{m}{i} \psi = 0 \quad \text{CQFD}$$

## D - Solutions de l'équation de Dirac

On cherche les solutions en ondes planes de l'équation de Dirac :

$$\psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} u_1(p_\mu) \\ u_2(p_\mu) \\ u_3(p_\mu) \\ u_4(p_\mu) \end{pmatrix} \exp(-ip_\mu x^\mu)$$

$$\text{On pose } \begin{pmatrix} u_1(p_\mu) \\ u_2(p_\mu) \\ u_3(p_\mu) \\ u_4(p_\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} \text{ pour alléger les notations.}$$

On introduit ainsi deux « spineurs » à deux composantes,  $u_a$  et  $u_b$

Comme  $i\partial_\mu \left[ \exp(-ip_\mu x^\mu) \right] = p_\mu \exp(-ip_\mu x^\mu)$ , l'équation de Dirac devient :

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = 0 ; \quad p_\mu = (E, -\vec{p})$$

En utilisant les expressions des matrices  $\gamma$ , on obtient : 
$$\begin{pmatrix} EI_2 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -EI_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} (E - m)u_a = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_b & (1) \\ (E + m)u_b = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_a & (2) \end{cases} \Rightarrow (E^2 - m^2)u_{a,b} = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 u_{a,b} = \vec{p}^2 u_{a,b}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé l'identité :

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k \Rightarrow$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{X})(\vec{\sigma} \cdot \vec{Y}) = \vec{X} \cdot \vec{Y} I + i(\vec{X} \wedge \vec{Y}) \cdot \vec{\sigma}$$

On retrouve la relation relativiste :

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \Rightarrow E = \pm \varepsilon \text{ avec } \varepsilon = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \geq m$$

Pour  $E = +\varepsilon$ , on peut diviser (2) par  $(E + m)$ , et pour tout  $u_a$

$$\psi(x^\mu) = \left( \begin{pmatrix} u_a \\ \left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m} \right) u_a \end{pmatrix} \right) \exp(-ip_\mu x^\mu) \text{ est solution de l'équation de Dirac.}$$

$$\text{Si } |\vec{p}| \ll m : \psi(x^\mu) \simeq \begin{pmatrix} u_a \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-ip_\mu x^\mu)$$

que l'on peut identifier à un spineur de Pauli à deux composantes :  $u_a \exp(-ip_\mu x^\mu)$

Pour  $E = -\varepsilon$ , on peut diviser (1) par  $(E - m)$ , et pour tout  $u_b$

$$\psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m}\right) u_b \\ u_b \end{pmatrix} \exp(-ip_\mu x^\mu) \text{ est solution de l'équation de Dirac.}$$

où on souligne que  $p_0 = E = -\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$ .

**On trouve encore des solutions d'énergie négative...**



## E - Rapport gyromagnétique de l'électron

### Rappels sur le champ électromagnétique

Équations de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \rightarrow \text{dans le vide : } \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

→ on peut introduire un quadripotentiel électromagnétique :

$$A^\mu = \begin{pmatrix} V \\ \vec{A} \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{array} \right.$$

## Lagrangien électromagnétique

La force de Lorentz :  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}$

découle du principe de moindre action appliqué au lagrangien :

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + q\vec{v} \cdot \vec{A} - qV$$

Montrons-le !



## Dérivation de la force de Lorentz à partir du lagrangien $L$ :

$$\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} + q\vec{A} = \vec{\pi} + q\vec{A}$$

$$H = \vec{v} \cdot \vec{p} - L = m \frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}} + m\sqrt{1-v^2} + qV = \sqrt{m^2 + (\vec{p} - q\vec{A})^2} + qV$$

Équation du mouvement :  $\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ . Exemple : projection sur l'axe x

$$q \left[ \cancel{v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \right] =$$

$$\frac{d(\gamma m v_x)}{dt} + q \left[ \frac{\partial A_x}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right]$$

$$\text{soit : } q \left[ \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}}_{E_x} + v_y \underbrace{\left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)}_{B_z} + v_z \underbrace{\left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)}_{-B_y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right] = \frac{d(\gamma m v_x)}{dt}$$

$$\text{d'où finalement : } \frac{d(\gamma m v_x)}{dt} = q \left[ E_x + [\vec{v} \wedge \vec{B}]_x \right]$$

## On cherche les valeurs propres de l'énergie dans un champ électromagnétique.

Principe de correspondance en présence d'un champ électromagnétique

En notant  $\vec{\pi}$  la quantité de mouvement et  $\vec{p}$  l'impulsion :

$$\text{– Cas non relativiste : } E = \frac{1}{2}mv^2 + qV \quad ; \quad \vec{p} = \underbrace{\vec{\pi}}_{\vec{mv}} + q\vec{A} \Longleftrightarrow -i\vec{\nabla}$$

$$\text{– Cas relativiste : } \vec{p} = \underbrace{\vec{\pi}}_{\gamma m \vec{v}} + q\vec{A} \Longleftrightarrow -i\vec{\nabla}$$

L'opérateur  $-i\vec{\nabla}$  est bien le correspondant de  $\vec{p}$  et non de  $\vec{\pi}$  pour satisfaire aux relations de commutations canoniques  $\{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \leftrightarrow [q_\alpha, p_\beta] = i\delta_{\alpha\beta} \hat{I}$

Ainsi, l'équation de Schrödinger devient, puisque  $T = \frac{\pi^2}{2m} = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} = E - qV$  :

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left( \frac{(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2}{2m} + qV \right) \psi$$

il faut remplacer  $-i\vec{\nabla}$  par  $-i\vec{\nabla} - q\vec{A}$  et  $i\partial_t$  par  $i\frac{\partial}{\partial t} - qV$

On fait de même dans le cas relativiste :

avec  $-i\vec{\nabla} \rightarrow -i\vec{\nabla} - q\vec{A}$  et  $i\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} - qV$ ,

et en se souvenant que :

$$(A^\mu) = (V, \vec{A}); (A_\mu) = (V, -\vec{A}); (\partial^\mu) = (\partial_t, -\vec{\nabla}); (\partial_\mu) = (\partial_t, \vec{\nabla})$$

Alors  $i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu$

et l'équation de Dirac devient :  $\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$

(ces équations seront pleinement justifiées au chapitre 6)

## Attention !!!

Les ondes planes ne sont plus solutions car  $A_\mu$  est une fonction de  $x$ .

On cherche  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$  où  $\psi_a$  et  $\psi_b$  ont chacune deux composantes

Noter alors que  $\hat{p}_\mu \psi \neq p_\mu \psi$

## Résolution dans la limite non relativiste

Équation aux valeurs propres :  $i\partial_0\psi = H\psi = E\psi$

On remplace  $i\partial_0\psi$  par  $E\psi$  et on note  $-i\vec{\nabla} = \vec{p}$  dans l'équation de Dirac

$$p_\mu = i\partial_\mu = i(\partial_t, \vec{\nabla}) \Rightarrow \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 E - \vec{\gamma} \vec{p}$$

$$\begin{pmatrix} (E - qV)\hat{I} & -\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) & -(E - qV)\hat{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E\psi_a = \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})\psi_b + (qV + m)\psi_a & (1) \\ E\psi_b = \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A})\psi_a + (qV - m)\psi_b & (2) \end{cases}$$

Limite non relativiste pour  $E > 0$  :  $E - m, qV, |q\vec{A}|, |\vec{\pi}| \ll m$

$$(2) \Rightarrow \psi_b = \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \psi_a}{E + m + o(m)} \Rightarrow (1) \quad (E - m) \psi_a = \left( \frac{\left( \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \right)^2}{E + m} + qV \right) \psi_a$$

Or :  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{X})(\vec{\sigma} \cdot \vec{Y}) = \vec{X} \cdot \vec{Y} I + i(\vec{X} \wedge \vec{Y}) \cdot \vec{\sigma}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \left( \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \right)^2 &= (\vec{p} - q\vec{A})^2 + i \left( (\vec{p} - q\vec{A}) \wedge (\vec{p} - q\vec{A}) \right) \cdot \vec{\sigma} \\ &= (\vec{p} - q\vec{A})^2 - q(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{\sigma} = (\vec{p} - q\vec{A})^2 - q\vec{B} \cdot \vec{\sigma} \end{aligned}$$

On a utilisé pour la dernière égalité la relation ( $\vec{p}$  est l'opérateur  $-i\vec{\nabla}$  !) :

$$(\vec{p} - q\vec{A}) \wedge (\vec{p} - q\vec{A}) = -(\vec{p} \wedge q\vec{A} + q\vec{A} \wedge \vec{p}) = iq(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = iq\vec{B}$$

**(attention à la non commutation des opérateurs)**

Valeurs propres de l'énergie :

$$(E - m)\psi_a = \left( \frac{|\vec{\pi}|^2 - q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}}{E + m + o(m)} + qV \right) \psi_a$$

$$E - m = o(m) \Rightarrow E + m = 2m + o(m)$$

$$\Rightarrow (E - m)\psi_a = \left[ \underbrace{\frac{\pi^2}{2m} + qV}_{Ec + Ep} - \underbrace{\frac{q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}}{2m}}_{\text{nouveau terme égal à l'énergie de Pauli}} \right] \psi_a$$

$$\text{Rappel : terme de Pauli } -\frac{gq}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B} \text{ avec } \begin{cases} g = 2 \\ \vec{S} = \hbar \vec{\sigma} / 2 \\ \hbar = 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \text{ CQFD}$$

Ainsi,  $\psi_a$  représente le spineur à deux composantes de l'équation de Pauli !

La première équation redonne l'équation de Pauli pour  $\psi_a$  à la limite non relativiste.

De plus  $\psi_b = \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \psi_a}{E + m + o(m)}$  donc  $|\psi_b| \ll |\psi_a|$  et peut être négligé !

C'est un succès majeur de l'équation de Dirac qui prédit ainsi :

- l'existence du spin de l'électron
- et le facteur de Landé  $g = 2$

auparavant ajoutés « à la main » pour rendre compte des résultats expérimentaux.



Il y a cependant les solutions à énergie négative :  $E \simeq -m - o(m)$ .

$$(1) \Rightarrow \psi_a = \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \psi_b}{E - m - o(m)} \Rightarrow (2) \quad E\psi_b = \left( \frac{\left( \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \right)^2}{E - m} + qV - m \right) \psi_b$$

soit :  $E\psi_b = (-m - o(m))\psi_b$

**Que faire de telles solutions !?**

## F - Antimatière

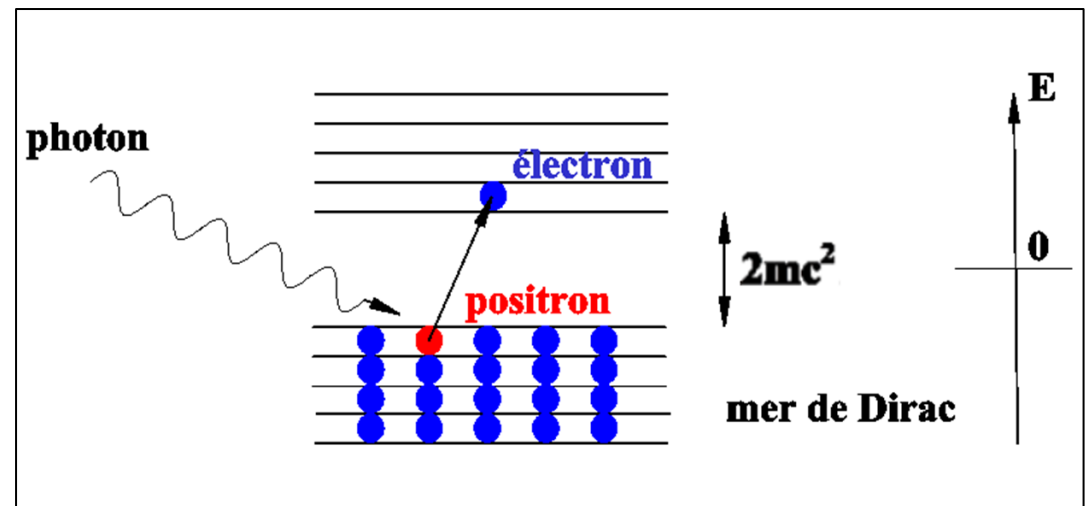
### 1) Théorie des trous de Dirac

Définition du vide :

- tous les niveaux d'énergie négative sont occupés par les électrons.
- gaz de Fermi non observable → quantités observables : déviations par rapport à cet état

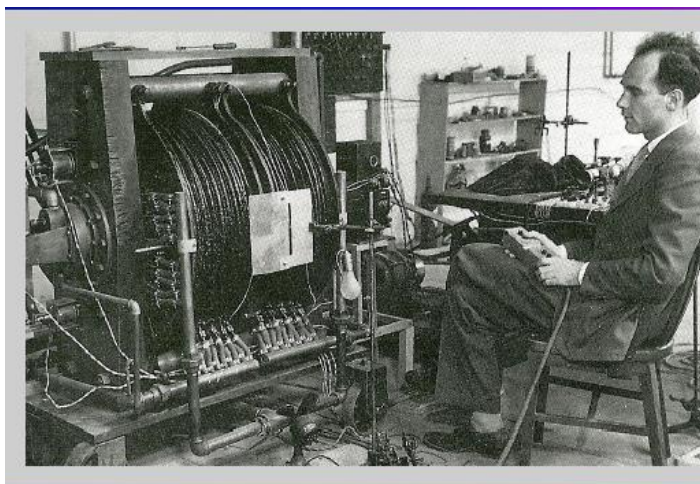
Si on ajoute un électron, il a alors nécessairement une énergie positive grâce au principe de Pauli.

Si on retire un électron d'énergie négative, le « trou » ainsi créé apparaît comme une particule de **charge opposée, d'énergie opposée, donc positive**, et d'impulsion opposée.



## 2) Le positron

- En 1931, Dirac émet l'hypothèse de l'existence d'un antiélectron, qui serait l'effet observable d'un trou dans la mer d'électrons d'énergie négative.
- Avec cette théorie, on peut alors comprendre la création de paires et l'annihilation électron-positron par l'éjection d'un électron de la mer.
- En 1932, Anderson découvrait à Caltech, indépendamment, une particule de même masse que l'électron, mais de charge opposée, qui sera nommée positon ou positron.



Caltech, 1932

### 3) Équation aux valeurs propres pour le positron

$$\begin{cases} E\psi_a = \vec{\sigma} \left( \vec{p} - q\vec{A}\hat{I} \right) \psi_b + (qV + m)\psi_a & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E\psi_b = \vec{\sigma} \left( \vec{p} - q\vec{A}\hat{I} \right) \psi_a + (qV - m)\psi_b & (2) \end{cases}$$

Limite non relativiste :  $qV, |q\vec{A}|, |\vec{\pi}| \ll m$  mais avec cette fois :  $\underline{E = -\varepsilon}$

$$(1) \Rightarrow \psi_a = \frac{\vec{\sigma} \left( \vec{p} - q\vec{A}\hat{I} \right) \psi_b}{-\varepsilon - m + o(m)} \Rightarrow (2) \quad (-\varepsilon + m)\psi_b = \left[ \frac{\left( \vec{\sigma} \cdot \left( \vec{p} - q\vec{A}\hat{I} \right) \right)^2}{-\varepsilon - m} + qV \right] \psi_b$$

$$\left( \vec{\sigma} \cdot \left( \vec{p} - q\vec{A}\hat{I} \right) \right)^2 = \left( \vec{p} - q\vec{A}\hat{I} \right)^2 + i \left( \left( \vec{p} - q\vec{A}\hat{I} \right) \wedge \left( \vec{p} - q\vec{A}\hat{I} \right) \right) \vec{\sigma} = \left( \vec{p} - q\vec{A}\hat{I} \right)^2 - q \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) \cdot \vec{\sigma} = \left( \vec{p} - q\vec{A}\hat{I} \right)^2 - q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}$$

On obtient finalement :

$$(-\varepsilon + m)\psi_b = \left( \frac{|\vec{\pi}|^2 - q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}}{-\varepsilon - m + o(m)} + qV \right) \psi_b \Rightarrow$$

$$(\varepsilon - m)\psi_b = \left[ \frac{\pi^2}{2m} \underbrace{-qV + \frac{q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}}{2m}}_{\substack{\text{termes d'énergie} \\ \text{électromagnétique} \\ \text{pour une charge -q}}} \right] \psi_b$$

positron

masse m

charge -q

*(mais il faudrait que la quantité  $\varepsilon$  soit égale à l'énergie  $\rightarrow$  théorie des champs)*

#### 4) Propriétés de l'antimatière

À toute particule correspond une antiparticule

- de même masse
  - de même spin
  - de même durée de vie
  - de charge(s) opposée(s)
- (il y a d'autres charges que la charge électrique)

| particule | antiparticule |
|-----------|---------------|
| $m$       | $m$           |
| $S$       | $S$           |
| $\tau$    | $\tau$        |
| $q$       | $-q$          |

- Exemples

|          |       |      |             |           |      |
|----------|-------|------|-------------|-----------|------|
| électron | $e^-$ | 1897 | positron    | $e^+$     | 1933 |
| proton   | $p$   | 1919 | antiproton  | $\bar{p}$ | 1955 |
| neutron  | $n$   | 1932 | antineutron | $\bar{n}$ | 1956 |

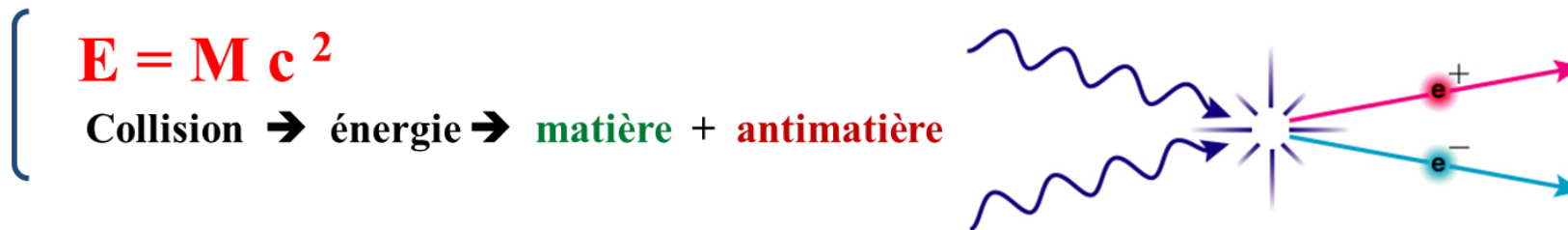
Comment se fabrique l'antimatière ?

– par radioactivité  $\beta^+$  :

un proton dans un noyau  $\rightarrow$  neutron + positron + neutrino

– par « matérialisation » :

Collisions de particules à haute énergie



Masse du proton = 2000 fois la masse de l'électron

$\rightarrow$  L'énergie nécessaire pour créer  $p + \bar{p}$

est 2000 fois plus grande que l'énergie nécessaire pour créer la paire  $e^- + e^+$

Que devient l'antimatière ?  
« Annihilation »

$$Mc^2 = E$$

matière + antimatière  $\rightarrow$  énergie  $\rightarrow$  des photons ou d'autres « rayonnements »

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$$



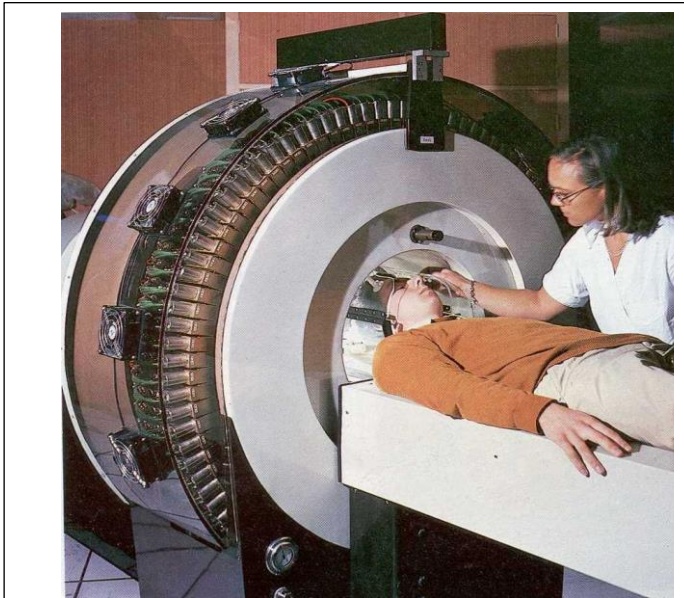
$p + \bar{p} \rightarrow$  pions et autres particules (voir chapitre suivant)



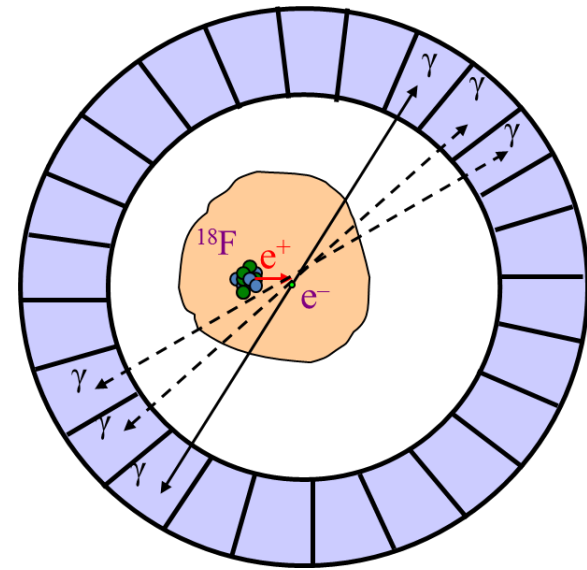
## Utilisation de l'antimatière

- Imagerie médicale : tomographie par émission de positons (TEP)

Un corps radioactif  $\beta^+$  est injecté dans le patient  
exemple : fluorodesoxyglucose avec du fluor 18 :



Prototype développé au  
CEA en 1983



Couronne de détecteurs + coïncidence

- Science des matériaux

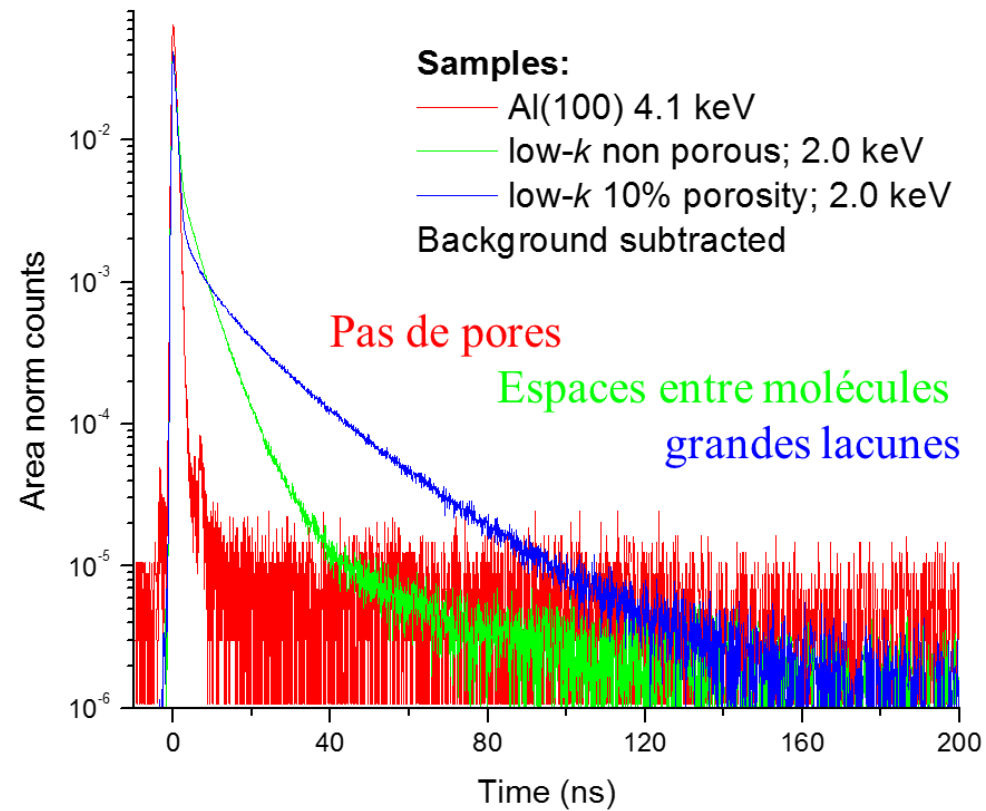
- Envoi d'un faisceau de positons sur un échantillon de matériau à étudier

- Mesure du temps mis par des positons pour s'annihiler dans la matière :

→ détection et caractérisation des lacunes et porosités à l'échelle nanométrique

### Applications :

- États de surfaces, corrosion, vieillissement, des aciers, alliages.
- Porosité: filtres, membranes, verres
- Caractérisation des substrats en silicium (électronique rapide)



## G - Insuffisances de la théorie

- La mécanique quantique est incapable de décrire la création ou l'annihilation de particules

mais à cause des inégalités de Heisenberg, on ne peut localiser une particule à mieux que  $\Delta x \sim \hbar / 4mc$  sous peine de créer d'autres particules :

$$\Delta p \geq \hbar / 2\Delta x = 2mc \Rightarrow \Delta E \geq 2mc^2$$

- Le temps et les coordonnées d'espace jouent des rôles très différents en mécanique quantique (paramètre/opérateurs), peu compatible avec la relativité
- On ne peut pas (facilement) prendre  $t$  comme un opérateur, sous peine de perdre la notion d'état fondamental d'énergie minimale (**exercice**)

- On peut alors prendre les coordonnées comme paramètres
- Les opérateurs deviennent des fonctions des coordonnées d'espace temps (représentation de Heisenberg généralisée)
- On obtient une théorie quantique et relativiste dans laquelle la physique est décrite par des **champs d'opérateurs de création et d'annihilation de particules**.

On fera une brève introduction à la **théorie quantique des champs**

- La construction de la théorie se fonde sur des **principes de symétrie**

W. Heisenberg



E 3

Antimatière

W. Pauli



## H - À retenir

- Définition et propriétés des matrices  $\gamma$
- Équation de Dirac  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$
- Quadri-vecteur densité de courant  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$
- Solutions de l'équation de Dirac (avec  $p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ) :

$$\psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} u_a \\ \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m}\right) u_a \end{pmatrix} \exp(-ip_\mu x^\mu) ; \psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m}\right) u_b \\ u_b \end{pmatrix} \exp(ip_\mu x^\mu)$$

- Relation impulsion / quantité de mouvement en champ électromagnétique :

$$\vec{p} = \vec{\pi} + q\vec{A}$$

- Rapport gyromagnétique / facteur de Landé de l'électron  $g = 2$
- Propriétés de l'antimatière
- Principe de la TEP

# CHAPITRE 4    Particules et interactions

## A -      Interactions fondamentales

- Interaction électromagnétique  
agit sur les particules chargées électriquement  
responsable des phénomènes électriques et magnétiques, des liaisons chimiques...
  - Interaction **forte**  
agit sur les particules contenant des quarks  
responsable de la cohésion du noyau des atomes
  - Interaction **faible**  
agit sur toutes les particules  
responsable de certaines formes de radioactivité
- + *Interaction gravitationnelle*  
*Non couverte par le modèle standard de la physique des particules*  
*Agit sur toutes les formes d'énergie*  
*Extrêmement faible, le plus souvent négligeable au niveau microscopique*

| interaction        | médiateurs<br>(spin 1) |                              | symbole                  | force<br>(à basse<br>énergie)<br>portée         | charge            |
|--------------------|------------------------|------------------------------|--------------------------|-------------------------------------------------|-------------------|
| électromagnétisme  | 1                      | photon<br>sans<br>masse      | $\gamma$                 | $\alpha = 1/137$<br>longue                      | électrique        |
| interaction faible | 3                      | bosons<br>faibles<br>massifs | $W^+ \quad W^-$<br>$Z^0$ | $\alpha_w$ effectif<br>$\sim 10^{-6}$<br>courte | isospin<br>faible |
| interaction forte  | 8                      | gluons<br>sans<br>masse      | $g \dots$                | $\alpha_s \sim 1$<br>courte                     | couleur           |



« particules d'interaction »

## B - Classification des particules élémentaires

Un peu d'ordre dans le zoo des particules...

| Particules élémentaires de matière :<br>fermions de spin 1/2                                                                                                                                                                     |              | 2 grandes classes                               |          |                                              |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------------|----------|----------------------------------------------|------|
|                                                                                                                                                                                                                                  |              | Leptons<br>Insensibles à<br>l'interaction forte |          | Quarks<br>Sensibles à<br>l'interaction forte |      |
| 3 familles (?)                                                                                                                                                                                                                   |              | $\nu_e$                                         | $e^-$    | $u$                                          | $d$  |
|                                                                                                                                                                                                                                  |              | $\nu_\mu$                                       | $\mu^-$  | $c$                                          | $s$  |
|                                                                                                                                                                                                                                  |              | $\nu_\tau$                                      | $\tau^-$ | $t$                                          | $b$  |
| charges<br>additives<br>conservées                                                                                                                                                                                               | électrique Q | 0                                               | -1       | +2/3                                         | -1/3 |
|                                                                                                                                                                                                                                  | leptonique L | 1                                               | 1        | 0                                            | 0    |
|                                                                                                                                                                                                                                  | baryonique B | 0                                               | 0        | 1/3                                          | 1/3  |
| Les quarks s'assemblent pour former deux types de <b>hadrons</b> :<br>- <b>baryons</b> (trois quarks) - exemples : proton ( $uud$ ), neutron ( $udd$ )<br>- <b>mésons</b> (paire quark-antiquark) - exemple : $\pi^+ = u\bar{d}$ |              |                                                 |          |                                              |      |



Deux grandes classes de particules élémentaires :

- Quarks :  
particules élémentaires sensibles aux **interaction fortes**
- Leptons :  
particules élémentaires insensibles aux interactions fortes

L'interaction **électromagnétique** concerne les particules portant une charge électrique

**Toutes** les particules sont sensibles à **l'interaction faible**

Seule l'interaction **faible** peut transformer la nature des particules :

- lepton chargé  $\leftrightarrow$  neutrino correspondant
- quark de charge  $2/3 \leftrightarrow$  quark de charge  $-1/3$

## Vocabulaire :

- Hadrons :

- particules constituées de quarks, les seules sensibles aux interactions fortes

- Diverses sortes de hadrons :

- **Baryons**, composés de 3 quarks

proton = uud ; neutron = udd ;

$\Lambda^0 = uds$  ;  $\Omega^- = sss$  ;...

- **Mésons**, composés d'une paire quark-antiquark

pions :  $\pi^+ = u\bar{d}$  ;  $\pi^- = \bar{u}d$  ;

kaons :  $K^+ = u\bar{s}$  ;  $K^0 = \bar{s}d$  ;...

- **Tétraquarks**, composés de deux paires quark-antiquark

$c\bar{c}c\bar{c}$ ,  $c\bar{u}c\bar{u}$ ,  $cc\bar{u}\bar{u}$ ,  $cc\bar{u}\bar{d}$

- **Pentaquarks**, composés de quatre quarks et d'un antiquark

$uudc\bar{c}$

- **États liés de gluons (« glue balls »)** : encore hypothétiques, mais plusieurs particules candidates observées

## Stabilité des particules

Les seules particules stables sont :

- l'électron, le proton, et les neutrinos
- le neutron est stable dans certains noyaux  
(noyau = état lié de protons et de neutrons)

Les autres particules sont suffisamment massives pour se désintégrer en d'autres particules tout en respectant les lois de conservation...

| Masse des particules en MeV/c <sup>2</sup> |       |                |                    |   |        |   |      |
|--------------------------------------------|-------|----------------|--------------------|---|--------|---|------|
| e <sup>-</sup>                             | 0.511 | ν <sub>e</sub> | < 10 <sup>-6</sup> | u | 2      | d | 5    |
| μ <sup>-</sup>                             | 106   | ν <sub>μ</sub> |                    | c | 1275   | s | 95   |
| τ <sup>-</sup>                             | 1777  | ν <sub>τ</sub> |                    | t | 173500 | b | 4200 |

plus de 10 ordres de grandeur !

## **C - Lois de conservation**

Lors d'une interaction entre particules ou lors d'une désintégration, sont conservés :

- L'énergie et la quantité de mouvement  
et donc aussi la masse invariante du système
- Le moment cinétique total
- Toutes les charges additives :  
(charge additive d'un système = somme des charges des constituants) :
  - La charge électrique
  - La charge baryonique
  - La charge leptonique

## D - Dynamique des processus élémentaires

### 1) Évolution d'un système

Système décrit par  $H = H_0$  (indépendant du temps) +  $H_1(t)$  (perturbation pour  $t \geq 0$ )

Valeurs et vecteurs propres de l'hamiltonien non perturbé :  $H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$

On cherche :  $P_{n \rightarrow m}(t) = \left| \langle m | \psi(t) \rangle \right|^2$  avec 
$$\begin{cases} \psi(t) = \sum_k a_k(t) \exp(-iE_k t / \hbar) |k\rangle \\ \psi(0) = |n\rangle \end{cases}$$

Cette définition des coefficients  $a_k(t)$  permet d'avoir  $a_k(t) = \text{constante}$  si  $H_1(t) = 0$  comme on le voit dans les calculs qui suivent.

Équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = i\hbar \sum_k (\dot{a}_k - i \frac{E_k}{\hbar} a_k) \exp\left(-i \frac{E_k t}{\hbar}\right) |k\rangle = \sum_k a_k \exp\left(-i \frac{E_k t}{\hbar}\right) (H_0 + H_1) |k\rangle$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \sum_k \dot{a}_k \exp\left(-i \frac{E_k t}{\hbar}\right) |k\rangle = \sum_k a_k \exp\left(-i \frac{E_k t}{\hbar}\right) H_1 |k\rangle$$

On multiplie l'égalité par  $\langle m|$  ; on obtient :

$$i\hbar \dot{a}_m = \sum_k a_k \exp\left(-i \frac{(E_k - E_m)t}{\hbar}\right) \langle m|H_1|k\rangle \quad (1)$$

Si  $H_1(t) = 0$ , on trouve bien  $\dot{a}_m = 0$ .

Méthode des perturbations :

On suppose  $|H_1 / H_0| \ll 1$  et on pose  $H_1 = \lambda W_1$  avec  $\lambda \ll 1$  et  $|W_1| \sim |H_0|$ .

On cherche alors les coefficients  $a_k(t)$  sous la forme :

$$a_k(t) = a_k^0(t) + \lambda a_k^1(t) + \lambda^2 a_k^2(t) + \dots$$

La fonction d'onde est une fonction continue du temps, on doit donc avoir :

Condition initiale :

$a_k(0) = \delta_{k,n}$  quelle que soit la valeur de  $\lambda$ , et donc :

$$a_k^r(0) = 0 \text{ si } r \geq 1.$$

On reporte le développement en puissance de  $\lambda$  dans l'équation (1) et on égale les termes de même ordre en  $\lambda$ , en allant jusqu'au premier ordre :

**Ordre 0 :**

$$i\hbar \dot{a}_m^0(t) = 0$$

En conséquence, à cause de la condition initiale :  $a_m^0(t) = 0$  si  $m \neq n$ .

**Ordre 1 :**

$$i\hbar\left(\lambda\dot{a}_m^1(t)\right)=\sum_k a_k^0(t)\exp\left(-i\frac{(E_k-E_m)t}{\hbar}\right)\langle m|\lambda W_1|k\rangle$$

On s'intéresse aux transitions du système vers un état différent de l'état initial  $m \neq n$  :

$$\begin{aligned} i\hbar\lambda\dot{a}_{m\neq n}^1(t) &= \sum_k a_k^0(t)\exp\left(-i(E_k-E_m)t/\hbar\right)\langle m|H_1|k\rangle \\ &= \exp\left(-i(E_n-E_m)t/\hbar\right)\langle m|H_1|n\rangle \quad (\text{car } a_m^0(t)=0 \text{ si } m \neq n) \\ \Rightarrow \lambda a_{m\neq n}^1(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \exp\left(-i(E_n-E_m)t/\hbar\right)\langle m|H_1|n\rangle dt \\ &(\text{constante d'intégration nulle car } a_k^r(0)=0 \text{ si } r \geq 1) \end{aligned}$$

**On ne peut aller plus loin sans hypothèses sur  $H_1$**



Si  $H_1$  est indépendant du temps :

$$\lambda a_{m \neq n}^1(t) = \frac{1}{i\hbar} \langle m | H_1 | n \rangle \frac{\exp(-i(E_n - E_m)t / \hbar) - 1}{(-i(E_n - E_m) / \hbar)}$$

$$P_{n \rightarrow m}(t) = |\lambda a_m^1(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |\langle m | H_1 | n \rangle|^2 \frac{\sin^2(E_m - E_n)t / 2\hbar}{((E_m - E_n) / 2\hbar)^2}$$

*Partie cachée hors programme.*

## 2) Désintégration d'un système instable

$$P_{n \rightarrow \bullet}(t) = \sum_m \frac{1}{\hbar^2} |\langle m | H_1 | n \rangle|^2 \frac{\sin^2 \left[ (E_m - E_n) t / 2\hbar \right]}{\left( (E_m - E_n) / 2\hbar \right)^2}$$

**Taux de transition :**

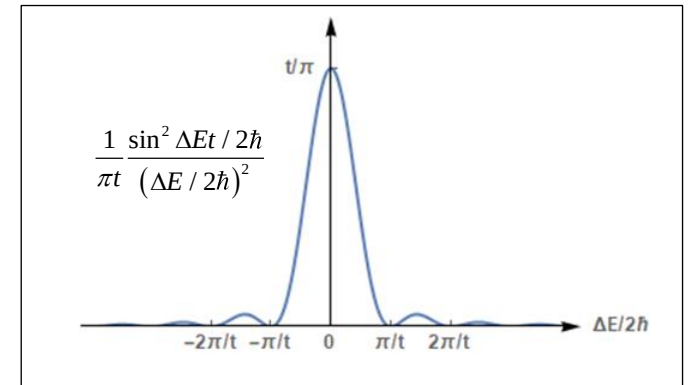
$$\Gamma = \frac{P_{n \rightarrow \bullet}(t)}{t} = \sum_m \frac{1}{\hbar^2} |\langle m | H_1 | n \rangle|^2 \frac{1}{t} \frac{\sin^2 \left[ (E_m - E_n) t / 2\hbar \right]}{\left( (E_m - E_n) / 2\hbar \right)^2}$$

$$\Gamma \simeq \sum_m \frac{1}{\hbar} |\langle m | H_1 | n \rangle|^2 2\pi \delta(E_m - E_n)$$

**on utilise :**  $\frac{1}{a} \frac{\sin^2(x/a)}{\pi(x/a)^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \delta(x)$

**en supposant**  $2\hbar / (E_m - E_n) t \ll 1$  :

$x = (E_m - E_n)$  **et**  $a = (2\hbar / t)$



**On passe à la limite continue :**  $\Gamma = \int \frac{1}{\hbar} \left| \langle m | H_1 | n \rangle \right|^2 2\pi \delta(E_m - E_n) \frac{dN}{dE} dE$

On suppose que  $\left| \langle m | H_1 | n \rangle \right|^2$  est le même pour tous les états  $|m\rangle (E_m = E_n)$

**On obtient la règle d'or de Fermi :**

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m, E_m = E_n | H_1 | n \rangle \right|^2 \rho(E_n) := 1/\tau$$

*Partie cachée hors programme*

*partie cachée hors programme*

### 3) Loi de désintégration exponentielle

- On observe que la désintégration d'une particule ou d'un noyau instable (dans le cas d'une source radioactive) a la probabilité  $\Gamma dt$  de se produire pendant une durée  $dt$  infinitésimale, où  $\Gamma$  est indépendant de  $t$ .
- Alors, si la source est présente à  $t = 0$ , la probabilité  $P(t)dt$  qu'elle se désintègre entre  $t$  et  $t+dt$  est égale au produit de la probabilité qu'elle ne se soit pas désintégrée avant par la probabilité qu'elle se désintègre dans l'intervalle de temps  $dt$  suivant :

$$P(t)dt = \left(1 - \int_0^t P(u)du\right) \times \Gamma dt \Rightarrow P(t) = \Gamma e^{-\Gamma t} \text{ (pour avoir : } \int_0^\infty P(t)dt = 1)$$

- La durée de vie moyenne (« temps de vie ») est alors :  $\tau = \langle t \rangle = \int_0^\infty tP(t)dt = 1/\Gamma$
- Évolution du nombre de particules :  $dN = -N \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \boxed{N(t) = N_0 e^{-t/\tau}}$

#### 4) Distribution de Breit-Wigner

Soit une particule instable de temps de vie  $\tau = 1/\Gamma$  créée à l'instant  $t = 0$ .

La probabilité de présence à l'instant  $t$  est  $\exp(-\Gamma t)$ .

Plus généralement, un système stable d'énergie  $E_0$  est décrit par une fonction d'onde  $\psi(t) = \psi(0)\exp(-iE_0 t)$ .

On peut donc légitimement modéliser un système instable par :

$\psi(t) = \psi(0)\exp(-iE_0 t)\exp(-\Gamma t / 2)$  de sorte que :  $|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 \exp(-\Gamma t)$ .

Alors, en prenant la transformée de Fourier (avec  $\psi(t) = 0$  si  $t < 0$ ) :

$$\mathcal{F}_\psi(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iEt) \psi(t) dt = \frac{i\psi(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

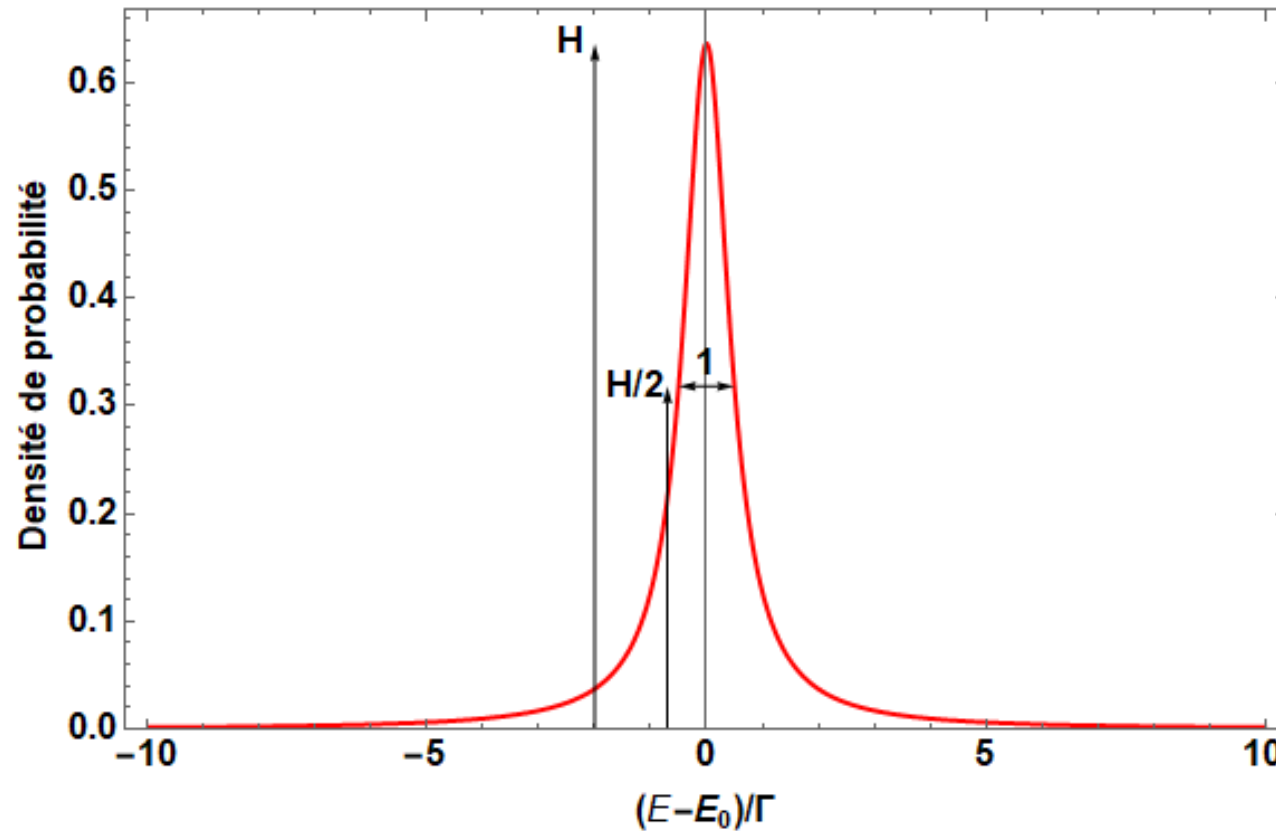
$\psi$  est la superposition d'ondes stables d'énergie  $E$  avec le coefficient

$$\mathcal{F}_\psi(E) / \sqrt{2\pi} : \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iEt) \mathcal{F}_\psi(E) dE$$

La probabilité de mesurer l'énergie  $E$  est  $\propto |\mathcal{F}_\psi(E)|^2 = \frac{|\psi(0)|^2}{2\pi} \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2 / 4}$



C'est une distribution de Breit-Wigner non relativiste :



L'énergie d'un système instable est définie à  $\sim \Gamma$  près.  
( $\Gamma$  est la largeur à mi-hauteur de cette distribution, qui a une variance infinie).

## 5) Section efficace d'interaction

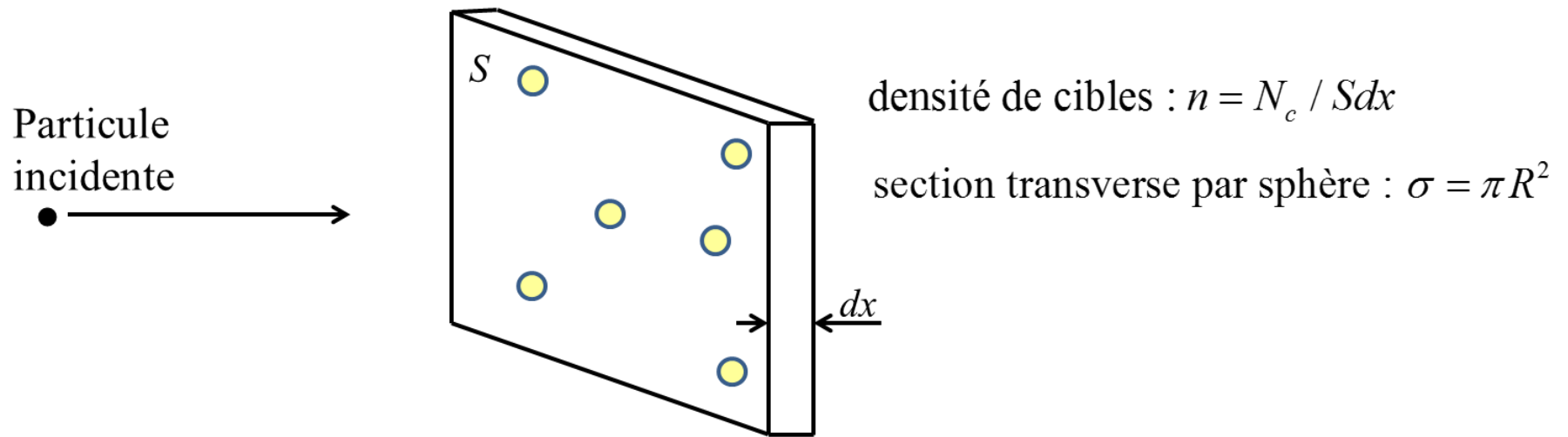
Soit  $N$  particules incidentes sur la surface  $S$  d'un matériau présentant une densité volumique de cibles  $n$ .

Soit  $dN_{\text{int}}$  le nombre de particules qui interagissent sur la distance  $dx$ .

La section efficace d'interaction  $\sigma$  des particules incidentes sur les particules cibles **est définie par** :

$$\begin{array}{ccccccc} dN_{\text{int}} & = & \sigma \times & \frac{N}{S} & \times & n dx S & \Leftrightarrow \boxed{dN_{\text{int}} = \sigma N n dx} \\ \text{nombre d'interactions} & & & \text{nombre de particules} & & \text{nombre de cibles} & \\ & & & \text{incidentes par unité de surface} & & \text{dans l'épaisseur } dx & \end{array}$$

$$\sigma = \frac{\text{nombre d'interactions par cible}}{\text{nombre de particules par unité de surface}} \quad ; \quad \sigma \text{ a la dimension d'une surface}$$



La dénomination « section efficace » vient de l'analogie classique où les particules incidentes sont des points matériels sans interaction à distance arrivant uniformément sur un matériau de surface  $S$  et les particules cibles des sphères de rayon  $R$  (et donc présentant une section  $\sigma = \pi R^2$  orthogonale à la direction des particules incidentes).

La proportion de particules incidentes qui frappent une cible est donnée par le rapport de la surface obstruée par les cibles sur la surface totale:

$$P = \frac{N_{\text{int}}}{N} = \frac{N_c \pi R^2}{S} = \frac{n S dx \pi R^2}{S} = \sigma n dx$$

- Le nombre  $N$  de particules du faisceau incident n'ayant **pas** interagi varie donc comme :

$$dN = -dN_{\text{int}} = -N\sigma ndx \Rightarrow N = N_0 \exp(-n\sigma x) = N_0 \exp(-x/\lambda) \quad \text{soit :}$$

$$dN = -N \frac{dx}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \boxed{\lambda = \frac{1}{n\sigma}} : \text{longueur d'interaction ou libre parcours moyen}$$

Démonstrations :

- Soit  $P(x)dx$  la probabilité qu'une particule interagisse en  $x$  et  $x+dx$  :

$$P(x)dx = \left(1 - \int_0^x P(u)du\right) \times \frac{dx}{\lambda} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad (\text{pour avoir : } \int_0^\infty P(x)dx = 1)$$

- La longueur moyenne parcourue avant d'interagir est alors :

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty xP(x)dx = \lambda$$

## Section efficace partielle :

- Si plusieurs réactions sont possibles, la section efficace totale est la somme des sections efficaces partielles :

$$\sigma = \sum \sigma_i \text{ et donc : } \frac{1}{\lambda} = \sum \frac{1}{\lambda_i}$$

- Exemple :  $e^- + p \rightarrow e^- + p$  diffusion élastique  $\sigma_e$   
 $e^- + p \rightarrow e^- + \text{autres particules}$  diffusion inélastique  $\sigma_{iné}$
- Lorsque la particule initiale disparaît on parle de section efficace d'absorption et de longueur d'absorption :  $\lambda_{abs} = \frac{1}{n\sigma_{abs}}$

## E - À retenir

- Tableau des interactions
- Tableau des particules élémentaires
- Lois de conservation :  $E, \vec{p}, m, \vec{J}, Q, B, L$
- Règle d'or de Fermi :  $\frac{dP_{n \rightarrow \bullet}(t)}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m, E_m = E_n | H_1 | n \rangle \right|^2 \rho(E_n) := 1/\tau$
- Temps de vie, loi de désintégration exponentielle :  $N = N_0 \exp(-t/\tau)$
- Section efficace d'interaction :  $dN_{\text{int}} = N \sigma n dx$
- Longueur d'interaction ou libre parcours moyen :  $\lambda = 1/\sigma n$

# CHAPITRE 5    Un soupçon de théorie quantique des champs

Dans ce chapitre :

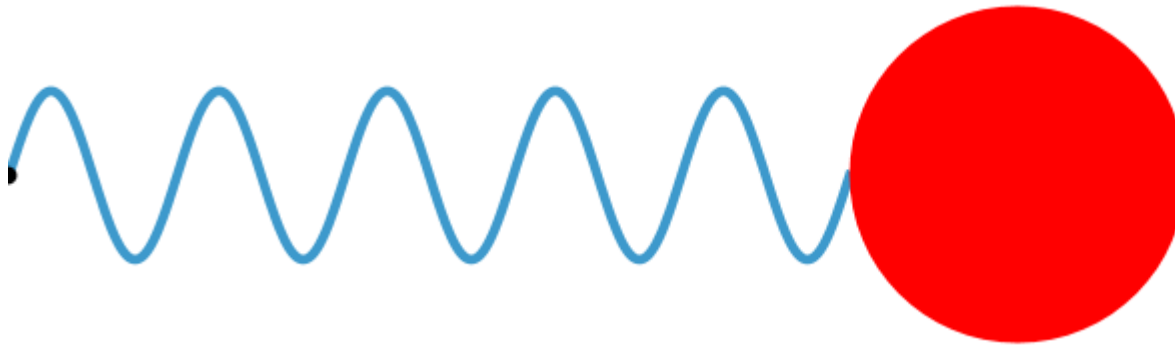
- on introduit « la seconde quantification », la création et l'annihilation de particules dans la formulation des équations ;
- on résout le problème des énergies négatives de l'équation de Dirac ;
- on comprend le lien entre le spin des particules et la statistique à laquelle elles obéissent.

## A - Opérateurs de création et d'annihilation

1) Oscillateur harmonique à une dimension en mécanique quantique

$$\text{Rappel : } H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Oscillateur harmonique classique : masse  $m$  accrochée à un ressort de raideur  $k$



### Solutions classiques

$$x = x(0)\cos \omega t + \dot{x}(0)\sin \omega t / \omega \text{ avec } \omega = \sqrt{k / m}$$

On peut choisir la position et la vitesse initiale de façon arbitraire.



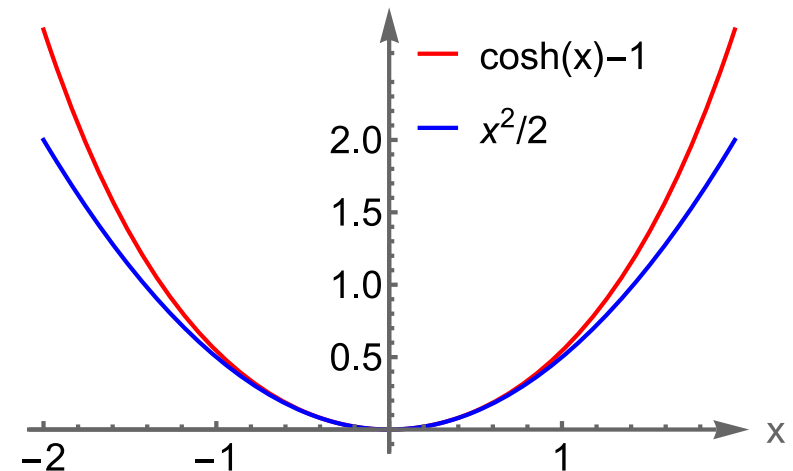
**Remarque :**

**L'étude de l'oscillateur harmonique a une portée universelle.**

Pour tout potentiel continu et dérivable avec un minimum, les **petites perturbations** autour de l'état d'équilibre se traitent comme un oscillateur harmonique :

Si on déclare le potentiel nul au minimum et si on définit la position du minimum par  $x=0$ , on se ramène au potentiel de l'oscillateur harmonique en développant  $V(x)$  :

$$V(x) = V(0) + xV'(0) + \frac{x^2}{2}V''(0) + o(x^2) \simeq \frac{x^2}{2}V''(0)$$



## Rappel des solutions en mécanique quantique

**Recherche des états stationnaires :  $\psi(x,t) = \varphi(x)\exp(-iEt/\hbar)$  avec  $\hat{H}\varphi = E\varphi$**

Valeurs propres :  $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$  ; **noter qu'il n'y a pas d'état d'énergie nulle.**

vecteurs propres :  $\varphi_n(x)$  avec :  $\varphi_0(x) = C\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$

$$X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x ; P = \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}p = -i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\left. \begin{aligned} a^\dagger &= \frac{X - iP}{\sqrt{2}} : \text{opérateur de création } a^\dagger \varphi_n = \sqrt{n+1} \varphi_{n+1} \\ a &= \frac{X + iP}{\sqrt{2}} : \text{opérateur d'annihilation } \begin{cases} a \varphi_{n+1} = \sqrt{n+1} \varphi_n \\ a \varphi_0 = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} [a, a^\dagger] = Id$$

hamiltonien :  $H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$  ; opérateur de comptage :  $a^\dagger a = \widehat{N} : \widehat{N}\varphi_n = n\varphi_n$

## B - Seconde quantification du champ scalaire

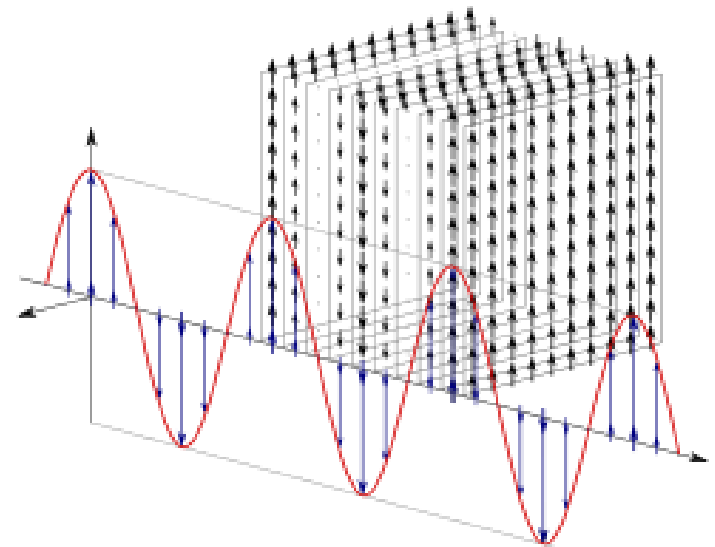
Supposons qu'un système soit décrit par une fonction d'onde **réelle** ou « champ » vérifiant l'équation de K-G :  $-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Delta \psi + m^2 \psi$

Le **champ est dit scalaire** car, si  $x \rightarrow x'$  par transformation de Lorentz, alors  $\psi'(x') = \psi(x)$  est aussi solution de l'équation de K-G dans le nouveau repère (**exercice**).

Les solutions réelles peuvent s'écrire comme une superposition d'ondes planes :

$$\psi = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left( a_{\vec{p}} \exp(-ipx) + a_{\vec{p}}^* \exp(ipx) \right)$$

$$\text{avec } x = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{si } E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$



**Remarque 1 :** On a sans perte de généralité ignoré la possibilité  $E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  car l'intégrale couvre toutes les valeurs de l'impulsion (tous les  $\vec{p}$  et  $-\vec{p}$ ) et en renommant les coefficients on se ramène à la forme donnée : autrement dit, devant les exponentielles contenant  $-i|E|t$  on appelle le coefficient  $a$ , et devant les exponentielles contenant  $+i|E|t$  on prend le coefficient  $a^*$ , ce qui assure que l'expression est réelle.

Détail de la remarque ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 \psi(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left( a_{\vec{p}} \exp(-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})) + \underbrace{a'_{\vec{p}} \exp(-i(-Et - \vec{p} \cdot \vec{x}))}_{\text{solutions d'énergie négative}} \right) = \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} a_{\vec{p}} \exp(-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})) + \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} a'_{\vec{p}} \exp(-i(-Et - \vec{p} \cdot \vec{x})) = \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} a_{\vec{p}} \exp(-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})) + \underbrace{\int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 2E} a'_{\vec{p}'} \exp(i(Et - \vec{p}' \cdot \vec{x}))}_{\text{changement de variable } \vec{p}' = -\vec{p}} = \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left( a_{\vec{p}} \exp(-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})) + \underbrace{a_{\vec{p}}^* \exp(i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x}))}_{\vec{p}' \text{ variable muette et } a'_{\vec{p}'} = a_{\vec{p}}^*} \right)
 \end{aligned}$$

## Remarque 2 :

L'élément d'intégration  $\frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E}$  est invariant par transformation de Lorentz.

En effet :

Une transformation de Lorentz peut être décomposée en une rotation et une transformation spéciale<sup>1</sup>. L'élément d'intégration est invariant par rotation.

Prenant une transformation spéciale suivant l'axe  $x$  de rapidité  $\Omega$ , il vient

$$\begin{cases} p_1 \rightarrow p'_1 = \cosh \Omega p_1 - \sinh \Omega E_1 \\ E_1 \rightarrow E'_1 = \cosh \Omega E_1 - \sinh \Omega p_1 \end{cases}$$

$$E_1^2 - p_1^2 = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = m \sinh \Theta \\ E_1 = m \cosh \Theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E'_1 = m \cosh(\Theta - \Omega) \\ p'_1 = m \sinh(\Theta - \Omega) \end{cases} \Rightarrow \frac{dp'_1}{E'_1} = \frac{dp_1}{E_1} = d\Theta$$

Ce qui montre que l'élément d'intégration est invariant, et donc  $\psi$  est bien scalaire.

---

<sup>1</sup> pour les transformations propres et orthochrones

## SECONDE QUANTIFICATION :

On promeut alors  $\psi$  en opérateur hermitien en remplaçant les coefficients  $a_{\vec{p}}$  et  $a_{\vec{p}}^*$  par les opérateurs  $a_{\vec{p}}$  et leurs adjoints  $a_{\vec{p}}^\dagger$  vérifiant les relations de commutation :

$$\left[ a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}^\dagger \right] = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) Id \quad ; \quad \left[ a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}} \right] = 0 \quad ; \quad \left[ a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{k}}^\dagger \right] = 0$$

Remarque :

Le facteur de normalisation des opérateurs introduits va permettre de retrouver les relations de commutation canoniques entre coordonnées généralisées et leurs conjuguées.

## C - Espace de Fock

**Il faut définir l'espace de Hilbert sur lequel agissent ces opérateurs !**

On suppose dans un premier temps qu'on travaille en volume fini. Alors les impulsions sont quantifiées et on peut les numérotier  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_i, \dots$

**On postule l'existence d'un état « vide » noté  $|0\rangle$ , état ne contenant aucune particule tel que :  $\forall \vec{p}_i \quad a_{\vec{p}_i} |0\rangle = 0$  (et donc  $\langle 0| a_{\vec{p}_i}^\dagger = 0$ )**

**Nota Bene** : ne pas confondre le vecteur nul 0 avec l'état vide  $|0\rangle$   
Le vecteur nul ne correspond à aucun état physique, il a une norme nulle.

On définit les états **normalisés** notés  $|N\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle$  comme les états à  $n_1$  particules d'impulsion  $\vec{p}_1$ ,  $n_2$  particules d'impulsion  $\vec{p}_2, \dots$  **complètement symétriques** par échange de deux particules.

Ces états sont supposés orthogonaux :  $\langle N|M\rangle \neq 0 \Rightarrow N = M$

Exemples :

**Nota bene** : Les arguments des fonctions d'ondes ci-dessous correspondent aux numéros des particules (argument 1 pour la particule 1 etc.), comme si elles étaient distinguables, les indices des impulsions correspondent à la numérotation préalable des impulsions, et non au numéro de la particule ayant cette impulsion.

$$|1,1,0\dots\rangle = \frac{\psi(\vec{p}_1, \vec{p}_2) + \psi(\vec{p}_2, \vec{p}_1)}{\sqrt{2}}$$

$$|1,2,0\dots\rangle = \frac{\psi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_2) + \psi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) + \psi(\vec{p}_2, \vec{p}_2, \vec{p}_1)}{\sqrt{3}}$$

$$|1,1,1,0\dots\rangle = \frac{\psi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) + \psi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_3) + \psi(\vec{p}_3, \vec{p}_2, \vec{p}_1) + \psi(\vec{p}_1, \vec{p}_3, \vec{p}_2) + \psi(\vec{p}_3, \vec{p}_1, \vec{p}_2) + \psi(\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_1)}{\sqrt{6}}$$



L'espace de Hilbert des états, appelé **espace de Fock**, est l'espace engendré par  $|0\rangle$  (aucune particule) et tous les autres états  $|N\rangle$ .

**Les états  $|N\rangle$  forment une base orthonormée** de l'espace de Fock.

Autrement dit :  $\langle n_1, \dots, n_j, \dots | m_1, \dots, m_j, \dots \rangle = \delta_{m_1, n_1} \dots \delta_{m_j, n_j} \dots$

On définit dans cet espace les opérateurs de création  $a_{\vec{p}_j}^\dagger$  et leurs adjoints  $a_{\vec{p}_j}$ , opérateurs d'annihilation par :

$$a_{\vec{p}_j}^\dagger |N\rangle = \sqrt{n_j + 1} |n_1, n_2, \dots, n_j + 1, \dots\rangle \text{ et } a_{\vec{p}_j} |N\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_j} |n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots\rangle & \text{si } n_j > 0 \\ 0 & \text{si } n_j = 0 \end{cases}$$

**L'état « vide »  $|0\rangle$**  est donc tel que :  $\forall \vec{p}_i \quad a_{\vec{p}_i} |0\rangle = 0$  (et donc  $\langle 0 | a_{\vec{p}_i}^\dagger = 0$ )

**Ne pas confondre l'état vide  $|0\rangle$  avec le vecteur nul !**

La représentation matricielle de ces opérateurs pour un  $\vec{p}_j$  donné montre qu'ils sont bien adjoints :

$$a^\dagger : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad a : \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On peut aussi le montrer directement :

- On définit  $a_{\vec{p}_j}^\dagger |n_1, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_j + 1} |n_1, \dots, n_j + 1, \dots\rangle$
- On remarque que  $Id = \sum_{m_1, \dots, m_j, \dots} |m_1, \dots, m_j, \dots\rangle \langle m_1, \dots, m_j, \dots|$
- On calcule :

$$\begin{aligned}
 a_{\vec{p}_j} |n_1, \dots, n_j, \dots\rangle &= \sum_{m_1, \dots, m_j, \dots} |m_1, \dots, m_j, \dots\rangle \langle m_1, \dots, m_j, \dots | a_{\vec{p}_j} |n_1, \dots, n_j, \dots\rangle \\
 &= \sum_{m_1, \dots, m_j, \dots} |m_1, \dots, m_j, \dots\rangle \sqrt{m_j + 1} \langle m_1, \dots, m_j + 1, \dots | n_1, \dots, n_j, \dots\rangle \\
 &= \sum_{m_1, \dots, m_j, \dots} |m_1, \dots, m_j, \dots\rangle \sqrt{m_j + 1} \delta_{m_1, n_1} \dots \delta_{m_j + 1, n_j} \dots = \begin{cases} 0 & \text{si } n_j = 0 \\ \sqrt{n_j} |n_1, \dots, n_j - 1, \dots\rangle & \text{si } n_j > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

CQFD

Par construction on a :  $\left[ a_{\vec{p}_i}^-, a_{\vec{p}_j}^{\dagger} \right] = \delta_{ij} Id$  ;  $\left[ a_{\vec{p}_i}^-, a_{\vec{p}_j}^- \right] = 0$  ;  $\left[ a_{\vec{p}_i}^{\dagger}, a_{\vec{p}_j}^{\dagger} \right] = 0$

Le principe de symétrisation de Pauli est satisfait grâce aux deux dernières égalités.

Les opérateurs ainsi introduits sont similaires aux opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique.

En particulier l'opérateur  $a_{\vec{p}_j}^{\dagger} a_{\vec{p}_j}^-$  compte le nombre de particules d'impulsion  $\vec{p}_j$  :

$$a_{\vec{p}_j}^{\dagger} a_{\vec{p}_j}^- |N\rangle = n_j |N\rangle$$

Quand on passe à la limite continue sur les impulsions (ou  $V \rightarrow \infty$ ), les opérateurs sont renormalisés de façon à avoir la relation de commutation :

$$\left[ a_{\vec{p}}^-, a_{\vec{k}}^{\dagger} \right] = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) Id$$

## Passage à la limite continue en mécanique quantique relativiste

Si on pose  $|\vec{p}\rangle = a^\dagger(\vec{p})|0\rangle$ , on veut que la relation de fermeture dans l'espace des états à une particule  $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = Id$  soit vérifiée (et invariante de Lorentz) :

Si on impose  $[a^\dagger(\vec{p}), a(\vec{k})] = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k})$ , on obtient :

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = Id \quad \text{car pour tout } \vec{k} :$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\vec{k}\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} |\vec{p}\rangle\langle 0| a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} |\vec{p}\rangle\langle 0| [a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{k})] |0\rangle |\vec{k}\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} |\vec{p}\rangle\langle 0| (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) |0\rangle |\vec{k}\rangle = |\vec{k}\rangle \end{aligned}$$

Remarque : le facteur  $(2\pi)^3$  sera utile pour exploiter la relation :

$$\int d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{k})\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{k})$$

## Seconde quantification

On interprète les opérateurs  $a_{\vec{p}}^{\dagger}$  et  $a_{\vec{p}}$  comme des opérateurs de création et d'annihilation de particules d'impulsion  $\vec{p}$ .

Toutes les observables pourront s'exprimer en fonction des  $a_{\vec{p}}^{\dagger}$  et  $a_{\vec{p}}$ .

En théorie des champs, on adopte **la représentation en interaction** : les états du système ET les opérateurs évoluent dans le temps.

Comme on se place dans le cadre de la relativité (restreinte), les coordonnées d'espace et de temps doivent jouer le même rôle : ce sont des paramètres de la théorie.

**Les opérateurs sont des fonctions des coordonnées d'espace-temps.**

Il s'agit donc maintenant de retrouver les équations du mouvement du champ d'opérateurs  $\psi(\vec{x}, t)$  à partir du **principe de moindre action généralisé** dans le cadre relativiste, et de **définir l'opérateur hamiltonien** dans ce cadre.

On pourra alors calculer l'énergie des états de l'espace de Fock. On aura une **surprise désagréable...**

**En physique des particules, on utilise le principe de moindre action pour faire apparaître facilement les quantités conservées issues des propriétés d'invariance du lagrangien, ce qui sera fondamental pour la construction du modèle standard.**

## D - Rappel du théorème de Noether

- Principe de moindre action :  $S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{x}_i, \vec{v}_i) dt$  extrémale

→ équations de Lagrange  $\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right)$  → équations du mouvement

Exemple : particule non relativiste dans un potentiel :

$$L(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m v^2 - V(\vec{x}) \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} \Leftrightarrow \frac{d(m\vec{v})}{dt} = -\vec{\nabla} V$$

- À toute invariance de l'action par un groupe de symétrie à un paramètre réel correspond une quantité conservée au cours du mouvement.

Exemple :  $L$  indépendant de  $t$  → conservation de l'énergie au cours du mouvement

$$\frac{dL}{dt} = \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} + \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} \frac{d\vec{x}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \stackrel{\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}}{=} \frac{d}{dt} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot \vec{v}_i \right)$$

$$\Rightarrow H := \sum_i (\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i - L) = \frac{1}{2} m v^2 + V(\vec{x}) = \text{constante, avec : } \vec{v}_i = \frac{d\vec{x}_i}{dt} \text{ et } \vec{p}_i := \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$$



## E - Principe de moindre action généralisé

On généralise le lagrangien quantique dans l'espace-temps relativiste :

lagrangien  $L(\vec{x}, \vec{v}) \rightarrow$  densité de lagrangien  $\mathcal{L}(\psi, \partial_{\mu=0,1,2,3}\psi)$

$$S = \int \mathcal{L} d^4x \text{ extrémal donne : } \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0} \quad (\text{attention, il y a sommation sur l'indice répété})$$

La densité de hamiltonien est donnée par :

$$\mathcal{H} = \pi(x) \partial_0 \psi - \mathcal{L}$$

où  $\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)}$  est la variable conjuguée de la « coordonnée » généralisée  $\psi$ .

On vérifie (voir ci-après) que  $H = \int \mathcal{H} d^3x$  est conservée au cours du mouvement si on suppose que l'action est invariante par translation dans le temps.

**L'étude d'un système passe par la détermination de sa densité de lagrangien.**

## Démonstration des équations de Lagrange généralisées

$$S(\psi, \partial_\mu \psi) = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) d^4 x \text{ extrémal pour } \psi_0$$

Soit :  $\psi(x) = \psi_0(x) + \eta(x)d\varepsilon$  et donc :  $\partial_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi_0(x) + \partial_\mu \eta(x)d\varepsilon$   
avec  $\eta(x) = 0$  partout à la frontière du domaine d'intégration

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\varepsilon} &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\mu \eta \right) d^4 x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \eta - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) \eta \right) d^4 x + \int_{x_1}^{x_2} \cancel{\partial_\mu \left( \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right)} d^4 x \end{aligned}$$

$$dS = 0 \text{ pour toute fonction } \eta(x) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0}$$

## Démonstration de $dH / dt = 0$

On considère la densité de lagrangien  $\mathcal{L}(\psi, \partial_{\mu=0,1,2,3} \psi)$  ne dépendant pas explicitement du temps.

On définit la densité de hamiltonien par :

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L}, \text{ où } \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}.$$

On calcule  $d\mathcal{L}$  pour une variation  $dt$  en utilisant le principe de moindre action généralisé :

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \frac{d(\partial_\mu \psi)}{dt} dt = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) \frac{d\psi}{dt} dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \frac{d(\partial_\mu \psi)}{dt} dt.$$

On isole les termes avec  $\mu = 0$ , on fait apparaître une somme sur  $j = 1, 2, 3$ , on note que  $\frac{d\psi}{dt} = \partial_0 \psi$  et  $\frac{d}{dt}(\partial_\mu \psi) = \partial_0 \partial_\mu \psi$ , et on rassemble les termes deux par deux pour faire apparaître des dérivées de produits.

$$d\mathcal{L} = \left[ \partial_0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi \right) + \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi)} \partial_0 \psi \right) \right] dt.$$

On intègre sur tout l'espace en regroupant les termes pour faire apparaître  $H$  en remarquant que la dérivée totale de  $H$  par rapport à  $t$  est égale à sa dérivée partielle, puisque  $H$  ne dépend que de  $t$  :

$$\frac{dH}{dt} = - \int \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi)} \partial_0 \psi \right) d^3 x.$$

Le terme de droite est une intégrale sur tout l'espace d'une divergence totale. Elle est nulle si on suppose  $\psi$  et ses dérivées nulles à l'infini, ce qui donne le résultat demandé, si on admet qu'on peut changer l'ordre de l'intégration sur l'espace et de la dérivée partielle par rapport au temps.

## F - Relations de commutation à temps égaux

La densité de lagrangien de l'équation de K-G s'écrit :

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2$$

Preuve :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial \psi} = -m^2 \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \psi)} \left[ \sum_{\varepsilon=0}^3 \frac{1}{2} \partial_\varepsilon \psi \sum_{\nu=0}^3 \eta^{\varepsilon\nu} \partial_\nu \psi \right] = \frac{1}{2} \partial^\mu \psi + \frac{1}{2} \partial^\mu \psi = \partial^\mu \psi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \partial_\mu \partial^\mu \psi = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \Delta \psi$$

On obtient finalement avec les équations de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0 \Leftrightarrow \boxed{-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Delta \psi + m^2 \psi}$$

Le moment conjugué de la coordonnée généralisée  $\psi$  est :

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial (\partial_0 \psi)} = \partial^0 \psi$$

Calculons alors le commutateur à **temps égaux** :

$$\left[ \psi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y}) \right] = \dots \text{démonstration ci-dessous} \dots = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

**On obtient ainsi les relations canoniques pour des variables conjuguées :**

Classique :  $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

Quantique :  $\left[ q_i, p_j \right] = i\delta_{ij}$

Champ d'opérateurs :  $\left[ \psi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y}) \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$

C'est ce qui justifie le choix de la normalisation des commutateurs des opérateurs de création et d'annihilation.

## Détail du calcul

$$\begin{aligned}
 [\psi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] &= \left[ \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} (a_{\vec{p}} \exp(-ipx) + a_{\vec{p}}^\dagger \exp(ipx)), \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (-ik_0) (a_{\vec{k}} \exp(-iky) - a_{\vec{k}}^\dagger \exp(iky)) \right] = \\
 &\int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (-ik_0) \times \\
 &\left( \begin{aligned} &\cancel{[a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}]} \exp(-i(px + ky)) - \cancel{[a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{k}}^\dagger]} \exp(i(px + ky)) - \underbrace{[a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}^\dagger]}_{(2\pi)^3 2p_0 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})} \exp(-i(px - ky)) + \underbrace{[a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{k}}]}_{-(2\pi)^3 2p_0 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})} \exp(i(px - ky)) \end{aligned} \right) \\
 &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{((2\pi)^3 2p_0)^2} (-ip_0) \left( -(2p_0)(2\pi)^3 \exp(-ip(x - y)) - (2p_0)(2\pi)^3 \exp(ip(x - y)) \right) \\
 &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2} i (\exp(-ip(x - y)) + \exp(ip(x - y))) = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad \boxed{\text{car } x_0 = y_0 = t}
 \end{aligned}$$

pour cette dernière égalité on a utilisé la représentation de la distribution de Dirac :  $\int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \exp(i \vec{p} \vec{x}) = \delta^3(\vec{x})$

## Rappel : justification des relations canoniques

Théorème d'Ehrenfest :

Calculons pour toute observable

$$\begin{aligned}\frac{d\langle A \rangle}{dt} &= \frac{d}{dt} \int \bar{\psi} \hat{A} \psi d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{\psi} \hat{A} \psi d\tau = \int \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \hat{A} \psi + \bar{\psi} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi + \bar{\psi} \hat{A} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\tau = \\ &= \int \left( \frac{i}{\hbar} \bar{\psi} H^\dagger \hat{A} \psi + \bar{\psi} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi - \frac{i}{\hbar} \bar{\psi} \hat{A} H \psi \right) d\tau = \int \left( \frac{i}{\hbar} \bar{\psi} H \hat{A} \psi + \bar{\psi} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi - \frac{i}{\hbar} \bar{\psi} \hat{A} H \psi \right) d\tau \\ &= \int \bar{\psi} \left( \frac{i}{\hbar} [H, \hat{A}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right) \psi d\tau\end{aligned}$$

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} [A, H] \right\rangle$$



On retrouve la mécanique classique analytique :  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}$   
 (  $f$  fonction quelconque des coordonnées généralisées)

*à condition d'identifier le crochet de Poisson  
 au commutateur multiplié par  $(-i/\hbar)$  :*

$$\{ \cdot, \cdot \} \Leftrightarrow -\frac{i}{\hbar} [ \cdot, \cdot ]$$

Crochet de Poisson

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right]$$

## Conséquence :

En mécanique analytique avec les coordonnées généralisées  $q_i$  et les impulsions

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \text{ on a :}$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \text{ soit avec les coordonnées usuelles :}$$

$$\Rightarrow [x, p_x] = i\hbar \text{ etc : relations de commutation canoniques}$$

Solution simple possible :  $x \rightarrow x \times ; \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$

**on obtient le principe de correspondance**

*D'autres solutions sont possibles, elles dépendent de la représentation des états par exemple on pourrait écrire des fonctions d'onde dépendant de  $\vec{p}$  et  $t$  :  $\varphi(\vec{p}, t)$*

## G - Hamiltonien de Klein-Gordon

La densité d'hamiltonien de l'équation de K-G s'écrit :

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L}_{KG} = \partial_0 \psi \partial^0 \psi - \mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \left( \partial_0 \psi \partial^0 \psi + \left( \vec{\nabla} \psi \right)^2 + m^2 \psi^2 \right)$$

$$H = \int d^3 x \mathcal{H} = \dots \text{voir calcul ci-dessous} \dots = \int d^3 \vec{p} p_0 \left[ \frac{a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}}{(2\pi)^3 2p_0} + \frac{1}{2} \delta^3(\vec{0}) \right]$$

Appliquons par exemple  $H$  à l'état  $a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$  (**exercice**) :

$$\begin{aligned} H a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle &= \int d^3 \vec{k} k_0 \left[ \frac{a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}}{(2\pi)^3 2k_0} + \frac{1}{2} \delta^3(\vec{0}) \right] a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \int d^3 \vec{k} k_0 \frac{a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}}{(2\pi)^3 2k_0} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle + \int d^3 \vec{k} k_0 \frac{1}{2} \delta^3(\vec{0}) a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \\ &= \int d^3 \vec{k} k_0 \frac{a_{\vec{k}}^\dagger (2\pi)^3 2p_0 \delta^3(\vec{k} - \vec{p})}{(2\pi)^3 2k_0} |0\rangle + \int d^3 \vec{k} k_0 \frac{1}{2} \delta^3(\vec{0}) a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \left( p_0 + \int d^3 \vec{k} \frac{k_0}{2} \delta^3(\vec{0}) \right) a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

On trouve l'énergie de la particule plus un terme infini ( $\delta^3(\vec{0}) = V / (2\pi)^3$ )

Ce terme est aussi égal à l'énergie de l'état vide  $|0\rangle$ .

**On ne peut mesurer les énergies que par rapport à cet état.**

## Démonstration

$$\begin{aligned}
\int d^3\vec{x} \partial_0 \psi \partial^0 \psi &= \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} (-ip_0) \left[ a_{\vec{p}} e^{-ipx} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right] \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (-ik_0) \left[ a_{\vec{k}} e^{-ikx} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right] = \\
\int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (-p_0 k_0) &\left[ a_{\vec{p}} a_{\vec{k}} e^{-i(p+k)x} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger e^{i(p+k)x} - a_{\vec{p}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(p-k)x} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}} e^{i(p-k)x} \right] = \\
\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{1}{2} (-p_0) &\left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} - a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right]
\end{aligned}$$

On a utilisé ci-dessus la représentation de la distribution de Dirac :

$$\int d^3x e^{i\vec{k}\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k})$$

$$\begin{aligned}
\int d^3 \vec{x} (\vec{\nabla} \psi)^2 &= \int d^3 \vec{x} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} (i\vec{p}) \left[ a_{\vec{p}} e^{-ipx} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right] \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (i\vec{k}) \left[ a_{\vec{k}} e^{-ikx} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right] = \\
\int d^3 \vec{x} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (-\vec{p} \cdot \vec{k}) &\left[ a_{\vec{p}} a_{\vec{k}} e^{-i(p+k)x} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger e^{i(p+k)x} - a_{\vec{p}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(p-k)x} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}} e^{i(p-k)x} \right] = \\
\int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{1}{2} \left( \frac{(\vec{p})^2}{p_0} \right) &\left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} \oplus a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger \oplus a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \\
\int d^3 \vec{x} m^2 \psi^2 &= \int d^3 \vec{x} m^2 \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right] \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \left[ a_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right] = \\
\int d^3 \vec{x} m^2 \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} &\left[ a_{\vec{p}} a_{\vec{k}} e^{-i(p+k)x} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger e^{i(p+k)x} + a_{\vec{p}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(p-k)x} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}} e^{i(p-k)x} \right] = \\
\int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{1}{2} \frac{m^2}{p_0} &\left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right]
\end{aligned}$$

Il vient finalement :

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0} \\
 &\left[ \begin{aligned}
 &(-p_0) \left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} - a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] + \\
 &\left( \frac{(\vec{p})^2}{p_0} \right) \left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] + \\
 &\frac{m^2}{p_0} \left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right]
 \end{aligned} \right] \\
 \Rightarrow H &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} p_0 \left[ a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] = \int d^3 \vec{p} p_0 \left[ \frac{a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}}{(2\pi)^3 2p_0} + \frac{1}{2} \delta^3(\vec{0}) \right]
 \end{aligned}$$

## Produit normal

En théorie quantique des champs, on se débarrasse du terme infini en utilisant le produit normal d'opérateurs pour les quantités physiques.

### Définition :

Le produit normal d'un ensemble d'opérateurs bosoniques est le produit des mêmes opérateurs mais en mettant tous les opérateurs de création à gauche des opérateurs d'annihilation.

Il est noté en encadrant l'opérateur avec des « : »

### Exemple :

Le hamiltonien de l'oscillateur harmonique s'écrit

$$:\hat{H}:=\frac{\hbar\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a):=\hbar\omega a^\dagger a$$

Si on calcule  $:\hat{H}:|0\rangle$  pour le champ de Klein-Gordon, le terme infini disparaît, on trouve 0 comme il se doit.

Justification :

Prenons l'exemple de l'oscillateur harmonique.

Avant de passer en opérateurs, on peut quand même définir les quantités complexes :

$$a^* = \frac{X - iP}{\sqrt{2}} ; a = \frac{X + iP}{\sqrt{2}}$$

$$\text{On a encore } H = \hbar\omega(X^2 + P^2) = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^* + a^*a)$$

Mais ici, le produit commute car on a des nombres complexes et rien n'interdit d'écrire :  $H = \hbar\omega a^* a$ .

On peut alors décider de partir de cette expression pour définir l'opérateur hamiltonien, il y a un arbitraire dans le choix de l'ordre des termes dans un produit de nombres complexes qu'on peut exploiter !



## H - Champ de Dirac

### 1) Relations d'anticommutation

On a vu au chapitre 3 que les solutions en onde plane de l'équation de Dirac sont des superpositions des quatre solutions suivantes :

$$\psi_{1,2}(x^\mu) = \begin{pmatrix} u_a \\ \left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m} \right) u_a \end{pmatrix} \exp(-ip_\mu x^\mu) \text{ avec } p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \varepsilon$$

$$\text{et } \psi_{3,4}(x^\mu) = \begin{pmatrix} -\left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m} \right) u_b \\ u_b \end{pmatrix} \exp(-ip_\mu x^\mu) \text{ avec } p_0 = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

$$\text{où : } u_a = \chi_1 \text{ ou } \chi_2 \text{ et } u_b = \Phi_1 \text{ ou } \Phi_2 \text{ avec } \chi_1 = \Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \chi_2 = \Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On notera aussi que

$$\psi_{3,4}(x^\mu) = \begin{pmatrix} \left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m} \right) u_b \\ u_b \end{pmatrix} \exp(ip_\mu x^\mu) \text{ est solution}$$

si on prend  $p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

Dans toute la suite on notera exclusivement  $p_0$  la quantité  $+\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

On pose alors :

$$\begin{aligned}
 u^1(\vec{p}) &= \sqrt{p_0 + m} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p_0 + m} \right) \chi_1 \end{pmatrix} ; u^2(\vec{p}) = \sqrt{p_0 + m} \begin{pmatrix} \chi_2 \\ \left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p_0 + m} \right) \chi_2 \end{pmatrix} \quad \text{solutions d'énergie positive} \\
 v^1(\vec{p}) &= \sqrt{p_0 + m} \begin{pmatrix} \left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p_0 + m} \right) \Phi_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix} ; v^2(\vec{p}) = \sqrt{p_0 + m} \begin{pmatrix} \left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p_0 + m} \right) \Phi_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{solutions d'énergie négative} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{noter le changement de signe sur } \vec{p}}
 \end{aligned}$$

On a introduit un facteur additionnel de normalisation ( $\sqrt{p_0 + m}$ ) qui permet d'avoir les identités (**exercice**) :

$$u^{i\dagger}(\vec{p}) u^j(\vec{p}) = 2p_0 \delta_{ij} ; v^{i\dagger}(\vec{p}) v^j(\vec{p}) = 2p_0 \delta_{ij} ; u^{i\dagger}(\vec{p}) v^j(-\vec{p}) = 0$$

appelées « relations d'orthogonalité sur les spineurs »

Les indices 1,2 repèrent l'état de spin pour  $\vec{p} // \vec{e}_z$  (**exercice**).

**Montrons par exemple que  $\psi_4$  correspond à une solution d'énergie négative.**

Le hamiltonien de Dirac est donné par l'équation de Dirac :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \psi = H \psi$$

Calculons  $H\psi_4$  pour  $\vec{p} = \vec{0}$ , en se souvenant que  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  :

Pour  $\vec{p} = \vec{0}$  :  $\psi_4 = \sqrt{p_0 + m} \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \exp(ip_0 t)$  donc :

$$H\psi_4 = (0 + \beta m) \psi_4 = \beta m \sqrt{p_0 + m} \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \exp(ip_0 t) = m \sqrt{p_0 + m} \begin{pmatrix} 0 \\ -\Phi_2 \end{pmatrix} \exp(ip_0 t) = -m \psi_4$$

$\psi_4$  est état propre de  $H$  pour la valeur  $(-m)$ .

Retournons aux solutions en ondes planes de l'équation de Dirac :

$$\psi(x^\mu) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i} u^i(\vec{p}) \exp(-ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i}^* v^i(\vec{p}) \exp(ip_\mu x^\mu) \right) \right]$$

est bien solution de l'équation de Dirac avec :

$$p_0 = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} ;$$

et par construction :

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u^{1,2}(\vec{p}) = 0$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) v^{1,2}(\vec{p}) = 0$$

signe + à cause du changement  
 $-p_\mu$  en  $p_\mu$  dans l'exponentielle

**Les constantes  $b_{\vec{p},i}$  et  $d_{\vec{p},i}^*$  sont indépendantes et  $\psi$  n'est pas hermitique**

## Relations d'anticommutation

### Peut-on passer en opérateurs comme pour le champ de K-G ?

**Problème !** la construction de l'espace de Fock ne peut être la même :  
l'équation de Dirac décrit des fermions, qui obéissent au principe de Pauli.

On ne peut pas avoir plus d'une particule dans un état d'impulsion et de spin donné.

**Solution :** on impose des relations d'anticommutation aux opérateurs :

$$\begin{aligned} \left\{ b_{\vec{p},i}^-, b_{\vec{k},j}^{-\dagger} \right\} &= (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ij} Id \quad ; \quad \left\{ b_{\vec{p},i}^-, b_{\vec{k},j}^- \right\} = 0 \quad ; \quad \left\{ b_{\vec{p},i}^{-\dagger}, b_{\vec{k},j}^{-\dagger} \right\} = 0 \\ \left\{ d_{\vec{p},i}^-, d_{\vec{k},j}^{-\dagger} \right\} &= (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ij} Id \quad ; \quad \left\{ d_{\vec{p},i}^-, d_{\vec{k},j}^- \right\} = 0 \quad ; \quad \left\{ d_{\vec{p},i}^{-\dagger}, d_{\vec{k},j}^{-\dagger} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } \left\{ \hat{A}, \hat{B} \right\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$$

Montrons que cela résout le problème :

$$b_{\vec{p}_j}^\dagger |0\rangle = |0, 0, \dots, 1, \dots\rangle$$

$$b_{\vec{p}_j}^\dagger b_{\vec{p}_j}^\dagger |0\rangle = -b_{\vec{p}_j}^\dagger b_{\vec{p}_j}^\dagger |0\rangle = 0$$

Grâce aux relations d'anticommutation.

On ne peut donc obtenir d'état à 2 particules de même impulsion et de même spin.

**Remarque :**

La construction de l'espace de Fock  $\mathcal{F}$  est alors plus subtile qu'avec les bosons.

Pour chaque état (impulsion, spin) fixé, l'espace de Fock  $\mathcal{F}_i$  est à deux dimensions

On choisit la base  $|0\rangle$  (vide),  $|1\rangle$  (état à une particule d'impulsion et de spin correspondant à l'indice  $i$ ).

Dans cette base les opérateurs représentés par les matrices

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{\alpha}_i^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

possèderaient les propriétés requises des opérateurs de création et d'annihilation pour l'état  $i$ .

**N.B. : Ici l'indice  $i$  représente à la fois le spin et l'état propre d'impulsion.**



**Cependant,** l'espace de Fock global est le produit tensoriel des espaces  $\mathcal{F}_i$

Les opérateurs  $\hat{\alpha}_i$  et  $\hat{\alpha}_j$  commutent pour  $i \neq j$ , ce qui est interdit par le principe de Pauli.

Pour respecter le principe de Pauli, les opérateurs de création et d'annihilation ne peuvent donc pas être les  $\hat{\alpha}_i^\dagger$  et  $\hat{\alpha}_i$ .

Leur action dans  $\mathcal{F}$  dépend de l'état d'occupation des autres états.

Il faut introduire un facteur de parité et poser :

$\hat{b}_i^\dagger = \eta \hat{\alpha}_i^\dagger$  avec  $\eta = (-1)^{\sum_{j < i} n_j}$  où  $n_j$  est le nombre d'occupation de l'état  $j$ .

Alors on trouve immédiatement en définissant  $i$  et  $j$  tels que  $j < i$  :

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger = -\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_i^\dagger$$

Exemple :

$$i = 3$$

$$j = 1$$

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger |0, 1, 0, \dots\rangle = \hat{b}_i^\dagger |1, 1, 0, \dots\rangle = |1, 1, 1, \dots\rangle$$

$$\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0, 1, 0, \dots\rangle = \hat{b}_j^\dagger (-|0, 1, 1, \dots\rangle) = -|1, 1, 1, \dots\rangle$$

## XXI. Hamiltonien de Dirac

On vérifie facilement que la densité de lagrangien (**exercice**) :

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \psi^\dagger, \partial_\mu \psi^\dagger) = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

conduit par le principe de moindre action généralisé à l'équation de Dirac.

*Remarques :*

- Comme  $\psi$  n'est pas hermitique,  $\mathcal{L}$  est fonction de  $\psi, \partial_\mu \psi, \psi^\dagger, \partial_\mu \psi^\dagger$
- Ce lagrangien n'est pas hermitique mais  $\mathcal{L}^\dagger - \mathcal{L} = -2i\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$  est une divergence pure et ne contribue pas à l'action

La densité d'hamiltonien s'écrit :

$$\Pi(\psi)\partial_0\psi + \Pi(\psi^\dagger)\partial_0\psi^\dagger - \mathcal{L} = i\psi^\dagger\partial_0\psi$$

( $\mathcal{L}$  s'annule si  $\psi$  vérifie l'équation de Dirac !)

et le hamiltonien :

$$H = \int d^3\vec{x} (i\psi^\dagger\partial_0\psi)$$

Tous calculs faits on trouve :

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} p_0 \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} - d_{\vec{p},i} d_{\vec{p},i}^\dagger \right)$$

## Détail des calculs

$H =$

$$i \int d^3 \vec{x} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i}^\dagger u^{i\dagger}(\vec{p}) \exp(ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i} v^{i\dagger}(\vec{p}) \exp(-ip_\mu x^\mu) \right) \right]$$

$$\times \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (-ik_0) \left[ \sum_{j=1}^2 \left( b_{\vec{k},j} u^j(\vec{k}) \exp(-ik_\mu x^\mu) - d_{\vec{k},j}^\dagger v^j(\vec{k}) \exp(ik_\mu x^\mu) \right) \right]$$

l'intégrale sur  $\vec{x}$  donne une fonction  $\delta$  sur les impulsions et un facteur  $(2\pi)^3$  :

$$= i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 (2p_0)^2} \times$$

$$\left[ \begin{aligned} & (-ip_0) \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger u^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 b_{\vec{p},j} u^j(\vec{p}) + (ip_0) \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i} v^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 d_{\vec{p},j}^\dagger v^j(\vec{p}) \\ & + (ip_0) \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger u^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 d_{-\vec{p},j}^\dagger v^j(-\vec{p}) \exp(2ip_0 t) + (-ip_0) \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i} v^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 b_{-\vec{p},j} u^j(-\vec{p}) \exp(-2ip_0 t) \end{aligned} \right]$$

les relations d'orthogonalité sur les spineurs donnent un facteur  $2p_0$   
et une fonction  $\delta$  sur les spins :

$$= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} p_0 \left[ \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} - \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i} d_{\vec{p},i}^\dagger \right] = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} p_0 \left[ \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} - \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i} d_{\vec{p},i}^\dagger \right]$$

Grâce aux relations d'anticommutation, il vient :

$$H = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} p_0 \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} + d_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},i} \right) - 4 \int d^3 \vec{p} \frac{p_0}{2} \delta^3(\vec{0})$$

**Les antiparticules sont créées par les opérateurs  $d^\dagger$ .**

Elles ont dans ce formalisme une contribution positive à l'énergie, comme il se doit.

**Sans la relation d'anticommutation, il n'en serait pas ainsi.**

**La relation entre le spin et la statistique apparait comme une nécessité si on veut construire une théorie sans masses négatives.**

On retrouve un terme infini qui donne une énergie infinie (négative) à l'état vide.

## I - À retenir

- Équations de Lagrange généralisées :  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0$
- Opérateurs de création et d'annihilation :
  - Relations de commutation pour un boson
 
$$\left[ a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}^\dagger \right] = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) Id \quad ; \quad \left[ a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}} \right] = 0 \quad ; \quad \left[ a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{k}}^\dagger \right] = 0$$
  - Relations d'anticommutation pour un fermion
 
$$\left\{ b_{\vec{p},i}, b_{\vec{k},j}^\dagger \right\} = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ij} Id \quad ; \quad \left\{ b_{\vec{p},i}, b_{\vec{k},j} \right\} = 0 \quad ; \quad \left\{ b_{\vec{p},i}^\dagger, b_{\vec{k},j}^\dagger \right\} = 0$$

$$\left\{ d_{\vec{p},i}, d_{\vec{k},j}^\dagger \right\} = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ij} Id \quad ; \quad \left\{ d_{\vec{p},i}, d_{\vec{k},j} \right\} = 0 \quad ; \quad \left\{ d_{\vec{p},i}^\dagger, d_{\vec{k},j}^\dagger \right\} = 0$$
- Champ scalaire neutre :  $\psi(x^\mu) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \left( a_{\vec{p}} \exp(-ip_\mu x^\mu) + a_{\vec{p}}^\dagger \exp(ip_\mu x^\mu) \right) \right]$
- Hamiltonien de Klein-Gordon :

$$H = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} p_0 a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} p_0 \delta^3(\vec{0})$$

- Champ de Dirac :

$$\psi(x^\mu) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i} u^i(\vec{p}) \exp(-ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i}^\dagger v^i(\vec{p}) \exp(ip_\mu x^\mu) \right) \right]$$

- Relations d'orthogonalité sur les spineurs :

$$u^{i\dagger}(\vec{p}) u^j(\vec{p}) = 2p_0 \delta_{ij} ; v^{i\dagger}(\vec{p}) v^j(\vec{p}) = 2p_0 \delta_{ij} ; u^{i\dagger}(\vec{p}) v^j(-\vec{p}) = 0$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u^{1,2}(\vec{p}) = 0 ; (\gamma^\mu p_\mu + m) v^{1,2}(\vec{p}) = 0$$

- Hamiltonien de Dirac  $\leftrightarrow$  relation spin-statistique  $\leftrightarrow$  énergie positive

$$H = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} p_0 \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} + d_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},i} \right) - 4 \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{p_0}{2} \delta^3(\vec{0})$$



# CHAPITRE 6 Interaction électromagnétique

## A - Équations de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \rightarrow \text{dans le vide : } \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

→ on introduit le quadripotentiel électromagnétique :  $A^\mu = \begin{pmatrix} V \\ \vec{A} \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{array} \right.$

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  inchangés par changement de jauge :  $\left\{ \begin{array}{l} V \rightarrow V' = V + \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \theta \end{array} \right.$

## B - Lagrangien électromagnétique

La force de Lorentz :  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}$

découle du principe de moindre action appliqué au lagrangien :  $L = -m\sqrt{1-v^2} + q\vec{v} \cdot \vec{A} - qV$

(exercice)

Peut-on trouver ce lagrangien par un principe général ?

Dans le cours de théorie des champs, il a été obtenu en construisant le lagrangien à partir de l'hypothèse que l'interaction était représentée par un quadrivecteur ( $\rightarrow S_{\text{int}} = -\kappa \int A_\mu dx^\mu$  pour être invariante par transformation de Lorentz).

Peut-on faire encore plus général ? On va voir que la réponse est oui.

Cela nécessitera d'introduire la notion d'**invariance de jauge « locale »** ...

*Dérivation force de Lorentz cachée*

## C - Conservation de la charge pour les fermions

La densité de lagrangien conduisant à l'équation de Dirac  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$  est explicitement invariante par changement de phase :

$$\psi' = \psi e^{-iq\theta} \Rightarrow \psi'^\dagger = \psi^\dagger e^{+iq\theta} \text{ (invariance de jauge)}$$

ou pour une phase infinitésimale  $d\theta$  :

$$\psi' - \psi = \delta\psi = -iq\psi d\theta \text{ et } \psi'^\dagger - \psi^\dagger = \delta\psi^\dagger = +iq\psi^\dagger d\theta$$

$$\partial_\mu \psi' - \partial_\mu \psi = \delta \partial_\mu \psi = -iq(\partial_\mu \psi) d\theta \text{ et } \partial_\mu \psi'^\dagger - \partial_\mu \psi^\dagger = \delta \partial_\mu \psi^\dagger = +iq(\partial_\mu \psi^\dagger) d\theta$$

Il y a donc une quantité conservée correspondante (Théorème de Noether)

- On écrit l'invariance du lagrangien sous cette transformation :

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \delta \partial_\mu\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\dagger} \delta\psi^\dagger + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^\dagger)} \delta \partial_\mu\psi^\dagger$$

- On utilise les équations de Lagrange, on obtient :

$$\delta\mathcal{L} = -iq d\theta \partial_\mu \left( \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right) \psi - \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^\dagger)} \right) \psi^\dagger \right) = 0 \Rightarrow \partial_\mu \underbrace{(-iq)(\bar{\psi}i\gamma^\mu\psi - 0)}_{j^\mu} = \partial_\mu \underbrace{q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{j^\mu} = \partial_\mu j^\mu = 0$$

On trouve une densité de courant  $j^\mu$  qui vérifie l'équation de continuité.

La charge correspondante est conservée au cours du temps :

$$\text{pour } Q \equiv \int j_0 d^3x \text{ on a } \frac{dQ}{dt} = \int \frac{\partial j_0}{\partial t} d^3x = -\int \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x = 0$$

- On trouve une densité de courant qui vérifie l'équation de continuité et donc la charge correspondante est conservée

## En seconde quantification

**$Q$  est l'opérateur qui donne la charge de l'état sur lequel il est appliqué**

**Regardons en effet d'un peu plus près cet opérateur :**

$$\begin{aligned}
 Q &= \int j^0 d^3 \vec{x} = q \int d^3 \vec{x} \bar{\psi} \gamma^0 \psi = q \int d^3 \vec{x} \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = q \int d^3 \vec{x} \psi^\dagger \psi = \\
 & q \int d^3 \vec{x} \\
 & \left( \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i}^\dagger u^{i\dagger}(\vec{p}) \exp(ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i} v^{i\dagger}(\vec{p}) \exp(-ip_\mu x^\mu) \right) \right] \right. \\
 & \left. \times \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \left[ \sum_{j=1}^2 \left( b_{\vec{k},j} u^j(\vec{k}) \exp(-ik_\mu x^\mu) + d_{\vec{k},j}^\dagger v^j(\vec{k}) \exp(ik_\mu x^\mu) \right) \right] \right)
 \end{aligned}$$

On intervertit l'ordre des intégrations et on développe le produit :

$$\begin{aligned}
Q = q \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 (2p_0)} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \int d^3 \vec{x} \\
\left[ \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger u^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 b_{\vec{k},j} u^j(\vec{k}) \exp(i(p_\mu - k_\mu)x^\mu) \right. \\
+ \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i} v^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 d_{\vec{k},j}^\dagger v^j(\vec{k}) \exp(-i(p_\mu - k_\mu)x^\mu) \\
+ \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger u^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 d_{\vec{k},j}^\dagger v^j(\vec{k}) \exp(i(p_\mu + k_\mu)x^\mu) \\
\left. + \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i} v^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 b_{\vec{k},j} u^j(\vec{k}) \exp(-i(p_\mu + k_\mu)x^\mu) \right]
\end{aligned}$$

Or  $\int \exp(ikx)dx = 2\pi \delta(x)$  donc

l'intégrale sur  $\vec{x}$  donne une fonction  $\delta$  sur les impulsions et un facteur  $(2\pi)^3$  :

$$Q = q \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 (2p_0)^2} \times \left[ \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger u^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 b_{\vec{p},j} u^j(\vec{p}) + \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i} v^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 d_{\vec{p},j}^\dagger v^j(\vec{p}) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger u^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 d_{-\vec{p},j}^\dagger v^j(-\vec{p}) \exp(2ip_0 t) + \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i} v^{i\dagger}(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 b_{-\vec{p},j} u^j(-\vec{p}) \exp(-2ip_0 t) \right]$$

**Les relations d'orthogonalité sur les spineurs** éliminent les termes dépendant du temps, donnent un facteur  $2p_0$  et une fonction  $\delta$  sur les spins :

$$Q = q \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} + \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},i} \right]$$



Grâce aux relations d'anticommutation, il vient :

$$Q = q \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} - d_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},i} \right) + 2q \int d^3 \vec{p} \delta^3(\vec{0})$$

Cet opérateur compte le nombre de particules de type  $b$  dans chaque état de spin moins le nombre de particules de type  $d$  dans chaque état de spin, le tout multiplié par  $q$ , la charge de la particule  $b$ .

Il y a en plus un terme infini qui donne une charge infinie à l'état vide, qu'on ignorera (il disparaît si on utilise le produit normal pour l'opérateur charge).

*Remarque : la normalisation absolue n'est pas fixée, elle le sera lors du calcul explicite de processus.*

## Interprétation

Les particules de type  $b$  et  $d$  vérifient la même équation de Dirac, elles ont la même masse. Si on interprète  $q$  comme la charge des particules  $b$ , les particules  $d$  ont la charge opposée : elles sont leurs antiparticules !

*mais...*

**Encore faut-il justifier que  $q$  est bien relié à la notion de charge !**

C'est l'objet de la section suivante.

## D - Invariance de jauge locale

On souhaite modifier le lagrangien précédent de façon à ce qu'il soit invariant par un **changement de phase dépendant des coordonnées**.

Tel quel, il n'est pas invariant, en effet, soit le changement de jauge :

$$\psi' = \psi e^{-iq\theta(x)} ; \quad \psi'^{\dagger} = \psi^{\dagger} e^{+iq\theta(x)}$$

$$\partial_{\mu}\psi' = (\partial_{\mu}\psi)e^{-iq\theta(x)} - iq\psi(\partial_{\mu}\theta)e^{-iq\theta(x)} ; \quad \partial_{\mu}\psi'^{\dagger} = (\partial_{\mu}\psi^{\dagger})e^{+iq\theta(x)} + iq\psi^{\dagger}(\partial_{\mu}\theta)e^{+iq\theta(x)}$$

Alors :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi \text{ devient :}$$

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi' = (\psi'^{\dagger}e^{+iq\theta(x)})\gamma^0 i\gamma^{\mu} \underbrace{\left( (\partial_{\mu}\psi)e^{-iq\theta(x)} - iq\psi(\partial_{\mu}\theta)e^{-iq\theta(x)} \right)}_{\partial_{\mu}\psi'} - m\bar{\psi}'\psi$$

Il vient :

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}(-iq)\partial_{\mu}\theta)\psi = q(\partial_{\mu}\theta)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi = (\partial_{\mu}\theta)j^{\mu} \neq 0$$

**On peut rétablir l'invariance en introduisant un nouveau champ  $A_\mu(x)$**   
hermitique commutant avec  $\psi$  et  $\psi^\dagger$  et une dérivée covariante :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

Si lors du changement de phase, le champ  $A_\mu$  se transforme par :

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta$$

alors le nouveau lagrangien :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \underbrace{q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{j^\mu} A_\mu$$

est invariant par changement de jauge local.

C'est la somme du lagrangien libre et d'un terme d'**interaction**

## Démonstration

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \text{ avec } D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

$\psi \rightarrow \psi' = \exp(-iq\theta)\psi$ , où  $\theta$  est une fonction des coordonnées d'espace-temps, et  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta$ .

Par transformation de jauge :

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \exp(iq\theta)\bar{\psi}$$

$$\partial_\mu \psi \rightarrow (\partial_\mu \psi)' = \exp(-iq\theta) \partial_\mu \psi - iq \exp(-iq\theta) \psi \partial_\mu \theta.$$

La densité de lagrangien avec la dérivée covariante s'écrit :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m) \psi = \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - q\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - m\bar{\psi} \psi$$

Par transformation de jauge :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= e^{iq\theta} \bar{\psi} i\gamma^\mu (e^{-iq\theta} \partial_\mu \psi - iq e^{-iq\theta} \psi \partial_\mu \theta) - q e^{iq\theta} \bar{\psi} \gamma^\mu e^{-iq\theta} \psi (A_\mu + \partial_\mu \theta) - m e^{iq\theta} \bar{\psi} e^{-iq\theta} \psi \\ &= \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \cancel{q\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \theta} - q\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - \cancel{q\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \theta} - m\bar{\psi} \psi \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

## E - Interaction électromagnétique pour les fermions

On voit qu'un **terme d'interaction** s'est ajouté au lagrangien libre de Dirac :

$$-q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \vec{j} \cdot \vec{A} - \rho V$$

C'est exactement le terme qu'il faut pour décrire l'interaction électromagnétique et obtenir la force de Lorentz (la charge est remplacée par la densité de charge car on est parti d'une densité de lagrangien et non d'un lagrangien).

Enfin, on note que la substitution :  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$  donne la relation :  $\vec{\pi} = \vec{p} - q\vec{A}$  que nous avons adoptée pour le principe de correspondance :

$$(\vec{p} \leftrightarrow -i\vec{\nabla} \Leftrightarrow p^j \leftrightarrow -i\partial_j = -i(D_j - iqA_j) = -iD_j - qA_j = -iD_j + qA^j \Leftrightarrow \vec{p} = \vec{\pi} + q\vec{A})$$

En conclusion, la forme de l'interaction électromagnétique a été obtenue en imposant une invariance de jauge **locale** au lagrangien libre de Dirac.

La transformation de jauge est la multiplication par une phase complexe  $\exp(i\theta)$ . Le groupe de symétrie correspondant est  $U(1)$ .

*Rappel :*

On reconnaît la transformation de jauge du quadrivecteur potentiel bien connue !

$$A_{\mu}' = A_{\mu} + \partial_{\mu} \theta \Leftrightarrow \begin{cases} V' = V + \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \theta \end{cases}$$

Cette transformation laisse invariants les champs électrique et magnétique.

Interaction électromagnétique des bosons.

À faire en exercice.



Interaction électromagnétique des bosons.

À faire en exercice.

Interaction électromagnétique des bosons.

À faire en exercice.

Interaction électromagnétique des bosons.

À faire en exercice.

Interaction électromagnétique des bosons.

À faire en exercice.

Interaction électromagnétique des bosons.

À faire en exercice.

Interaction électromagnétique des bosons.

À faire en exercice.

Interaction électromagnétique des bosons.

À faire en exercice.

Interaction électromagnétique des bosons.

À faire en exercice.



## I - Interaction électromagnétique des bosons

Le lagrangien invariant de jauge local pour les bosons chargé est :

$$\mathcal{L} = \underbrace{\left(\partial_\mu \psi\right)^\dagger \partial^\mu \psi}_{\text{terme cinétique}} \underbrace{-m^2 \psi^\dagger \psi}_{\text{terme de masse}} \underbrace{-A_\mu j^\mu}_{\text{premier terme d'interaction}}$$

$\underbrace{+q^2 A_\mu A^\mu \psi^\dagger \psi}_{\text{deuxième terme d'interaction}}$   
 ce terme n'apparaît pas pour les électrons/positrons car le terme cinétique du lagrangien initial n'est pas le même : il est quadratique dans les dérivées

Avec  $j^\mu = (-iq)\left((\partial^\mu \psi^\dagger)\psi - (\partial^\mu \psi)\psi^\dagger\right)$  quadrivecteur vérifiant l'équation de continuité  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , obtenu par application des équations de Lagrange généralisées (et conséquence du théorème de Noether), interprété comme le quadrivecteur courant des particules représentées par  $\psi$  :  $j^\mu = (\rho, \rho \vec{v})$

Le premier terme d'interaction s'écrit, en posant :  $A^\mu = \begin{pmatrix} V \\ \vec{A} \end{pmatrix}$  :  $-A_\mu j^\mu = \rho \vec{v} \cdot \vec{A} - \rho V$

Soit exactement le terme permettant d'obtenir la force de Lorentz.

**Mais on voit qu'il y a un terme d'interaction supplémentaire.**

**On retrouvera ce terme dans l'interaction entre les bosons  $W^\pm$  et les photons quand on abordera l'interaction faible.**

*Remarque :*

*Ce lagrangien ne contient pas les termes cinétiques pour le photon, qu'il faudra ajouter...*

## J - Propriétés de l'interaction électromagnétique

L'intensité de l'interaction électromagnétique est caractérisée par la charge élémentaire  $e$ .

On verra que dans le calcul des taux d'interaction c'est la quantité  $e^2$  qui apparaît au premier ordre de la série de perturbation. La quantité sans dimension qui caractérise l'interaction électromagnétique s'appelle la constante de structure fine (**exercice**) :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$$

Notons aussi que la transformation de jauge du quadrivecteur potentiel qui ne change pas les champs électrique et magnétique est bien connue !

$$A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu \theta \Leftrightarrow \begin{cases} V' = V + \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \theta \end{cases}$$

## K - Photons

Le lagrangien doit être complété par le terme cinétique pour les photons, vu en théorie des champs classiques :

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \text{ où } F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Ce lagrangien donne l'équation de propagation des photons libres :  $\square A^\mu = 0$ .  
(par les équations de Lagrange généralisées en jauge de Lorentz)

Il est immédiat de vérifier que ce terme est invariant par transformation de jauge locale telle que définie pour  $A^\mu$  :  $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \theta$

## L - Seconde quantification du champ électromagnétique

Le champ  $A^\mu$  représentant les photons, particules qui peuvent elles aussi être créées et annihilées, il doit être représenté à l'aide d'opérateurs de création et d'annihilation.

Cependant, la seconde quantification du champ électromagnétique présente **plusieurs difficultés**.

La plus apparente concerne le **nombre de degrés de liberté** : alors que l'observation montre qu'il n'y a que deux polarisations indépendantes du photon, le quadri-potentiel électromagnétique possède a priori quatre composantes indépendantes. C'est bien sûr l'arbitraire de jauge qui permet d'éliminer deux degrés de liberté, mais cela exige de restreindre le lagrangien naturel des photons libres pour aboutir aux champs physiques qui correspondent aux solutions de l'équation de Maxwell.

## Une deuxième difficulté plus subtile concerne le potentiel scalaire.

Le lagrangien standard :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

ne contient pas de dérivée temporelle de ce potentiel (les termes  $\partial_0 A^0$  disparaissent), ce qui interdit de lui associer un moment conjugué et les relations de commutation correspondantes.

On ne peut donc écrire son équation d'évolution.

On est ainsi amené à partir d'un lagrangien différent et s'assurer par une condition supplémentaire qu'il permet de retrouver les équations de Maxwell.

Notons enfin qu'on ne peut pas quantifier directement les champs électriques et magnétiques directement et leur appliquer le principe de moindre action généralisé, car les équations de Lagrange font apparaître des dérivées du second ordre, alors que les équations de Maxwell concernent des dérivées du premier ordre.

Nous ne détaillons pas la construction du champ d'opérateurs pour le photon.

On obtient ( $\lambda$  désigne la polarisation du photon) :

$$A_\mu = A_\mu^\dagger = \sum_{\vec{p}, \lambda} \left[ a_{\vec{p}, \lambda} e_\mu(\lambda) \exp(-ipx) + a_{\vec{p}, \lambda}^\dagger e_\mu^*(\lambda) \exp(ipx) \right]$$

$$\left[ a_{\vec{p}, \lambda}, a_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger \right] = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\lambda\lambda'} ; \left[ a_{\vec{p}, \lambda}, a_{\vec{p}', \lambda'} \right] = 0 ; \left[ a_{\vec{p}, \lambda}^\dagger, a_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger \right] = 0$$

ou à la limite  $V \rightarrow \infty$  :

$$A_\mu = A_\mu^\dagger = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left[ a_{\vec{p}, \lambda} e_\mu(\lambda) \exp(-ipx) + a_{\vec{p}, \lambda}^\dagger e_\mu^*(\lambda) \exp(ipx) \right]$$

$$\left[ a_{\vec{p}, \lambda}, a_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'} ; \left[ a_{\vec{p}, \lambda}, a_{\vec{p}', \lambda'} \right] = 0 ; \left[ a_{\vec{p}, \lambda}^\dagger, a_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger \right] = 0$$

On voit que  $A_\mu$  est un champ hermitique, **donc** il n'est pas chargé, et le photon est sa propre antiparticule. C'est un champ vectoriel.

**Avec la seconde quantification du champ électromagnétique, on verra que le terme d'interaction des particules chargées avec ce champ s'interprète comme l'échange de photons entre les particules.**

## G - Mécanisme de Higgs simplifié

### 1) Introduction

On considère un boson scalaire chargé décrit par le champ scalaire  $\psi$

La densité de Lagrangien invariante par changement de phase locale qui donne l'évolution du boson et du photon et leur interaction est :

$$\mathcal{L} = \left( \partial_\mu \psi \right)^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi - A_\mu j^\mu - q^2 A_\mu A^\mu \psi^\dagger \psi + \mathcal{L}_\gamma$$

$$\text{avec : } \mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \text{ avec } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

**qui n'a pas de terme de masse pour le photon** (comme il se doit !)



*Rappel :*

Lagrangien de Klein-Gordon d'un boson scalaire neutre :  $\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$

terme de masse :  $\frac{1}{2} m^2 \varphi^2$

On le généralise pour un boson vectoriel quelconque  $B_\mu$  :  $\frac{1}{2} M^2 B_\mu B^\mu$

**Mais on ne peut pas ajouter un terme de masse  $\frac{1}{2} M^2 A_\mu A^\mu$  pour le photon  
sans briser l'invariance de jauge du lagrangien :**

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} M^2 A_\mu A^\mu \rightarrow \frac{1}{2} M^2 A_\mu A^\mu + M^2 A_\mu \partial^\mu \theta + \frac{1}{2} M^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta$$

- Ce n'est pas un problème pour le photon !
- Mais on aura le problème avec l'interaction faible pour les bosons W et Z qui sont massifs...
- ...et en fait on aura un problème même pour les fermions car le groupe de symétrie de jauge de l'interaction faible mélange des fermions de masses différentes !
- On donne ici une version **simplifiée** du **mécanisme de Higgs** du modèle standard permettant de donner une masse aux particules sans briser l'invariance de jauge, qui repose sur la notion de **brisure spontanée de symétrie**.

## XXII. Brisure spontanée de symétrie

On repart du lagrangien libre :  $\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi$

**On remplace le terme de masse  $m^2 \psi^\dagger \psi$  par le potentiel :  $V(\psi, \psi^\dagger) = \mu \psi^\dagger \psi + \lambda (\psi^\dagger \psi)^2$  ( $\lambda > 0$ )**

En posant  $\rho = \psi^\dagger \psi$ ,  $V$  devient une fonction de  $\rho$

Etat fondamental pour  $V$  minimal :

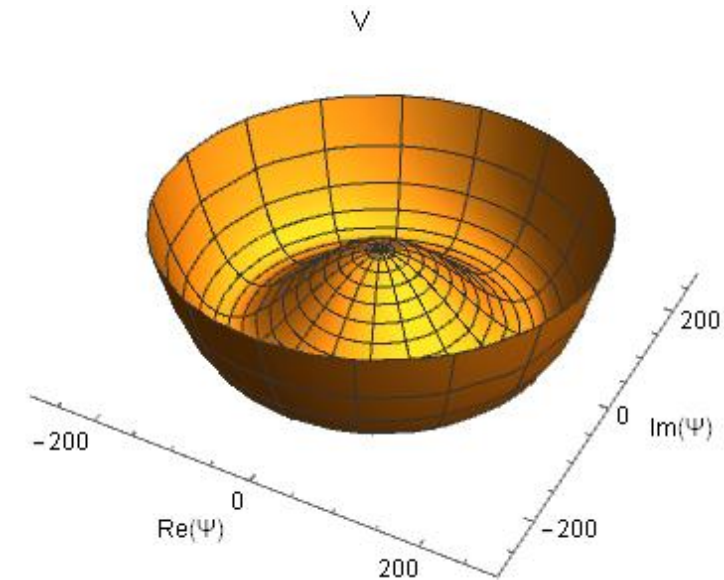
$$\begin{cases} \rho = 0 & \text{si } \mu > 0 \\ \rho = -\mu / 2\lambda & \text{si } \mu < 0 \end{cases}$$

Rappel :  $\mathcal{H} = \left| \partial^0 \psi \right|^2 + \left| \vec{\nabla} \psi \right|^2 + V(\psi^\dagger \psi)$

**On choisit de prendre  $\mu < 0$**

→ infinité d'états d'énergie minimale, un pour chaque valeur de la phase de  $\psi$ .

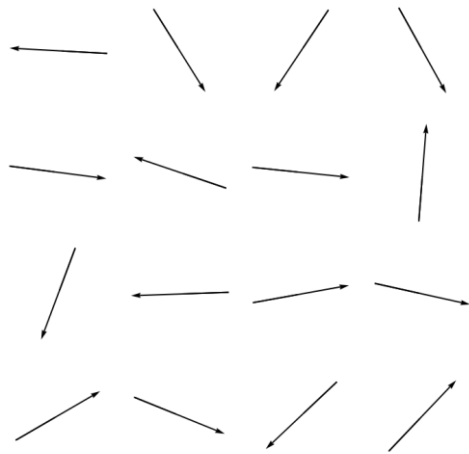
**Aucun ne respecte l'invariance globale du lagrangien : phase fixée**



## On dit qu'il y a brisure spontanée de symétrie.

Situation très courante :

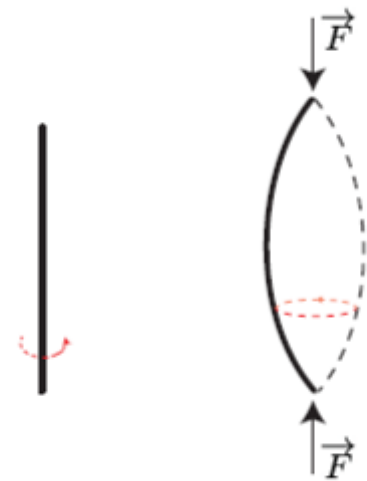
- un matériau ferromagnétique brise l'invariance par rotation puisque son aimantation définit une direction privilégiée
- une barre verticale qui supporte un poids flambe dans une direction donnée, alors que le système est initialement symétrique autour de l'axe vertical.



température > température critique



température < température critique



On définit le « vide » comme un état d'énergie minimale

Avec un tel lagrangien le vide correspond à une valeur non nulle de  $\psi$  :  $\psi_0$

On pose alors  $\psi_0 = v / \sqrt{2} \exp(i\varphi)$  avec  $v = \sqrt{-\mu / \lambda}$

et on réécrit  $\psi$  sous la forme :  $\psi(x) = \frac{v}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} [\xi(x) + i\chi(x)]$ .

### XXIII. Terme de masse pour le photon

On reprend maintenant le lagrangien complet invariant de jauge pour le boson scalaire chargé :

$$\mathcal{L} = \left( \partial_\mu \psi \right)^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi - A_\mu j^\mu - q^2 A_\mu A^\mu \psi^\dagger \psi + \mathcal{L}_\gamma$$

- On remplace le terme de masse par le potentiel de Higgs  $V$
- et **on profite de l'invariance de jauge locale pour imposer  $\psi$  réel**, ceci afin de simplifier l'expression du lagrangien :

On pose donc :  $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta(x)]$  avec  $\eta$  réel.

On développe complètement l'expression de  $\mathcal{L}$  :

$\mathcal{L}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^\dagger \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} \left( \mu (v + \eta)^\dagger (v + \eta) + \frac{\lambda}{2} (v + \eta)^{\dagger 2} (v + \eta)^2 \right) - A_\mu j^\mu - \frac{1}{2} q^2 A_\mu A^\mu (v + \eta)^\dagger (v + \eta) + \mathcal{L}_\gamma \\
&= \mathcal{L}_\gamma + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} \left( -\lambda v^2 (v + \eta)^2 + \frac{\lambda}{2} (v + \eta)^4 \right) - A_\mu j^\mu - \frac{1}{2} q^2 A_\mu A^\mu (v + \eta)^2 \\
&= \mathcal{L}_\gamma + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} \left( -\lambda v^3 - \lambda v^2 \eta^2 - 2\lambda v^3 \eta + \frac{\lambda}{2} (v^4 + 4v^3 \eta + 6v^2 \eta^2 + 4v \eta^3 + \eta^4) \right) \\
&\quad - A_\mu j^\mu - \frac{1}{2} q^2 A_\mu A^\mu (v^2 + 2\eta v + \eta^2) \\
&= \mathcal{L}_\gamma + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{\lambda}{4} \eta^4 - A_\mu j^\mu - \frac{1}{2} q^2 A_\mu A^\mu (2\eta v + \eta^2) - \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} \lambda v^3 - \frac{\lambda}{4} v^4
\end{aligned}$$

Alors la densité de lagrangien s'écrit (à une constante près) :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\gamma + \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \eta^2 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 - \lambda v \eta^3}_{\text{boson scalaire massif}} - A_\mu j^\mu - \frac{1}{2} q^2 A_\mu A^\mu (2v\eta + \eta^2) - \underbrace{\frac{1}{2} (q^2 v^2 A_\mu A^\mu)}_{\text{terme de masse pour le photon}}$$

équivalent du boson de Higgs

On reconnait la somme :

- du lagrangien libre des photons
- d'un lagrangien libre d'une particule  $\eta$  de masse  $\sqrt{2\lambda v^2}$  (deuxième et troisième termes)  
**c'est l'équivalent du boson de Higgs des interactions faibles**
- de termes de potentiel de cette particule (auto interactions) (quatrième et cinquième termes)
- des termes d'interaction électromagnétique (sixième et septième termes)
- et **enfin d'un terme de masse pour le photon avec  $m = qv$**



**En théorie des champs, une particule est une excitation d'un champ d'opérateurs : le boson de Higgs est une excitation du champ de Higgs.**

**Les particules massives acquièrent leur masse par leur interaction avec le champ de Higgs, parce que celui-ci n'est pas nul dans le vide.**

**La masse n'est donc pas une propriété intrinsèque des particules.**

*Remarque :*

*Le degré de liberté  $\chi$  semble avoir disparu.*

*Il n'en est rien, car le photon devenu massif gagne un degré de liberté : une polarisation longitudinale, ou dit autrement il devient un boson massif de spin 1 et donc ayant trois états de spin possibles.*

## XXIV. Masse des fermions

Le groupe de symétrie qui permettra de construire l'interaction faible interdit aussi les termes de masse des fermions de Dirac  $m\bar{\psi}\psi$  dans le lagrangien !

C'est encore le mécanisme de Higgs qui donne une masse aux fermions, et il y a donc un terme d'interaction de la forme :

$\mathcal{L}_I = f\bar{\psi}\psi\Phi$ , où  $\Phi$  est le champ de Higgs (boson scalaire neutre).

La masse du fermion est donnée par  $m = fv$ , où  $v$  est la valeur du champ de Higgs dans le vide.

**Ainsi, le modèle standard s'accommode de la masse des fermions mais ne permet pas d'en prédire la valeur, puisqu'il faut introduire une constante de couplage ad hoc pour chaque fermion.**

**La masse d'un fermion est donc proportionnelle à son couplage au Higgs.**

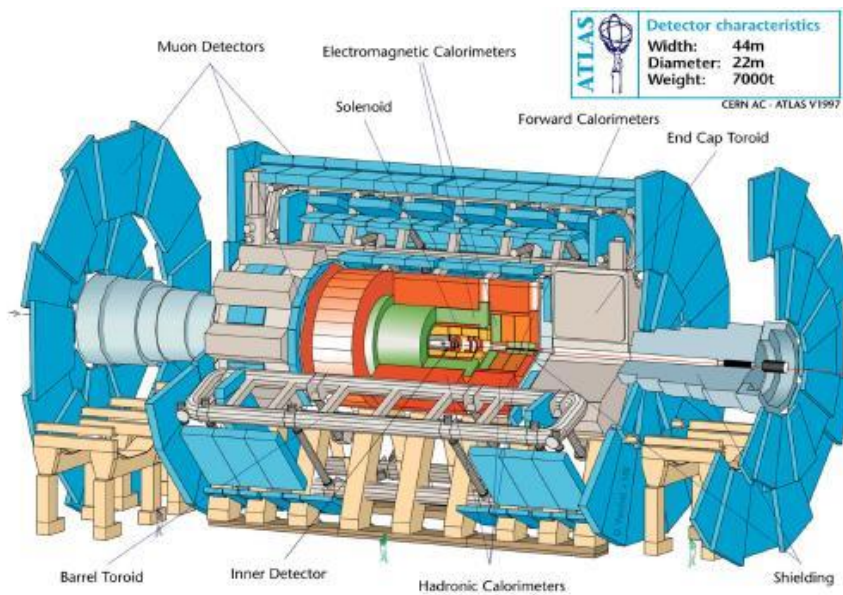
Cette propriété est vérifiée expérimentalement au **LHC** au CERN.

## Vue aérienne du CERN à Genève

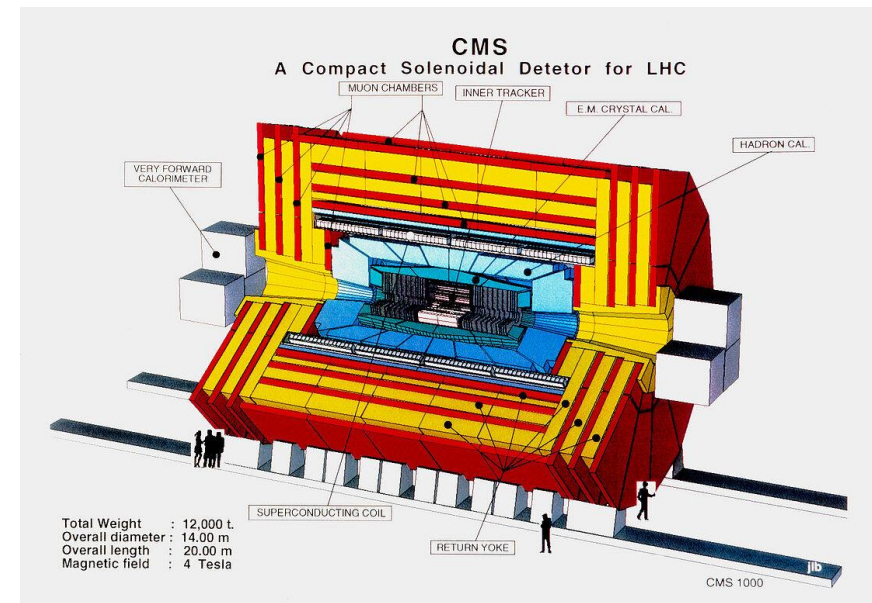




# Les deux expériences qui ont découvert le boson de Higgs



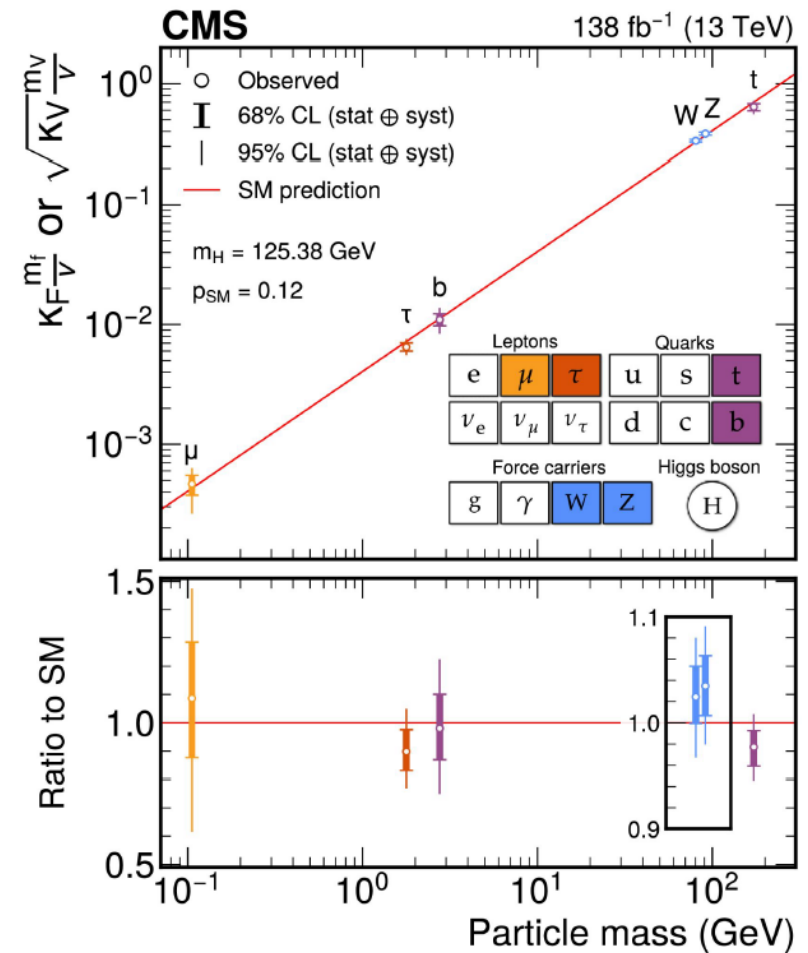
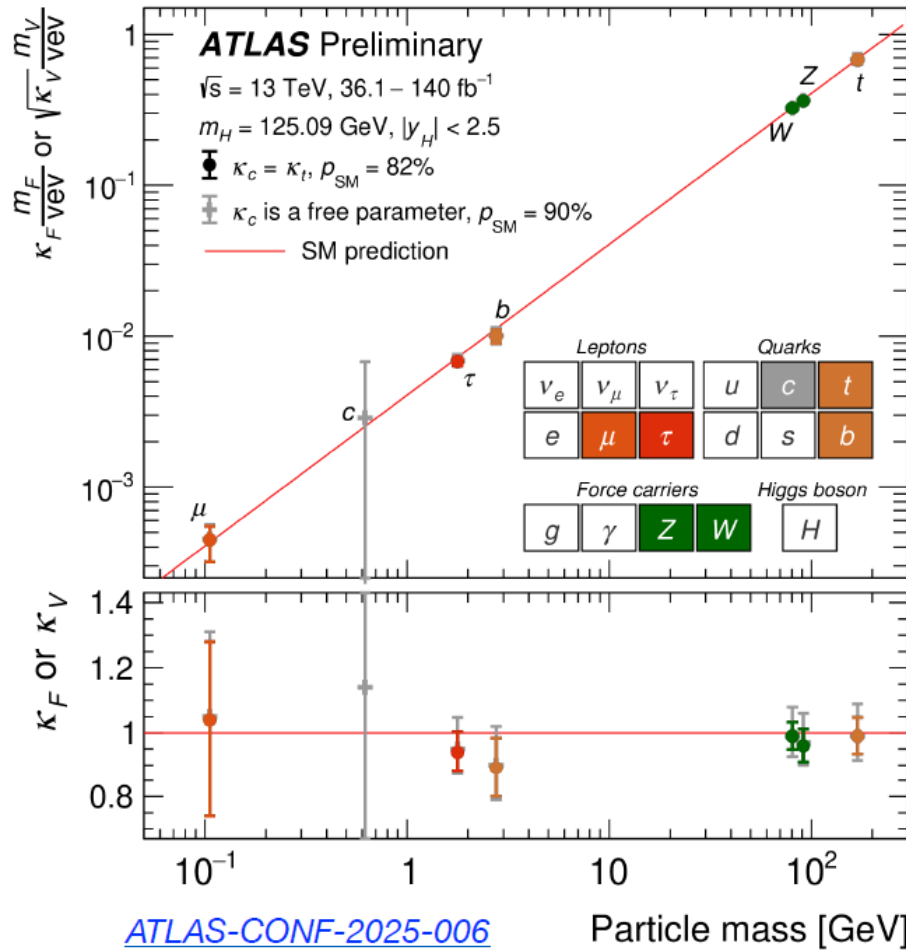
**ATLAS**



**CMS**

**La masse d'un fermion est donc proportionnelle à son couplage au Higgs.**

Cette propriété est vérifiée expérimentalement au **LHC** au CERN:



## H - À retenir

- Notion d'invariance de jauge globale et locale
- Construction de l'interaction électromagnétique :
  - Dérivée covariante :  $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$
  - Transformation de jauge du champ de jauge :  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta$
- Constante de couplage de l'interaction électromagnétique :  $\alpha = 1/137$
- Notion de brisure spontanée de symétrie : principe du mécanisme BEH pour générer la masse des particules tout en préservant l'invariance de jauge du lagrangien

## CHAPITRE 7 Diagrammes de Feynman

Il s'agit dans ce chapitre de montrer comment on passe du formalisme introduit au chapitre précédent au calcul concret de taux de désintégration et de sections efficaces d'interaction.

### A - Représentation en interaction

L'évolution d'un système peut être représentée de différentes façons.

#### - représentation de Schrödinger

Les opérateurs sont indépendants du temps, la fonction d'onde varie

$$i\dot{\psi}_S = H\psi_S \Rightarrow$$

$$\text{si } H \text{ indépendant du temps : } \psi_S(t) = \exp(-iHt)\psi_S(0) \quad = \quad U_S(t,0)\psi_S(0)$$

définition

## - représentation de Heisenberg

Les opérateurs dépendent du temps, pas la fonction d'onde

$$\psi_H = \psi_S(0) = \exp(iHt)\psi_S(t)$$

et on définit pour  $A$  indépendant du temps :

$$A_H(t) = \exp(iHt)A\exp(-iHt) \Rightarrow i\dot{A}_H = [A_H, H] \quad ; \quad H_H = H$$

*Démonstration*

$$\begin{aligned} i\frac{dA_H(t)}{dt} &= i(iH)\exp(iHt)A\exp(-iHt) + i\exp(iHt)A(-iH)\exp(-iHt) \\ &= -HA_H + A_HH \quad (\text{car } H \text{ commute avec } \exp(\pm iHt)) \\ &= [A_H, H] \end{aligned}$$



- **représentation en interaction** :

Un **mixte** des deux représentations précédentes

On décompose le hamiltonien en deux parties :

$$H = H_0 (\text{hamiltonien "libre"}) + H_{\text{int}} (\text{perturbation})$$

On définit :  $\psi_I(t) := \exp(iH_0 t) \psi_S(t) \Rightarrow i\dot{\psi}_I(t) = H_{I\text{int}}(t) \psi_I(t)$

avec  $H_{I\text{int}}(t) := \exp(iH_0 t) H_{\text{int}} \exp(-iH_0 t)$

*Démonstration :*

$$\begin{aligned} i \frac{d\psi_I(t)}{dt} &= i(iH_0) \exp(iH_0 t) \psi_S(t) + \exp(iH_0 t) H_0 \psi_S(t) + \exp(iH_0 t) H_{\text{int}} \psi_S(t) \\ &= -H_0 \psi_I(t) + H_0 \psi_I(t) + \exp(iH_0 t) H_{\text{int}} \exp(-iH_0 t) \exp(iH_0 t) \psi_S(t) = H_{I\text{int}} \psi_I(t) \end{aligned}$$

Noter que si  $H_{\text{int}} = 0$ ,  $\psi_I(t)$  est constant.

On définit pour tout opérateur  $A$  en représentation de Schrödinger sa représentation en interaction par :

$$A_I(t) := \exp(iH_0 t) A \exp(-iH_0 t), \text{ de sorte que :}$$

$$\text{pour tous } \varphi_S \text{ et } \psi_S : \langle \varphi_S | A | \psi_S \rangle = \langle \varphi_I | A_I | \psi_I \rangle$$

Alors :  $i\dot{A}_I(t) = [A_I(t), H_0]$  si  $A$  ne dépend pas du temps. (exo : le démontrer)

**L'évolution des opérateurs est déterminée par le hamiltonien libre.**

Noter que  $H_{0I} = H_0$ .

**La représentation en interaction est introduite pour permettre de calculer l'évolution d'un système en considérant l'interaction comme une petite perturbation du hamiltonien libre, dont on suppose qu'on connaît les états propres.**

C'est dans cette représentation que nous nous placerons dans la suite.

**On pourra alors calculer les taux de désintégration et les probabilités d'interaction par la méthode des perturbations, en développant ces quantités en série et en gardant seulement les premiers termes.**

Les trois paragraphes qui suivent présentent la méthode avant de la mettre en œuvre dans le cas particulier de la désintégration du boson de Higgs en deux fermions.

## B - Série de DYSON

On cherche  $U(t, t_0)$  tel que  $\psi_I(t) = U(t, t_0)\psi_I(t_0)$

$$\text{On a : } i \frac{d\psi_I}{dt} = H_{I \text{ int}} \psi_I(t) \Rightarrow i \frac{dU(t, t_0)}{dt} = H_{I \text{ int}} U(t, t_0)$$

D'où :

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= U(t_0, t_0) - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{I \text{ int}}(t_1) U(t_1, t_0) \\ &= \hat{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{I \text{ int}}(t_1) U(t_1, t_0) \\ &= \hat{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{I \text{ int}}(t_1) \left[ \hat{I} - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{I \text{ int}}(t_2) U(t_2, t_0) \right] \\ &= \hat{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{I \text{ int}}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{I \text{ int}}(t_1) H_{I \text{ int}}(t_2) U(t_2, t_0) \end{aligned}$$

On continue *ad infinitum* pour obtenir la série de Dyson :

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{I \text{ int}}(t_1) H_{I \text{ int}}(t_2) \dots H_{I \text{ int}}(t_n)$$

## Remarque :

Pour un électron en présence d'un champ électromagnétique :

$$\mathcal{H}_0 = i\psi^\dagger \partial_0 \psi \text{ et } \mathcal{H}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.$$

De ce fait la série de Dyson apparait comme une série en puissances de  $e$ .

Comme  $e^2 / 4\pi$  est une quantité petite devant 1 ( $e^2 / 4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137$ ), le premier terme de la série donne déjà une bonne estimation du taux du processus cherché, comme on le verra par la suite.

C'est la raison pour laquelle on appelle ce **développement « perturbatif »**.

$e^2 / 4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137 = \alpha$  s'appelle la **constante de couplage** de l'interaction électromagnétique.

Pour l'interaction forte, cette méthode ne marche pas à basse énergie, car la constante de couplage est alors de l'ordre de 1.

*Produit ordonné en temps – hors programme - masqué*

*Produit ordonné en temps – hors programme - masqué*

## C - Matrice $S$ , matrice $M$

On suppose qu'à  $t \rightarrow -\infty$  et  $t \rightarrow +\infty$   $H_{\text{int}}(t) \rightarrow 0$ .

On définit la **matrice de diffusion** par :  $S = U(-\infty, +\infty)$

L'élément de matrice  $\langle b|S|a \rangle$  donne l'amplitude de probabilité de transition d'un état initial  $a$  vers un état final  $b$ .

On pose :  $S = Id - iT$

*(notation habituelle en théorie de la diffusion qui permet d'obtenir facilement le théorème optique)*

et on définit l'élément de matrice de diffusion  $M_{ba}$  par :

$$\langle b|iT|a \rangle := i(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) M_{ba}$$

On a simplement sorti de la définition de l'élément de matrice la conservation de l'énergie-impulsion qui est garantie par construction

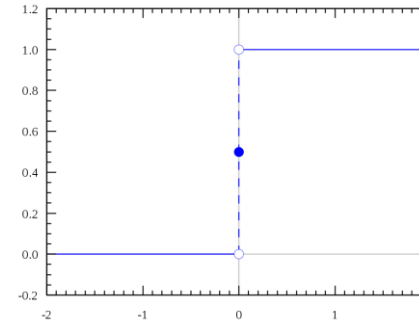


On introduit la **densité du hamiltonien**  $\mathcal{H}_{I\text{int}}$  définie par :  $H_{I\text{int}} = \int d^3x \mathcal{H}_{I\text{int}}$ , alors :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n \mathcal{H}_{I\text{int}}(t_1) \dots \theta(t_{n-1} - t_n) \mathcal{H}_{I\text{int}}(t_n) = Id + \sum_{n=1}^{\infty} S^{[n]}$$

où  $\theta$  est la fonction de Heaviside :

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Nous utiliserons dans la suite du cours les termes d'ordre 1 et d'ordre 2.

$$S_{ba}^{[1]} := \langle b | S^{[1]} | a \rangle = -i \int d^4x_1 \langle b | \mathcal{H}_{I\text{int}}(x_1) | a \rangle$$

$$S_{ba}^{[2]} := \langle b | S^{[2]} | a \rangle = (-i)^2 \int \theta(t_1 - t_2) d^4x_1 d^4x_2 \langle b | \mathcal{H}_{I\text{int}}(x_1) \mathcal{H}_{I\text{int}}(x_2) | a \rangle$$

*Cas où  $H$  ne dépend pas du temps - masqué*

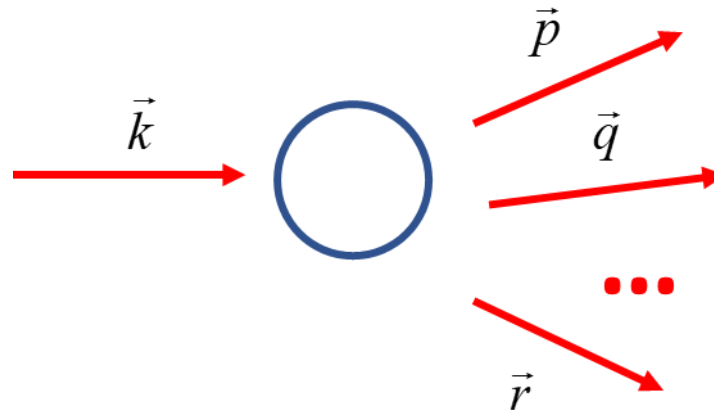
*Cas où  $H$  ne dépend pas du temps - masqué*

es

## D - Taux de désintégration

On s'intéresse à la désintégration d'une particule en plusieurs particules.

On veut calculer le taux de désintégration.



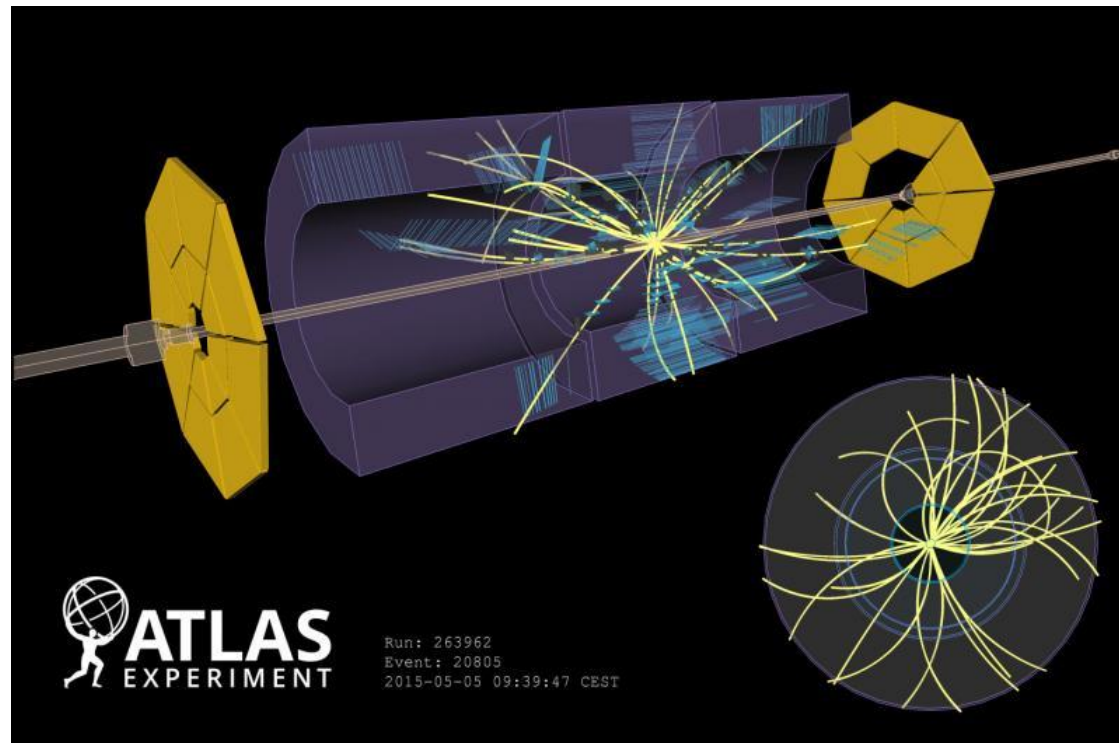
Exemples :

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e ; H \rightarrow e^+ + e^- \dots$$

**État initial :**  $|\vec{k}\rangle = a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle$  à un facteur de normalisation près fixé plus loin

Remarque :

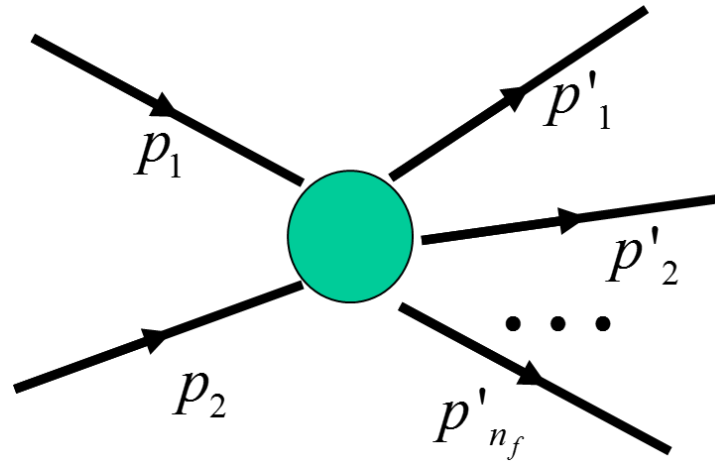
Les expériences de physique des particules se font le plus souvent auprès d'un accélérateur, dans lequel un flux de particules d'impulsion définie est envoyé sur une cible ou bien entre en collisions avec un flux opposé dans un collisionneur.



On voit que dans ce cadre, la construction de la base des états de l'espace de Fock est bien adaptée, c'est la motivation pour l'introduire de cette façon.

En fait on pourrait aussi construire l'espace de Fock à partir de particules localisées dans l'espace, ou d'autres façons plus générales. De la même manière qu'en mécanique quantique, on peut prendre par exemple comme variables de la fonction la position, mais aussi l'impulsion.

Après une désintégration ou une collision, les particules émises s'éloignent et n'interagissent plus, l'état final est donc bien décrit avec la base de l'espace de Fock que nous avons utilisée.



Probabilité d'aller à l'état  $|\vec{p}, \vec{q}, \dots\rangle$  (orthogonal à  $|\vec{k}\rangle$ ) :

$$\mathcal{P} = \left| \langle \vec{p}, \vec{q}, \dots | S | \vec{k} \rangle \right|^2 = \left| \langle \vec{p}, \vec{q}, \dots | iT | \vec{k} \rangle \right|^2 = \left[ (2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k) \right]^2 |M_{ba}|^2$$

On a utilisé :

$$S = Id - iT ; \langle b | Id | a \rangle = 0 ; \langle b | iT | a \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) M_{ba}$$

Puis on écrit de façon formelle (*mais mathématiquement abusive*) :

$$\delta(u)^2 = \delta(u)\delta(0) \text{ où on définit } \delta(0) = \frac{\int \exp(ikx) dx \Big|_{k=0}}{2\pi} = \frac{L}{2\pi}$$

où  $L$  est la taille sur laquelle on intègre  
( $L \rightarrow \infty$  mais en fait  $L$  disparaît à la fin du calcul).

**On verra d'ailleurs que  $\delta^4(p_b - p_a)$  apparaît effectivement à cause d'une intégrale sur tout l'espace-temps, ce qui justifie pleinement l'écriture.**

On obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \left| \langle \vec{p}, \vec{q}, \dots | S | \vec{k} \rangle \right|^2 = \left| \langle \vec{p}, \vec{q}, \dots | iT | \vec{k} \rangle \right|^2 = (2\pi)^8 \delta^4(p + q + \dots - k) \delta^4(0) |M_{ba}|^2 \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k) \times \underbrace{\mathcal{V} \times \mathcal{T}}_{\text{volume d'intégration et temps d'intégration}} \times |M_{ba}|^2\end{aligned}$$

**Normalisation des états :**

$$\left| a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \right|^2 = \langle 0 | a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \underset{\substack{\text{car} \\ a(\vec{k})|0\rangle=0}}{=} \langle 0 | [a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k})] |0\rangle = (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\vec{0}) = 2k^0 \mathcal{V},$$

**Il faut donc introduire un facteur de normalisation  $1/2E\mathcal{V}$  par particule**  
pour normaliser les états.



De plus, les impulsions dans l'état final ne sont pas fixées.

**On s'intéresse à la probabilité de transition vers le volume élémentaire d'espace des phases :  $\mathcal{V}d^3\vec{p}\mathcal{V}d^3\vec{q}\dots$**

Dans un tel élément d'espace des phases il y a  $\frac{\mathcal{V}d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{V}d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \dots$  états (pour  $\hbar = 1$  ).

(avec les unités habituelles :  $\frac{\mathcal{V}d^3\vec{p}}{h^3} \frac{\mathcal{V}d^3\vec{q}}{h^3} \dots$  ).



## Preuve :

La fonction d'onde d'une particule d'énergie donnée s'écrit (avec  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ ) :

$$\psi(\vec{r}, t) = N \exp(-iEt) (a_x e^{ip_x x}) (a_y e^{ip_y y}) (a_z e^{ip_z z}) \text{ (pour } \hbar = 1)$$

Si la particule est confinée dans une boîte de taille  $L_x \times L_y \times L_z$ , il faut imposer des conditions aux limites.

## On choisit des conditions aux limites périodiques :

- pour assurer l'invariance par translation ;
- éviter les effets de bord ;
- obtenir des solutions en exponentielles et ainsi simplifier les calculs.

On demande donc :

$$\psi(x + L_x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) \text{ et idem pour } y \text{ et } z$$

$$\text{On obtient : } e^{ip_x x} = e^{ip_x(x+L_x)} \text{ pour tout } x \Rightarrow p_{x,y,z} = 2n_{x,y,z} \pi / L_{x,y,z}$$

Chaque valeur du triplet de nombres entiers  $\{n_x, n_y, n_z\}$  correspond à un état.

On peut alors compter le nombre d'états dans l'élément d'espace des phases  $\mathcal{V}d^3\vec{p}\mathcal{V}d^3\vec{q}\dots$  :

Dans l'intervalle  $dp_x dp_y dp_z$  il y a un nombre d'états égal à :

$$dn = dn_x dn_y dn_z = \frac{L_x L_y L_z dp_x dp_y dp_z}{(2\pi)^3} = \frac{\mathcal{V}d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}.$$

CQFD

On obtient pour la probabilité de transition :

$$d\mathcal{P} = dn \times (2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k) \mathcal{VT} |M_{ba}|^2 \frac{1}{2k_0 \mathcal{V}} \frac{1}{2p_0 \mathcal{V}} \frac{1}{2q_0 \mathcal{V}} \dots =$$

$$= \frac{\mathcal{V} d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{V} d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \dots (2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k) \mathcal{VT} |M_{ba}|^2 \frac{1}{2k_0 \mathcal{V}} \frac{1}{2p_0 \mathcal{V}} \frac{1}{2q_0 \mathcal{V}} \dots$$

Finalement, après simplification :

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{2k^0} (2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k) \mathcal{T} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2q_0} \dots |M_{ba}|^2$$

Le **taux** différentiel de transition est donné par  **$d\mathcal{P}/\mathcal{T}$** :

$$d\Gamma = \frac{1}{2k^0} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q_0} \dots}_{\text{élément d'espace de phase invariant de Lorentz}} |M_{ba}|^2$$

et le taux de transition s'obtient par intégration sur les impulsions :

$$\Gamma = \frac{1}{2k^0} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q_0} \dots (2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k) |M_{ba}|^2$$

**Noter qu'en général  $M_{ba}$  est une fonction de  $k, p, q, \dots$**

Cependant, il est utile de s'intéresser à la quantité d'espace de phase disponible qui conditionne le taux de désintégration modulo les variations de  $M_{ba}$ .

**Espace de phase pour la désintégration en deux corps  $(m_1, \vec{p})$  et  $(m_2, \vec{q})$  :**

$$\mathcal{E} = \iint (2\pi)^4 \delta^4(p + q - k) \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2q_0}$$

Il n'y a que deux variables indépendantes. On intègre sur  $\vec{q}$  :

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int \delta(p_0 + q_0 - k_0) \frac{d^3 \vec{p}}{p_0 q_0} = \frac{1}{(4\pi)^2} \iint \delta(p_0 + q_0 - k_0) \frac{|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega}{p_0 q_0}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \iint \delta(p_0 + q_0 - k_0) \frac{|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega}{p_0 q_0} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}|^2 \int d\Omega}{p_0 q_0 \left| \frac{d}{d|\vec{p}|} (p_0 + q_0 - k_0) \right|}$$

$$\text{Or } p_0^2 = |\vec{p}|^2 + m_1^2 \Rightarrow \frac{dp_0}{d|\vec{p}|} = \frac{|\vec{p}|}{p_0} \text{ et}$$

$$q_0 = \sqrt{(\vec{k} - \vec{p})^2 + m_2^2} \Rightarrow \frac{dq_0}{d|\vec{p}|} = \frac{-(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \frac{d\vec{p}}{d|\vec{p}|}}{q_0} = \frac{-(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{p}}{q_0 |\vec{p}|}$$

D'où :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}|^2 \int d\Omega}{p_0 q_0 \left( \frac{|\vec{p}|}{p_0} + \frac{-(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{p}}{q_0 |\vec{p}|} \right)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}|^3 \int d\Omega}{q_0 |\vec{p}|^2 - p_0 \vec{k} \cdot \vec{p} + p_0 |\vec{p}|^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}|^3 \int d\Omega}{k_0 |\vec{p}|^2 - p_0 \vec{k} \cdot \vec{p}}$$

**Dans le référentiel du centre de masse,** il vient :  $\mathcal{E} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}| \int d\Omega}{k_0}$

**Cas particulier où une des deux particules a une masse nulle :  $m_2 = 0$**

Exemples :  $\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$  et  $\pi \rightarrow e + \nu_e$  (désintégrations dues à l'interaction faible).

*(on néglige la masse du neutrino)*

Conservation de l'énergie et de l'impulsion dans le centre de masse :

$$m_\pi = E_\mu + E_\nu ; \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu = \vec{0} \Rightarrow (m_\pi - E_\nu)^2 = E_\mu^2 \Rightarrow (m_\pi - p)^2 = m_\mu^2 + p^2$$

car  $E_\nu = p_\nu$ .

$$\text{Donc : } p = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \text{ et } \mathcal{E} = \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right)$$

La formule est la même pour la désintégration  $\pi \rightarrow e + \nu_e$  en remplaçant  $m_\mu$  par  $m_e$

La désintégration  $\pi \rightarrow e + \nu_e$  est donc a priori favorisée par un facteur 2,4 environ.

**L'expérience montre pourtant que  $\pi \rightarrow e + \nu_e$  est 8000 fois moins probable que  $\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$  ! Ce sont les propriétés de l'interaction faible, qui entrent dans le facteur  $M_{ba}$ , qui permettront de comprendre cette anomalie apparente.**



## E - Section efficace

On a calculé le taux de désintégration d'une particule d'impulsion  $\vec{k}$  vers des particules d'impulsion  $\vec{p}, \vec{q}, \dots$  à  $d^3\vec{p}, d^3\vec{q}, \dots$  près :

$$d\Gamma = \frac{d\mathcal{P}}{\mathcal{T}} = \underbrace{\mathcal{V} \frac{1}{2k^0\mathcal{V}} (2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k)}_{\text{normalisation état initial}} \underbrace{\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q_0} \dots}_{\text{normalisation et comptage des états finals}} |M_{ba}|^2$$

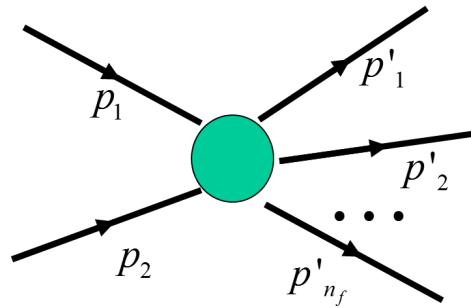
élément d'espace des phases invariant de Lorentz

### Généralisation :

Réaction entre  $n_i$  particules dans l'état initial en produisant  $n_f$  dans l'état final :

$$d\Gamma = \underbrace{\mathcal{V} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p'_1 - p'_2 - \dots)}_{\text{élément d'espace de phase invariant de Lorentz}} \underbrace{\prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3\vec{p}'_k}{(2\pi)^3 2E_k}}_{\text{normalisation pour les particules initiales}} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{1}{2E_l \mathcal{V}} |M_{ba}|^2$$

## Application pour la section efficace d'interaction de deux particules :



### Dans le référentiel de la particule 2 :

la probabilité de transition par unité de flux de particules incidentes s'exprime en fonction de la section efficace différentielle  $d\sigma$  et de la vitesse  $v_1$  de la particule 1 :

$$dN_{\text{int}} = N_1 d\sigma \frac{N_2}{\mathcal{V}} dx \Rightarrow \frac{dN_{\text{int}}}{dt} = d\sigma \frac{N_1 N_2}{\mathcal{V}} v_1$$
$$\Leftrightarrow d\sigma = \frac{\mathcal{V}}{N_1 N_2 v_1} \frac{dN_{\text{int}}}{dt} = \frac{\mathcal{V}}{N_1 N_2 v_1} d\Gamma$$

d'où par identification dans la formule générale ( $N_1 = N_2 = 1$  et  $E_2 = m_2$ ) :

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 \dots) \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3 \vec{p}'_k}{(2\pi)^3 2E'_k} \frac{1}{4m_2 E_1 v_1} |M_{ba}|^2$$

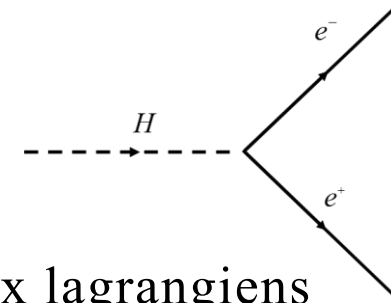
Référentiel quelconque ( $E_1 v_1 = |\vec{p}_1|$ ) :

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 \dots) \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3 \vec{p}'_k}{(2\pi)^3 2E'_k} \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}} |M_{ba}|^2$$

## F - Cas du boson de Higgs

### 1) Désintégration

On se propose d'étudier la désintégration  $H \rightarrow e^+ e^-$



Pour donner une masse à l'électron, on a dû ajouter aux lagrangiens libres d'un champ de Dirac (paire électron positron par exemple) et d'un champ scalaire (champ de Higgs) le terme d'interaction :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -f \bar{\psi} \psi \Phi = -f \psi^\dagger \gamma_0 \psi \Phi$$

**C'est ce terme qui va permettre la désintégration du boson de Higgs  $H \rightarrow e^+ e^-$**

Le hamiltonien d'interaction correspondant est :  $\mathcal{H}_{\text{int}} = f \psi^\dagger \gamma_0 \psi \Phi = f \bar{\psi} \psi \Phi$

Noter que si :  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$  et si  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  ne contient pas de dérivées, alors :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}} \text{ avec } \mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}} \text{ (car } \mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \psi_i} \partial_0 \psi_i - \mathcal{L})$$

### Remarque :

D'après le mécanisme de Higgs, la masse  $m$  de l'électron est le produit de la valeur du champ de Higgs dans le vide et du couplage du Higgs avec l'électron :

$$m = fv$$

**Attaquons à présent le calcul du taux de désintégration du Higgs :**

On prend l'état initial :  $|\alpha\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$  et l'état final  $|\beta\rangle = b_i^\dagger(\vec{p})d_j^\dagger(\vec{q})|0\rangle$

Les indices  $i$  et  $j$  désignent les états de spin des fermions.

**On est bien dans la représentation en interaction :**

- L'état du système avant et après l'interaction est constant
- Le hamiltonien d'interaction est décrit par des opérateurs qui obéissent aux équations d'évolution libre

**Matrice de diffusion : au premier ordre :  $S = Id - i \int d^4x f \psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi$**

$$\begin{aligned}
\langle \beta | S | \alpha \rangle &= \langle 0 | d_j(\vec{q}) b_i(\vec{p}) \left\{ -i \int d^4x f \psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi \right\} a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \\
&= -if \int d^4x \langle 0 | d_j(\vec{q}) b_i(\vec{p}) \psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \\
&= -if \int d^4x \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 2k_3^0} \\
&\quad \sum_{n,m=1,2} \langle 0 | d_j(\vec{q}) b_i(\vec{p}) \\
&\quad \left[ b_n^\dagger(\vec{k}_1) u_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[ik_1 x] + d_n(\vec{k}_1) v_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[-ik_1 x] \right] \\
&\quad \left[ b_m(\vec{k}_2) u_m(\vec{k}_2) \exp[-ik_2 x] + d_m^\dagger(\vec{k}_2) v_n(\vec{k}_2) \exp[ik_2 x] \right] \\
&\quad \left[ a(\vec{k}_3) \exp[-ik_3 x] + a^\dagger(\vec{k}_3) \exp[ik_3 x] \right] \\
&\quad a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

**Examinons la quantité intégrée :**

$$\begin{aligned} & \langle 0 | d_j(\vec{q}) b_i(\vec{p}) \\ & \left[ b_n^\dagger(\vec{k}_1) u_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[ik_1 x] + d_n(\vec{k}_1) v_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[-ik_1 x] \right] \times \\ & \left[ b_m(\vec{k}_2) u_m(\vec{k}_2) \exp[-ik_2 x] + d_m^\dagger(\vec{k}_2) v_m(\vec{k}_2) \exp[ik_2 x] \right] \times \\ & \left[ a(\vec{k}_3) \exp[-ik_3 x] + a^\dagger(\vec{k}_3) \exp[ik_3 x] \right] \\ & a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \end{aligned}$$

Elle se décompose en une somme de huit termes.

**Tous les termes sauf un seul sont nuls par simple inspection**

car les opérateurs de types différents commutent et tout opérateur d'annihilation appliqué à  $|0\rangle$  donne 0, et tout opérateur de création appliqué à  $\langle 0|$  donne 0 aussi.

On a encadré ci-dessous les opérateurs qui causent l'annulation immédiate des sept termes qui disparaissent.

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | d_j(\vec{q}) b_i(\vec{p}) b_n^\dagger(\vec{k}_1) u_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[ik_1 x] \boxed{b_m(\vec{k}_2)} u_m(\vec{k}_2) \exp[-ik_2 x] a(\vec{k}_3) \exp[-ik_3 x] a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \text{ nul} \\
& \langle 0 | d_j(\vec{q}) b_i(\vec{p}) b_n^\dagger(\vec{k}_1) u_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[ik_1 x] \boxed{b_m(\vec{k}_2)} u_m(\vec{k}_2) \exp[-ik_2 x] a^\dagger(\vec{k}_3) \exp[ik_3 x] a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \text{ nul} \\
& \langle 0 | d_j(\vec{q}) b_i(\vec{p}) b_n^\dagger(\vec{k}_1) u_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[ik_1 x] d_m^\dagger(\vec{k}_2) v_n(\vec{k}_2) \exp[ik_2 x] a(\vec{k}_3) \exp[-ik_3 x] a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \text{ terme non nul} \\
& \langle 0 | d_j(\vec{q}) b_i(\vec{p}) b_n^\dagger(\vec{k}_1) u_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[ik_1 x] d_m^\dagger(\vec{k}_2) v_n(\vec{k}_2) \exp[ik_2 x] \boxed{a^\dagger(\vec{k}_3)} \exp[ik_3 x] a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \text{ nul} \\
& \langle 0 | d_j(\vec{q}) b_i(\vec{p}) d_n(\vec{k}_1) v_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[-ik_1 x] \boxed{b_m(\vec{k}_2)} u_m(\vec{k}_2) \exp[-ik_2 x] a(\vec{k}_3) \exp[-ik_3 x] a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \text{ nul} \\
& \langle 0 | d_j(\vec{q}) b_i(\vec{p}) d_n(\vec{k}_1) v_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[-ik_1 x] \boxed{b_m(\vec{k}_2)} u_m(\vec{k}_2) \exp[-ik_2 x] a^\dagger(\vec{k}_3) \exp[ik_3 x] a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \text{ nul} \\
& \langle 0 | d_j(\vec{q}) \boxed{b_i(\vec{p})} d_n(\vec{k}_1) v_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[-ik_1 x] d_m^\dagger(\vec{k}_2) v_n(\vec{k}_2) \exp[ik_2 x] a(\vec{k}_3) \exp[-ik_3 x] a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \text{ nul} \\
& \langle 0 | d_j(\vec{q}) \boxed{b_i(\vec{p})} d_n(\vec{k}_1) v_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 \exp[-ik_1 x] d_m^\dagger(\vec{k}_2) v_n(\vec{k}_2) \exp[ik_2 x] \boxed{a^\dagger(\vec{k}_3)} \exp[ik_3 x] a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \text{ nul}
\end{aligned}$$



**En fait on comprend très facilement ce résultat :**

pour décrire la désintégration du Higgs en paire électron positron, il faut un opérateur pour annihiler le Higgs entrant ( $a$ ), un opérateur pour créer l'électron sortant ( $b_n^\dagger$ ), et un opérateur pour créer le positron sortant ( $d_m^\dagger$ ), et aucun autre.

**Remarque :**

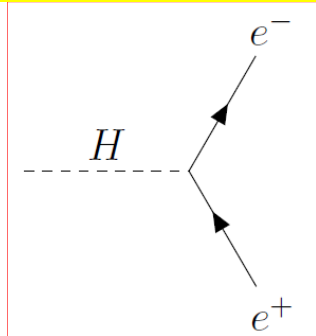
*L'ensemble de ces termes montrent que le même terme d'interaction  $f\psi^\dagger\gamma^0\psi\Phi$  permet :*

$\psi^\dagger$  : *de créer un électron ou d'absorber un positon*

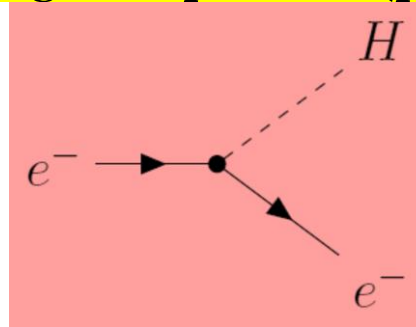
$\psi$  : *d'absorber un électron ou de créer un positon*

$\Phi$  : *de créer ou d'absorber un boson de Higgs*

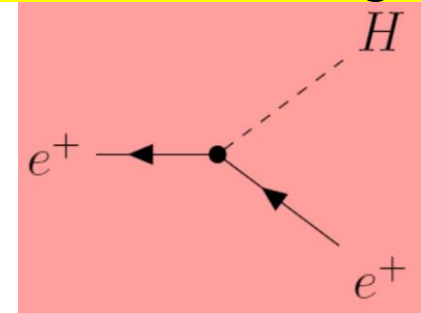
**et donc de permettre a priori les processus suivants :  
modulo la conservation de l'énergie-impulsion (processus interdits en rouge !)**



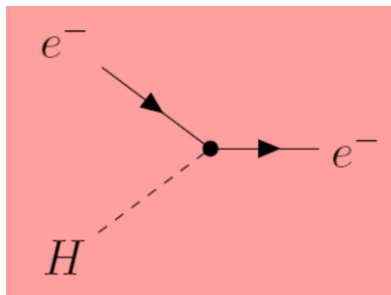
$$H \rightarrow e^+ + e^-$$



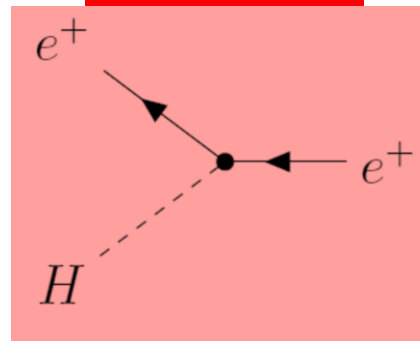
$$e^- \rightarrow H + e^-$$



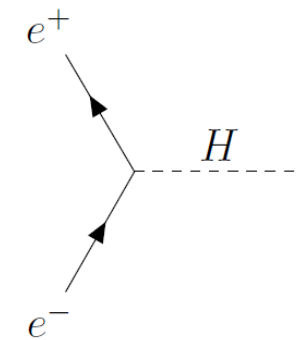
$$e^+ \rightarrow H + e^+$$



$$H + e^- \rightarrow e^-$$



$$H + e^+ \rightarrow e^+$$



$$e^+ + e^- \rightarrow H$$

(plus deux autres impossibles par conservation de l'énergie impulsion  
exercice : les trouver)

**On a donc utilisé la commutation des opérateurs de types différents et les propriétés de l'état vide pour garder un seul terme :**

$$\langle \beta | S | \alpha \rangle = -if \int d^4x \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 2k_3^0} \sum_{n,m=1,2} \exp \left[ i(k_1 + k_2 - k_3)x \right] \langle 0 | d_j(\vec{q}) b_i(\vec{p}) b_n^\dagger(\vec{k}_1) u_n^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 d_m^\dagger(\vec{k}_2) v_m(\vec{k}_2) a(\vec{k}_3) a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle$$

On utilise les relations de (anti)commutation des opérateurs avec leurs adjoints :

$$= -if \int d^4x \int d^3k_1 \int d^3k_2 \int d^3k_3 \exp \left[ i(k_1 + k_2 - k_3)x \right] \langle 0 | \delta^3(\vec{q} - \vec{k}_2) \delta^3(\vec{p} - \vec{k}_1) u_i^\dagger(\vec{k}_1) \gamma^0 v_j(\vec{k}_2) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}_3) | 0 \rangle$$

On intègre sur les impulsions grâce aux distributions de Dirac, puis l'intégrale sur  $x$  donne :  $\langle \beta | S | \alpha \rangle = -if (2\pi)^4 \delta^4(p + q - k) u_i^\dagger(\vec{p}) \gamma^0 v_j(\vec{q})$

soit  $M_{\beta\alpha} = f u_i^\dagger \gamma^0 v_j$ . On a donc le taux de désintégration :

$$d\Gamma = \frac{1}{2k^0} (2\pi)^4 \delta^4(p + q - k) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} f^2 u_i^\dagger(\vec{p}) \gamma^0 v_j(\vec{q}) v_j^\dagger(\vec{q}) \gamma^0 u_i(\vec{p})$$

**Si on ne mesure pas les spins des particules sortantes, il faut sommer sur toutes les configurations de spin  $\left( \sum_{i,j=1,2} \right)$ .**

De plus, en se mettant dans le repère du Higgs  $k_0 = m_H$ , d'où :

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_H} (2\pi)^4 \delta^4(p+q-k) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} f^2 \sum_{i,j=1,2} u_i^\dagger(\vec{p}) \gamma^0 v_j(\vec{p}) v_j^\dagger(\vec{p}) \gamma^0 u_i(\vec{p})$$

$$\text{Or : } \underbrace{u_i^\dagger(\vec{p}) \gamma^0 v_j(\vec{q})}_{\text{scalaire}} \underbrace{v_j^\dagger(\vec{q}) \gamma^0 u_i(\vec{p})}_{\text{scalaire}} = \text{Tr} \left( \underbrace{v_j(\vec{q}) \bar{v}_j(\vec{q})}_{\text{matrice } 4 \times 4} \underbrace{u_i(\vec{p}) \bar{u}_i(\vec{p})}_{\text{matrice } 4 \times 4} \right)$$

**On le montre en écrivant explicitement les composantes.**

## Démonstration :

Les indices latins des spineurs et des éléments des matrices  $\gamma$  :  $a, b, c, d$  vont de 1 à 4, ils sont arbitrairement mis en exposant, et il y a sommation sur les indices latins répétés où qu'ils soient :

$$u_i^\dagger(\vec{p})\gamma^0 v_j(\vec{q})v_j^\dagger(\vec{q})\gamma^0 u_i(\vec{p}) = u_i^\dagger(\vec{p})^a \gamma^{0ab} v_j(\vec{q})^b v_j^\dagger(\vec{q})^c \gamma^{0cd} u_i(\vec{p})^d \quad (1)$$

et :

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left(v_j(\vec{q})\bar{v}_j(\vec{q})u_i(\vec{p})\bar{u}_i(\vec{p})\right) &= \text{Tr}\left(v_j(\vec{q})v_j^\dagger(\vec{q})\gamma^0 u_i(\vec{p})u_i^\dagger(\vec{p})\gamma^0\right) = \\ &= \left[v_j(\vec{q})v_j^\dagger(\vec{q})\right]^{ab} \gamma^{0bc} \left[u_i(\vec{p})u_i^\dagger(\vec{p})\right]^{cd} \gamma^{0da} = v_j(\vec{q})^a v_j^\dagger(\vec{q})^b \gamma^{0bc} u_i(\vec{p})^c u_i^\dagger(\vec{p})^d \gamma^{0da} = \\ &= u_i^\dagger(\vec{p})^d \gamma^{0da} v_j(\vec{q})^a v_j^\dagger(\vec{q})^b \gamma^{0bc} u_i(\vec{p})^c \underset{\substack{d \rightarrow a \\ a \rightarrow b \\ b \rightarrow c \\ c \rightarrow d}}{=} u_i^\dagger(\vec{p})^a \gamma^{0ab} v_j(\vec{q})^b v_j^\dagger(\vec{q})^c \gamma^{0cd} u_i(\vec{p})^d = (1) \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a simplement renommé les indices, ils sont muets !

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1,2} u_i^\dagger(\vec{p}) \gamma^0 v_j(\vec{p}) v_j^\dagger(\vec{p}) \gamma^0 u_i(\vec{p}) &= \sum_{i,j=1,2} \text{Tr} \left( v_j(\vec{q}) \bar{v}_j(\vec{q}) u_i(\vec{p}) \bar{u}_i(\vec{p}) \right) \\ &= \text{Tr} \left( \sum_{j=1,2} v_j(\vec{q}) \bar{v}_j(\vec{q}) \sum_{i=1,2} u_i(\vec{p}) \bar{u}_i(\vec{p}) \right) = \text{Tr} \left( (\not{q} - mI_4)(\not{p} + mI_4) \right) \end{aligned}$$

On a utilisé les relations de fermeture, voir exercice :

$$\sum_{i=1,2} u_i(\vec{p}) \bar{u}_i(\vec{p}) = (\not{p} + mI_4) \text{ et } \sum_{j=1,2} v_j(\vec{q}) \bar{v}_j(\vec{q}) = (\not{q} - mI_4)$$

Notation slash de Feynman :  $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$  ;  $\not{q} = q_\mu \gamma^\mu$

On obtient :

$$\sum_{i,j=1,2} u_i^\dagger(\vec{p}) \gamma^0 v_j(\vec{p}) v_j^\dagger(\vec{p}) \gamma^0 u_i(\vec{p}) = \text{Tr}(p_\mu q_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - m \not{p} + m \not{q} - m^2 I_4) = 4pq - 4m^2$$

où on a utilisé les relations immédiates :  $\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0$  et  $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$

Finalement :

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_H} (2\pi)^4 \underbrace{\delta^4(p+q-k)}_{\substack{\text{conservation de} \\ \text{l'énergie impulsion}}} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} f^2(4pq - 4m^2)$$

**Pour terminer le calcul du taux, il faut faire un peu de cinématique :**

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_H} (2\pi)^4 \underbrace{\delta^4(p+q-k)}_{\text{conservation de l'énergie impulsion}} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} f^2(4pq-4m^2)$$

$$\Gamma = \iint \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} \frac{1}{2m_H} (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}+\vec{q}-\vec{k}) \delta(p^0+q^0-k^0) f^2(4pq-4m^2)$$

On intègre sur  $\vec{q}$  grâce à  $\delta^3(\vec{p}+\vec{q}-\vec{k})$ , il vient dans le centre de masse du Higgs ( $\vec{k} = \vec{0}$ ) :

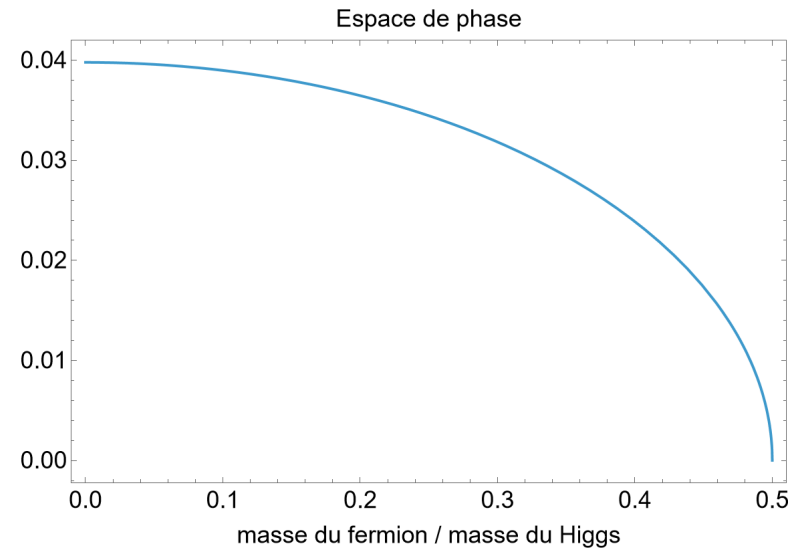
$$\Gamma = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{1}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{1}{2m_H} (2\pi)^4 \delta(p^0+p^0-k^0) f^2\left(4(p^0)^2 + 4|\vec{p}|^2 - 4m^2\right)$$



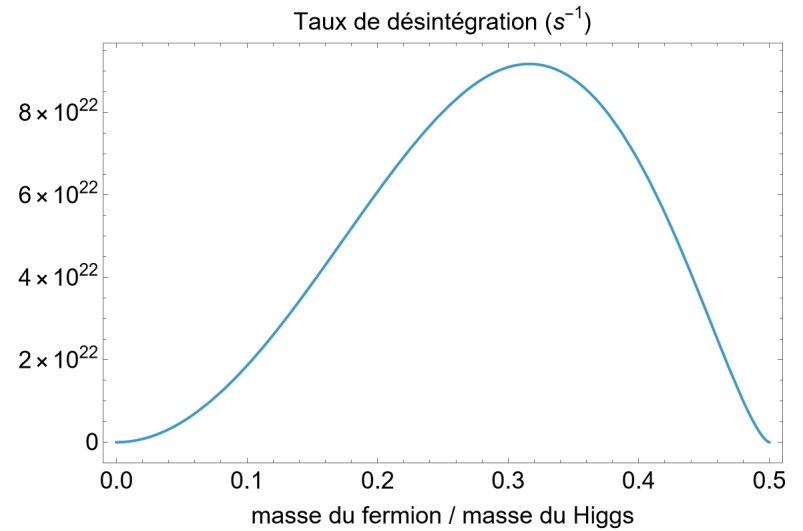
$$\begin{aligned}
\Gamma &= \int \frac{(2\pi)^4}{2m_H} \delta(2p^0 - m_H) \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^6 (2p^0)^2} \left( 4(p^0)^2 + 4|\vec{p}|^2 - 4m^2 \right) f^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{f^2}{2m_H^3} (2m_H^2 - 8m^2) \int \delta(2p^0 - m_H) |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega = \\
&\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{f^2}{2m_H^3} (2m_H^2 - 8m^2) \int \frac{m_H}{4\sqrt{m_H^2/4 - m^2}} \delta\left(\sqrt{m_H^2/4 - m^2} - |\vec{p}|\right) |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega = \\
&\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{f^2}{2m_H^3} (2m_H^2 - 8m^2) \frac{m_H}{4} (m_H^2/4 - m^2)^{1/2} 4\pi = \frac{1}{8\pi} f^2 m_H \left(1 - 4\frac{m^2}{m_H^2}\right)^{3/2} \quad \text{OUF !}
\end{aligned}$$

On a utilisé :  $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$  où les  $x_i$  sont les racines réelles de  $g(x) = 0$ .

Espace de phase  
en fonction de  
 $m / m_H$



Taux de désintégration  
en fonction de  
 $m / m_H$



### **Application numérique :**

Mécanisme de Brout-Englert-Higgs :  $f = \frac{m}{v}$  avec  $v = 246 \text{ GeV}$

On rétablit les unités :

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi\hbar} \frac{m^2 c^4 m_H c^2}{v^2} \left( 1 - 4 \frac{m^2}{m_H^2} \right)^{3/2} = 3,26 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$$

Avec  $\tau = 1,56 \times 10^{-22} \text{ s}$  (prédiction) on obtient un **rapport d'embranchement** :

$$BR = \Gamma \times \tau = 5,1 \times 10^{-9}$$

## XXV. Rapport d'embranchement

Le **rapport d'embranchement** désigne la probabilité de voir un système instable emprunter un mode de désintégration donné parmi tous les modes de désintégration possibles.

La somme des rapports d'embranchement de tous les modes de désintégration possibles est donc par définition égale à 1.

$$\begin{aligned} dN(a \rightarrow b) &= N(a) \Gamma(a \rightarrow b) dt \text{ et } dN(a \rightarrow \cdot) = N(a) \frac{dt}{\tau(a)} \Rightarrow \\ N(a \rightarrow b) &= \int_0^\infty N(a) \Gamma(a \rightarrow b) dt = \int_0^{N(a \rightarrow \cdot)} N(a) \Gamma(a \rightarrow b) \tau(a) \frac{dN(a \rightarrow \cdot)}{N(a)} \\ &\quad \text{changement de} \\ &\quad \text{variable d'intégration} \\ &= N(a \rightarrow \cdot) \Gamma(a \rightarrow b) \times \tau(a) \end{aligned}$$

On obtient :

$$BR(a \rightarrow b) = \frac{N(a \rightarrow b)}{N(a \rightarrow \cdot)} = \Gamma(a \rightarrow b) \times \tau(a)$$

Finalement :

Pour l'électron :  $BR = 5,1 \times 10^{-9}$  (trop faible pour être observé aujourd'hui - 2026)

On obtient en changeant la valeur de la masse :

Pour le muon :  $BR = 2,2 \times 10^{-4}$  (mesure :  $3,0 \times 10^{-4}$  incertitude de 30 %)

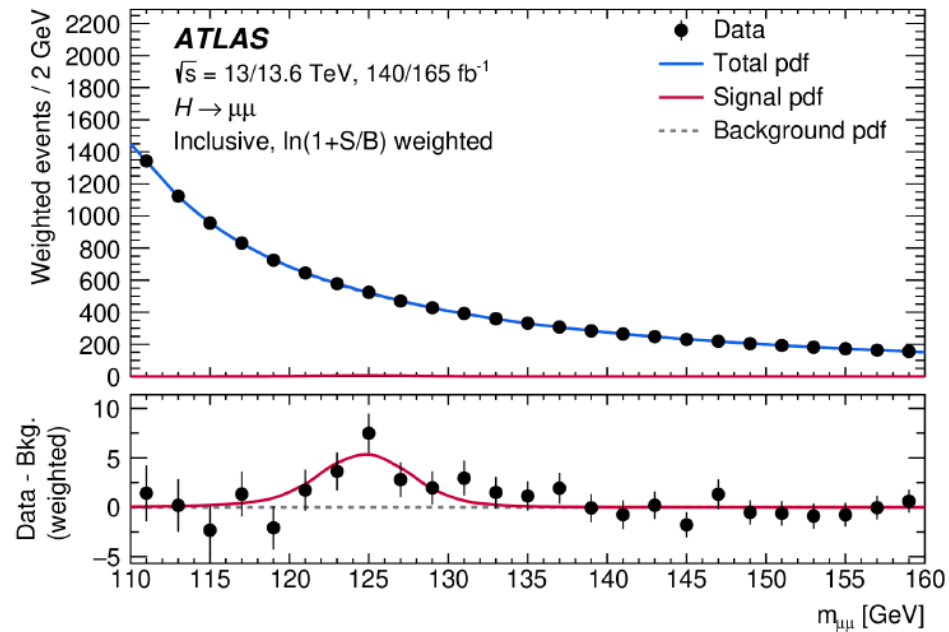
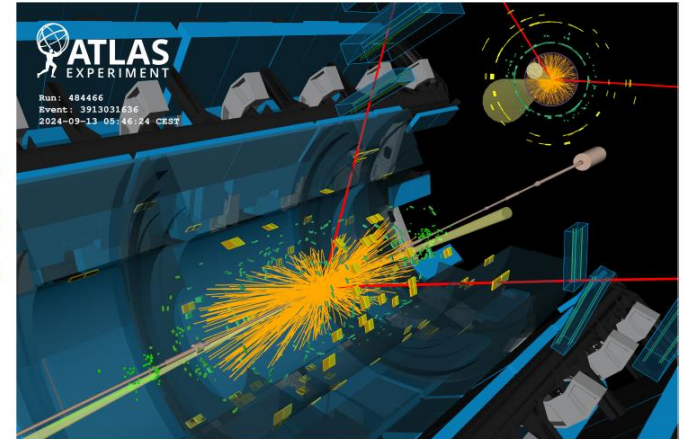
Pour le tau :  $BR = 6,1 \times 10^{-2}$  (mesure :  $6,3 \times 10^{-2}$  à 10 % près)

Pour le quark b :  $BR = 3,1 \times 10^{-1}$  (mesure :  $5,8 \times 10^{-1}$  à 15% près) ? **affaire à suivre**

## $H \rightarrow \mu\mu$ candidate from 2024 pp collision

(Run 484466, Event 3913031636)

$m_{\mu\mu} = 125.3$  GeV, and two forward jets with  $m_{jj} = 2693$  GeV

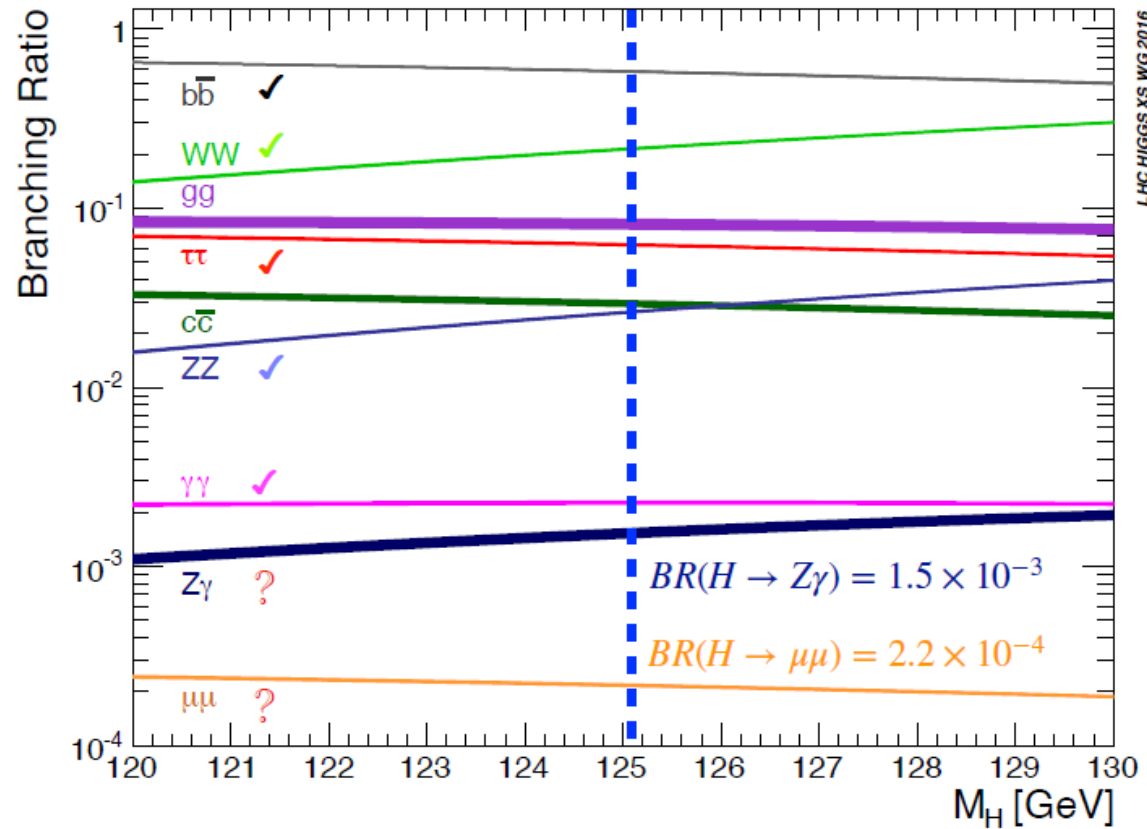


$H \rightarrow \mu\mu$  Run 2 + Run 3 (2022-2024) combination:

- Observed (expected) significance:  $3.4\sigma$  ( $2.5\sigma$ )
- Measured signal strength:  $\mu = 1.4 \pm 0.4$

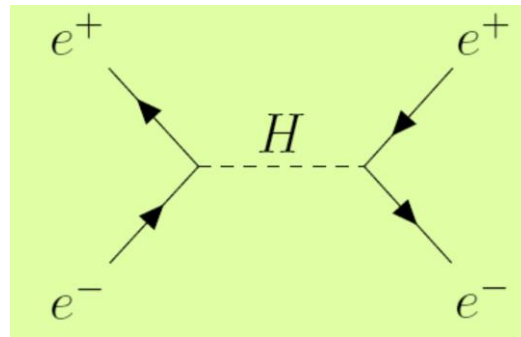
*Clear evidence!*

# Prédictions du modèle standard en fonction de la masse du Higgs



## Propagateur

De ce qu'on vient de voir, le processus suivant est très certainement possible, c'est la succession de deux des processus précédents.



Mais le terme du premier ordre ne permet pas d'avoir un élément de matrice non nul entre l'état initial et l'état final :  
en effet, il faut absorber et créer deux électrons et deux positrons

Mais cela devient possible si on inclut le terme du deuxième ordre.



En effet, au deuxième ordre, la matrice  $S$  s'écrit

$$S = Id + i \int d^4x f \psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi \\ + (-i)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \theta(t_1 - t_2) f^2 [\psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi](x_1) [\psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi](x_2)$$

Le terme du deuxième ordre permet d'avoir un élément de matrice non nul entre un état initial  $e^+e^-$  et un état final  $e^+e^-$ , ce que ne permet pas le terme du premier ordre.

Dans le centre de masse, l'état initial et l'état final s'écrivent :

$$|\alpha\rangle = b_i^\dagger(\vec{p}) d_j^\dagger(-\vec{p})|0\rangle \text{ et } |\beta\rangle = b_i^\dagger(\vec{q}) d_j^\dagger(-\vec{q})|0\rangle$$

Le comptage des opérateurs de création et d'annihilation pour le champ  $\Phi$  montre que  $\langle\beta|S^{[1]}|\alpha\rangle$  est nul.

Le calcul de  $\langle \beta | S^{[2]} | \alpha \rangle$  va faire apparaître un produit (en ignorant les autres facteurs et intégrales pour alléger l'écriture) :

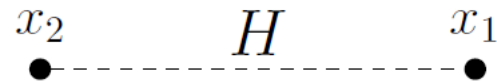
$$\begin{aligned}
 & \int d^4x_1 d^4x_2 \theta(t_1 - t_2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'^0} \\
 & \langle 0 | \left[ a(\vec{k}) \exp[-ikx_1] + a^\dagger(\vec{k}) \exp[ik_3x_1] \right] \left[ a(\vec{k}') \exp[-ik'x_2] + a^\dagger(\vec{k}') \exp[ik'x_2] \right] | 0 \rangle \\
 & = \int d^4x_1 d^4x_2 \theta(t_1 - t_2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'^0} \langle 0 | a(\vec{k}) \exp[-ikx_1] a^\dagger(\vec{k}') \exp[ik'x_2] | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

On insère l'identité :  $\text{Id} = \sum_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \langle 0| a(\vec{p})$ ,

il reste en utilisant les relations de commutation :

$$= \int d^4 x_1 d^4 x_2 \underbrace{\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} \theta(t_1 - t_2) \exp[-ip(x_1 - x_2)]}_{D(x_1 - x_2)}$$

**La quantité  $D(x_1 - x_2)$  s'appelle un propagateur, ici le propagateur du champ  $\Phi$ , qui représente la création d'un Higgs en  $x_2$  et son absorption en  $x_1$ .**



## G - Diagrammes de Feynman

### 1) Concept

Calculs lourds mais répétitifs

Calculs lourds mais répétitifs

Un diagramme de Feynman est une représentation graphique permettant l'écriture directe de  $iM_{ba}$  qui intervient dans le calcul des amplitudes de transition  $\langle b|S|a\rangle$  d'un état initial  $a$  vers un état final  $b$ .

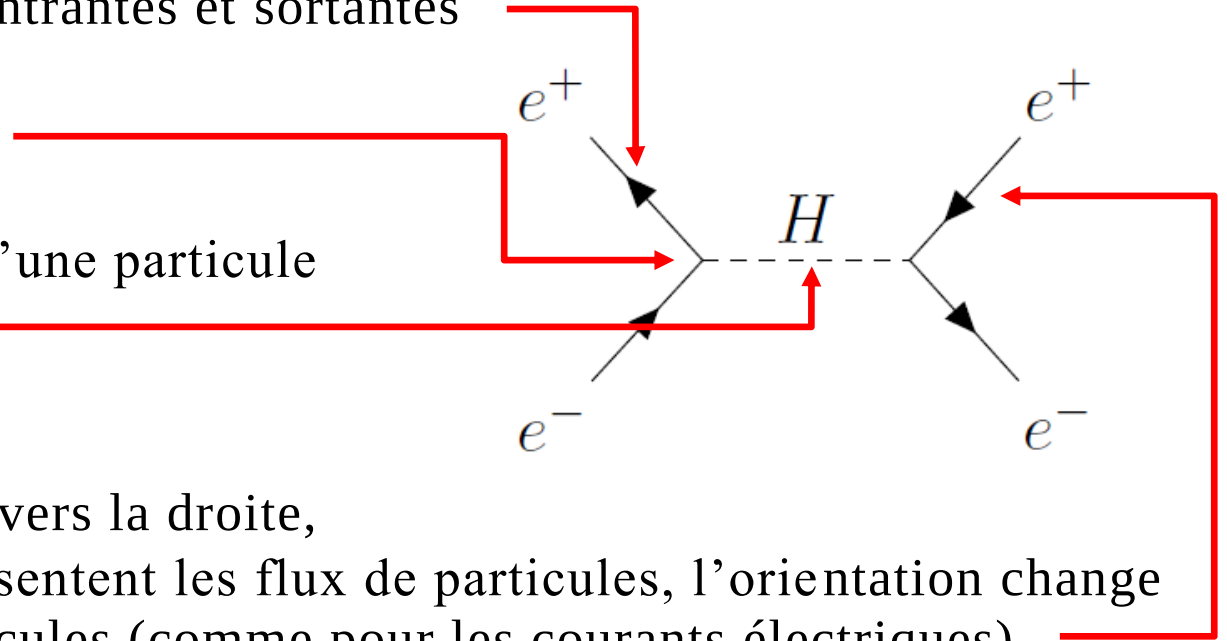
Rappel : avec  $S = Id - iT$

**l'élément de matrice de diffusion**  $M_{ba}$  est défini par :

$$\langle b|iT|a\rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) M_{ba}$$

## Éléments d'un diagramme :

- **lignes externes** : particules entrantes et sortantes
- **vertex** : terme d'interaction
- **ligne interne** : propagateur d'une particule virtuelle entre deux vertex
- **orientation des lignes** :
  - le temps va de la gauche vers la droite,
  - les lignes orientées représentent les flux de particules, l'orientation change de sens pour les antiparticules (comme pour les courants électriques)



## Règles de Feynman :

Les règles de Feynman sont définies à partir des expressions des lagrangiens libres des fermions et des bosons et des termes d'interaction qui sont spécifiques à chacune des interactions fondamentales.

On donne ici les règles qui s'appliquent en QED (électrodynamique quantique) et pour les interactions fermions-Higgs.

**Lignes externes :**

|                                   |                                            |
|-----------------------------------|--------------------------------------------|
| boson scalaire entrant            | 1                                          |
| boson scalaire sortant            | 1                                          |
| particule de spin 1/2 entrant     | $u$                                        |
| particule de spin 1/2 sortant     | $\bar{u}$                                  |
| antiparticule de spin 1/2 entrant | $\bar{v}$                                  |
| antiparticule de spin 1/2 sortant | $v$                                        |
| photon entrant                    | $\varepsilon_\mu$ (vecteur polarisation)   |
| photon sortant                    | $\varepsilon_\mu^*$ (vecteur polarisation) |

**Propagateurs** (" $\varepsilon = 0^+$ ", utile pour le calcul d'intégrales avec le théorème des résidus) :

|                       |                                                                      |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------------|
| photon                | $-i\eta^{\mu\nu} / (p^2 + i\varepsilon)$                             |
| particule de spin 1/2 | $i(\not{p} + m) / (p^2 - m^2 + i\varepsilon)$                        |
| particule de spin 0   | $i / (p^2 - m^2 + i\varepsilon)$                                     |
| particule de spin 1   | $-i(\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m^2) / (p^2 - m^2 + i\varepsilon)$ |

**Vertex :**

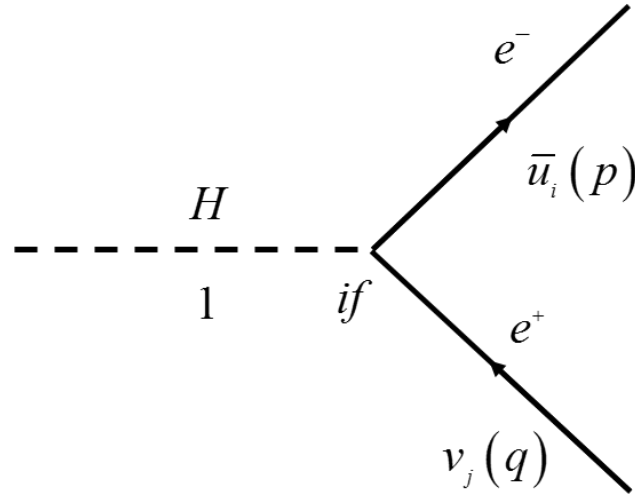
|                                    |                 |
|------------------------------------|-----------------|
| fermion-antifermion-photon         | $-iq\gamma^\mu$ |
| fermion-antifermion-boson scalaire | $im / v = if$   |

**L'écriture de l'amplitude correspondant à un diagramme donné se fait :**

- en lisant le diagramme de droite à gauche,**
- en remontant les lignes orientées,**
- et en écrivant au fur et à mesure des éléments rencontrés les facteurs indiqués par les règles de Feynman qui ont été données ci-dessus.**



# XXVI. Exemple $H \rightarrow e^+ e^-$



On lit le diagramme de la droite vers la gauche et on remonte les lignes de courant.

On obtient :

$$iM = if \bar{u}_i(p) v_j(q)$$

## XXVII.Exemple en électrodynamique quantique

L'interaction électromagnétique pour les fermions est donnée par le terme d'interaction du lagrangien invariant par transformation de jauge locale :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \boxed{\underbrace{q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}_{j^\mu} A_\mu}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu = -q \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi A_\mu \Rightarrow \boxed{\mathcal{H}_{\text{int}} = q \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi A_\mu}$$

### Seconde quantification :

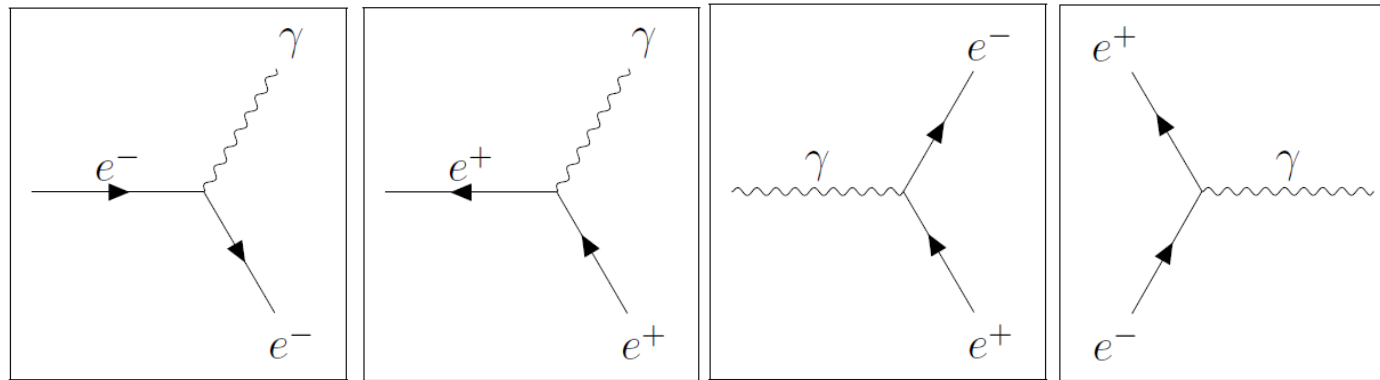
$$\psi(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i} u^i(\vec{p}) \exp(-ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i}^\dagger v^i(\vec{p}) \exp(ip_\mu x^\mu) \right) \right]$$

$$A_\mu = A_\mu^\dagger = \sum_{\vec{p},\lambda} \left[ a_{\vec{p},\lambda} e_\mu(\lambda) \exp(-ipx) + a_{\vec{p},\lambda}^\dagger e_\mu^*(\lambda) \exp(ipx) \right]$$

Ce terme d'interaction représente **à la fois** :

- grâce à  $\psi^\dagger$  : la création d'un fermion ou l'absorption d'un antifermion
- grâce à  $\psi$  : la création d'un antifermion ou l'absorption d'un fermion
- grâce à  $A_\mu$  : la création ou l'absorption d'un photon

On obtient ainsi par exemple les processus suivants (*trouvez les 4 autres...*) :

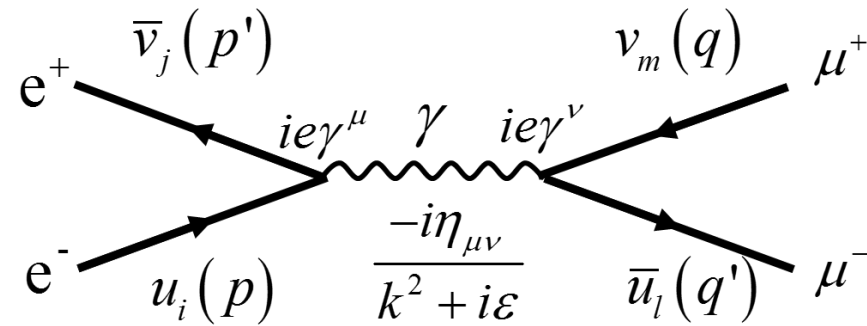


L'électron peut être remplacé par n'importe quel autre fermion chargé.

On peut associer successivement les divers processus.

Par exemple, la « création de paire » est la succession des processus 4 et 3 :

**Création de paire :  $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$**



$$iM_{ijml} = \bar{u}_l(q') ie\gamma^\nu v_m(q) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \bar{v}_j(p') ie\gamma^\mu u_i(p)$$

Pour calculer le module carré, on réordonne les termes scalaires et on fait attention de ne pas répéter les indices muets :

$$|M_{ijml}|^2 = \frac{e^4}{k^4} \left( \bar{u}_l(q') \gamma^\nu v_m(q) \right)^* \left( \bar{u}_l(q') \gamma^\rho v_m(q) \right) \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \left( \bar{v}_j(p') \gamma^\mu u_i(p) \right)^* \left( \bar{v}_j(p') \gamma^\sigma u_i(p) \right)$$

On somme sur les indices  $\mu$  et  $\sigma$  :

$$= \frac{e^4}{k^4} \left( \bar{u}_l(q') \gamma^\nu v_m(q) \right)^* \left( \bar{u}_l(q') \gamma^\rho v_m(q) \right) \left( \bar{v}_j(p') \gamma_\nu u_i(p) \right)^* \left( \bar{v}_j(p') \gamma_\rho u_i(p) \right)$$

et on renomme les indices muets :

$$= \frac{e^4}{k^4} \left( \bar{u}_l(q') \gamma^\mu v_m(q) \right)^* \left( \bar{u}_l(q') \gamma^\nu v_m(q) \right) \left( \bar{v}_j(p') \gamma_\mu u_i(p) \right)^* \left( \bar{v}_j(p') \gamma_\nu u_i(p) \right)$$

## Calcul de la section efficace

État initial non polarisé (spins aléatoires) → **moyenne** sur les états de spins

État final quelconque (tous les spins possibles) → **somme** sur les états de spins

$$|\bar{M}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \sum_{m=1,2} \sum_{l=1,2} |M_{ijml}|^2 = \frac{e^4}{k^4} L^{\mu\nu}(\mu) L_{\mu\nu}(e) \text{ avec :}$$

$$L^{\mu\nu}(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{m,l} \left( \bar{u}_l(q') \gamma^\mu v_m(q) \right)^* \left( \bar{u}_l(q') \gamma^\nu v_m(q) \right) = \frac{1}{2} \sum_{m,l} \left( \bar{v}_m(q) \gamma^\mu u_l(q') \right) \left( \bar{u}_l(q') \gamma^\nu v_m(q) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_m \bar{v}_m(q) \gamma^\mu \left( \sum_l u_l(q') \bar{u}_l(q') \right) \gamma^\nu v_m(q) = \frac{1}{2} \sum_m \bar{v}_m(q) \gamma^\mu (\not{q}' + m) \gamma^\nu v_m(q)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_m \bar{v}_m^\alpha(q) \left[ \gamma^\mu (\not{q}' + m) \gamma^\nu \right]^{\alpha\beta} v_m^\beta(q) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_m v_m^\beta(q) \bar{v}_m^\alpha(q) \left[ \gamma^\mu (\not{q}' + m) \gamma^\nu \right]^{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_m \left[ v_m(q) \bar{v}_m(q) \right]^{\beta\alpha} \left[ \gamma^\mu (\not{q}' + m) \gamma^\nu \right]^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (\not{q} - m_\mu) \gamma^\mu (\not{q}' + m_\mu) \gamma^\nu \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left( q_\rho q'_\eta \text{Tr} \left[ \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\eta \gamma^\nu \right] + m_\mu q_\rho \cancel{\text{Tr} \left[ \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \right]} - m_\mu q_\eta \cancel{\text{Tr} \left[ \gamma^\mu \gamma^\eta \gamma^\nu \right]} - m_\mu^2 \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \gamma^\nu \right] \right)$$

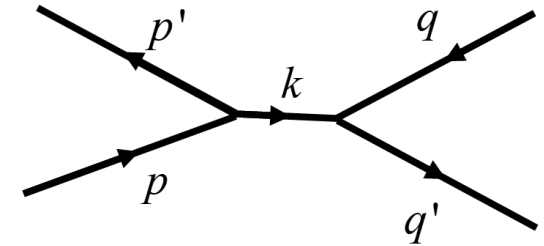
$$= 2 \left( q^\mu q'^\nu + q^\nu q'^\mu - (m_\mu^2 + q \cdot q') \eta^{\mu\nu} \right)$$

De même

$$L_{\mu\nu}(e) = \frac{1}{2} \sum_{j,i} \left( \bar{v}_j(p') \gamma_\mu u_i(p) \right)^* \left( \bar{v}_j(p') \gamma_\nu u_i(p) \right) = 2 \left( p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - (m_e^2 + p \cdot p') \eta_{\mu\nu} \right)$$

Finalement

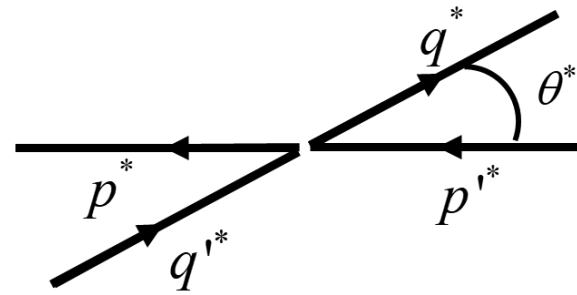
$$\begin{aligned} |\bar{M}|^2 &= \frac{4e^4}{k^4} \left( q^\mu q'^\nu + q^\nu q'^\mu - (m_\mu^2 + q \cdot q') \eta^{\mu\nu} \right) \left( p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - (m_e^2 + p \cdot p') \eta_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{8e^4}{k^4} \left( q \cdot p \, q' \cdot p' + q \cdot p' \, q' \cdot p + m_\mu^2 p \cdot p' + m_e^2 q \cdot q' + 2m_\mu^2 m_e^2 \right) \end{aligned}$$



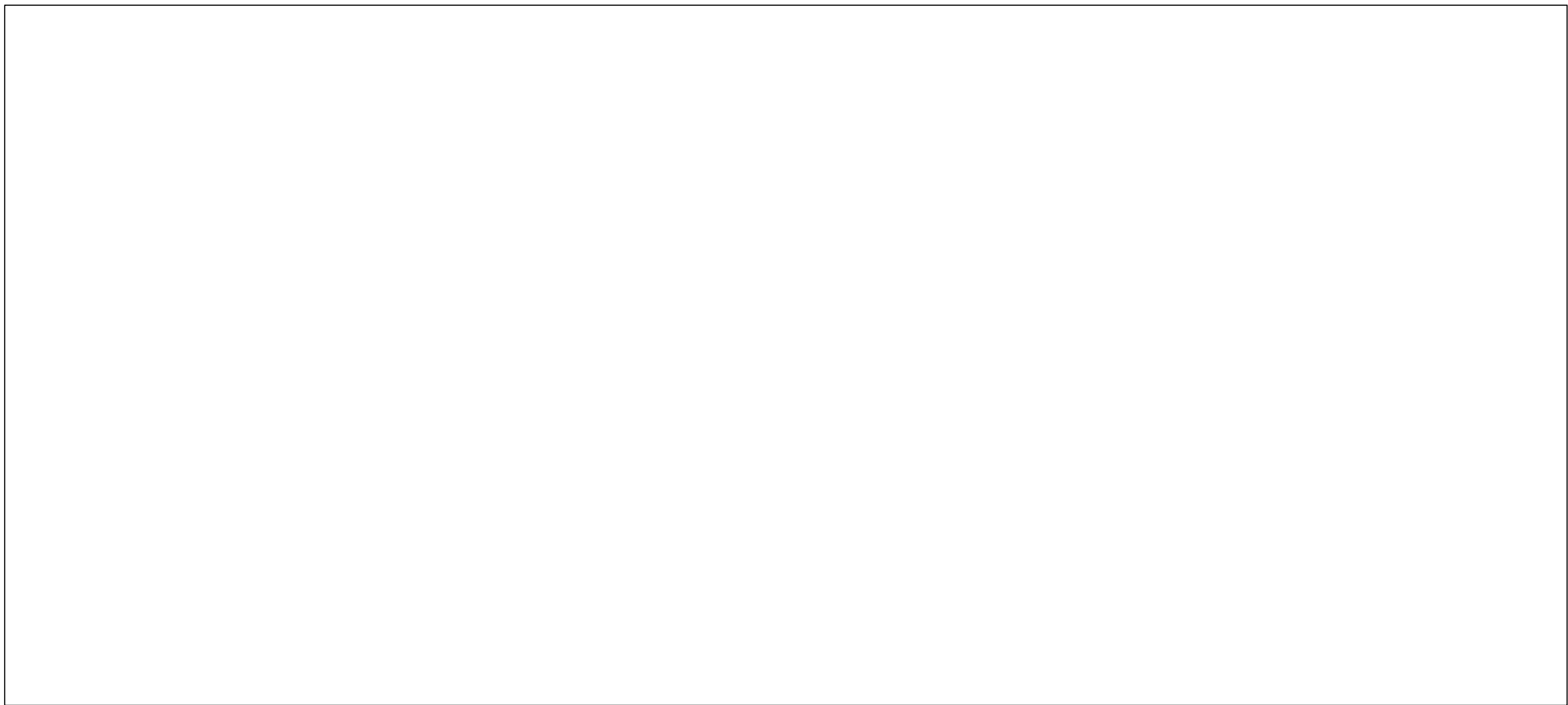
## Approximation ultra-relativiste

$$|\bar{M}|^2 = \frac{8e^4}{k^4} (q \cdot p \, q' \cdot p' + q \cdot p' \, q' \cdot p) = e^4 (1 + \cos^2 \theta^*)$$

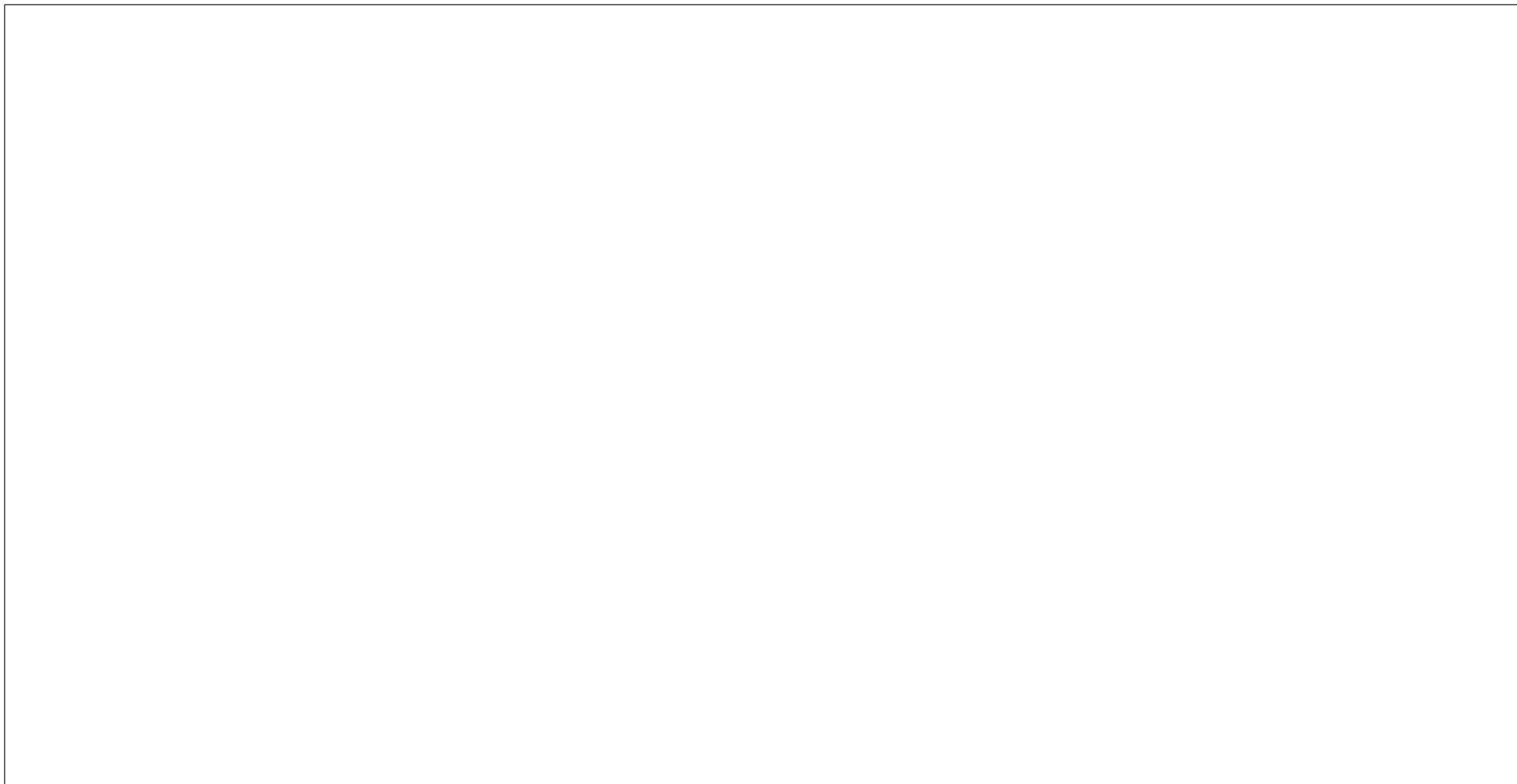
dans le repère du centre de masse











## *Application numérique*

Rétablissement des unités :

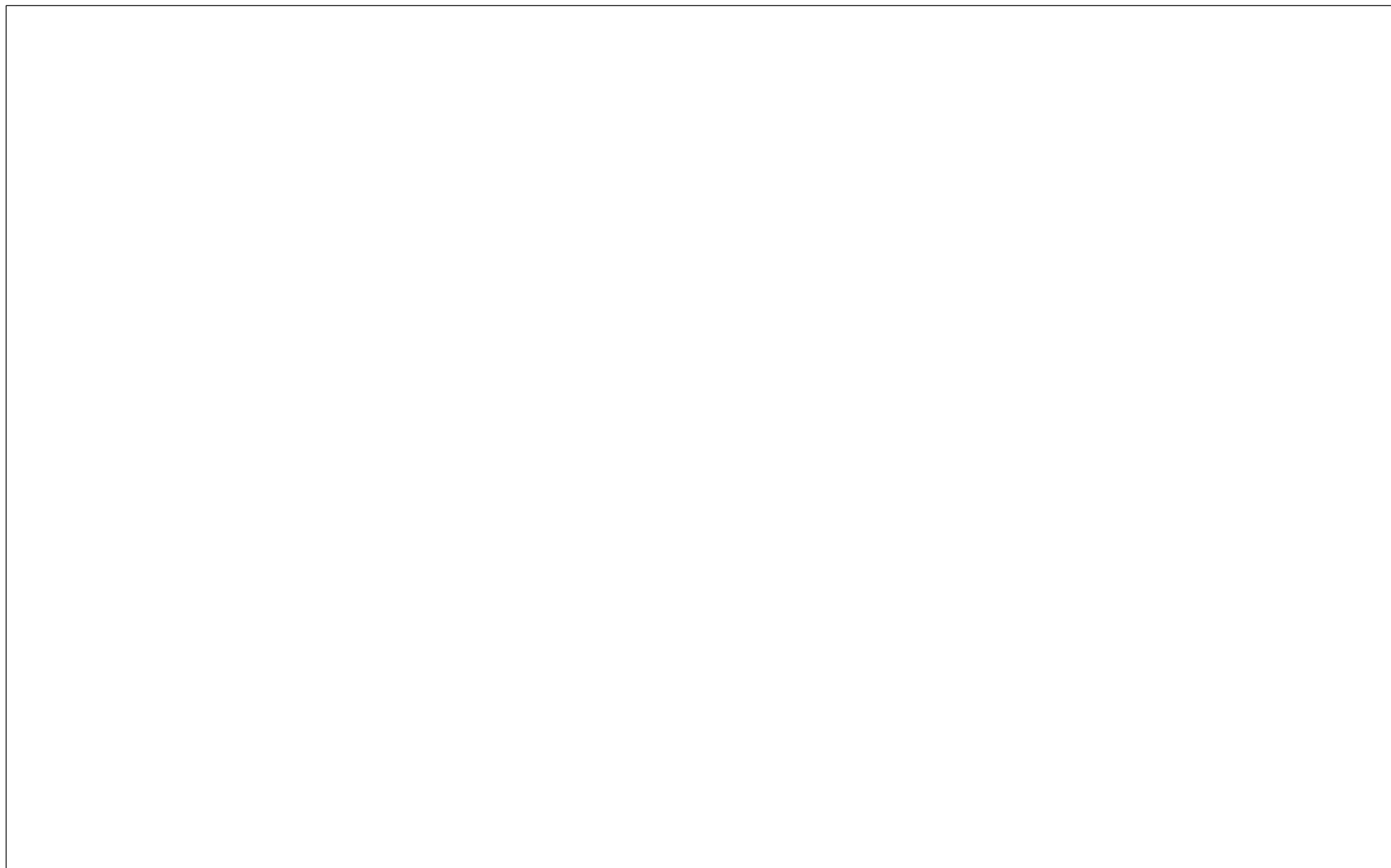
On introduit la constante de structure fine sans dimension :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$$

$$\begin{aligned}\sigma \times s &= \frac{e^4}{12\pi} = \frac{(\hbar c)^2}{12\pi} \frac{e^4}{(\epsilon_0 \hbar c)^2} = \frac{4\pi}{3} (\hbar c)^2 \alpha^2 = \frac{4\pi}{3} \times 0,389 \times 10^6 \times \frac{1}{137^2} \text{ GeV}^2 \cdot \text{nb} \\ &= 86.8 \text{ GeV}^2 \cdot \text{nb}\end{aligned}$$

en accord au % près avec l'expérience !

## *Deuxième exemple masqué*





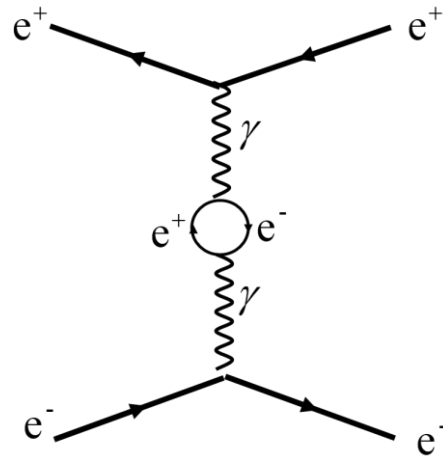
## H - Renormalisation

### 1) Diagrammes en boucle

Exemples ci-dessus : ordre le plus bas dans la série de perturbation

Les ordres plus élevés vont faire apparaître des boucles dans les diagrammes de Feynman

Exemple 1 :

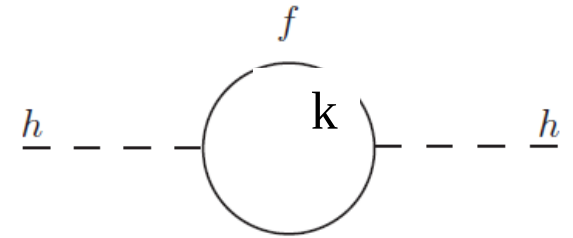




Exemple 2 :

**Propagation d'une particule, un processus complexe !**

L'introduction d'une boucle entraine l'apparition d'une quadri impulsion arbitraire  $k$ .



L'amplitude de probabilité est la somme de toutes les amplitudes

→ il faut intégrer sur tous les valeurs possibles de  $k$ .

$$iM = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \left[ (-if) \frac{i(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2 + i\epsilon} (-if) \frac{(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2 + i\epsilon} \right] = -4f^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{k^2 - m_f^2} + \frac{2m_f^2}{(k^2 - m_f^2)^2} \right]$$

Si  $|k| \rightarrow \infty$  le premier terme de l'intégrande décroît comme  $|k|^{-2}$  et l'intégrale diverge, ici comme  $\Lambda^2$  si on étend l'intégration jusqu'à  $E, |p| < \Lambda$  et si on fait  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

**La masse de la particule (pôle du propagateur) est modifiée**

(« correction radiative ») :

$$\delta m_H^2 = M \approx -\frac{\lambda_f^2}{8\pi^2} \Lambda^2 \rightarrow -\infty \text{ si } \Lambda \rightarrow \infty !$$

**Lien entre  $iM$  et  $\delta m_H^2$  :  $\delta m_H^2 = M$**

Montrons que le propagateur devient  $D(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_{H,0}^2 + M + i\varepsilon}$

En effet, le développement perturbatif donne :

$$(1) \quad D(p^2) = D_0(p^2) + D_0(p^2)[-iM]D_0(p^2) + D_0(p^2)[-iM]D_0(p^2)[-iM]D_0(p^2) + \dots$$

Et il suffit de mettre  $D_0(p^2)$  en facteur et de faire la somme de la série géométrique pour obtenir le résultat :

$$(2) \quad D(p^2) = D_0(p^2) \left[ \frac{1}{1 + iMD_0(p^2)} \right]$$

$$\text{Or : (3) } D_0(p^2) = \left[ \frac{i}{p^2 - m_{H,0}^2 + i\varepsilon} \right] \text{ donc (4) } iMD_0(p^2) = iM \left[ \frac{i}{p^2 - m_{H,0}^2 + i\varepsilon} \right] = - \left[ \frac{M}{p^2 - m_{H,0}^2 + i\varepsilon} \right]$$

$$\text{Et donc en insérant (4) dans (2) : } D(p^2) = \left[ \frac{i}{p^2 - m_{H,0}^2 + i\varepsilon} \right] \left[ \frac{1}{1 - \frac{M}{p^2 - m_{H,0}^2 + i\varepsilon}} \right] = \frac{i}{p^2 - m_{H,0}^2 - M + i\varepsilon}$$

La divergence des diagrammes en boucle est une propriété générale.

**L'utilisation de la méthode des perturbations exige que l'on puisse se débarrasser de ces quantités infinies.**

C'est ce qu'on appelle la **renormalisation de la théorie**

## XXIX. Idée générale<sup>2</sup> de la renormalisation

- On commence avec une théorie appelée nue qui dépend de paramètres comme la masse nue  $m_0$  et la charge nue  $e_0$  de l'électron (masse et charge en l'absence d'interactions)
- On définit une échelle de coupure des grandes impulsions  $\Lambda$ , appelée *cut-off*.
- On calcule alors les valeurs physiques, appelées *renormalisées*, des mêmes quantités (charge observée  $e$  et masse physique  $m$ ) en fonction des paramètres nus et de  $\Lambda$ .
- On inverse ces relations, exprimant maintenant les quantités nues en fonction des quantités renormalisées :

$$e_0 = e + \frac{1}{2} \beta_2 e^3 \ln(\Lambda / m) + \dots; m_0 = m + \gamma_1 m e^2 \ln(\Lambda / m) + \dots$$

- On exprime ensuite toute autre observable, initialement calculée en termes des paramètres nus, en termes de ces quantités physiques ou renormalisées.
- **De façon très surprenante, quand on prend la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , toutes les observables physiques ont alors une limite finie.**

---

<sup>2</sup> extrait de **J. Zinn-Justin**, Colloque de la Société Française de Physique : 'Physique et Interrogations Fondamentales ', Paris, France, 21/10/1999

### XXX. Processus de renormalisation

On illustre ici de façon simplifiée le processus de renormalisation.

On se retrouve, en simplifiant, à calculer des séries de la forme :

$$F(x) = g_0 + g_0^2 F_1(x) + g_0^3 F_2(x) + \dots$$

$g_0$  constante de couplage,  $F_i$  quantité **divergente** (infinie).

dans l'exemple ci-dessus  $g_0 = \alpha$ , en absorbant les autres facteurs dans la définition de  $F$ . On suppose ici que la théorie a comme seul paramètre  $g_0$ .

$F(x)$  est par exemple, à une constante près pour obtenir  $g_0$  comme premier terme du développement, l'amplitude de diffusion d'un électron sur un noyau et  $x$  l'énergie de l'électron incident.

**Le point clé est que toutes les quantités physiques dépendent de l'échelle d'énergie  $x$  à laquelle elles sont évaluées : la charge, la masse, les amplitudes. Le processus de renormalisation va permettre de passer d'une échelle d'énergie à une autre.**

Le processus de renormalisation va permettre de se débarrasser des quantités infinies en redéfinissant les paramètres de la théorie et en modifiant la série de perturbation.

On suppose qu'on a **mesuré**  $F$  pour  $x = \mu$  :  $F(\mu) = g_R$ .

On **régularise** la série à l'aide d'un paramètre  $\Lambda$  (limite de l'intégration dans l'exemple ci-dessus) qui permet d'avoir un développement en quantités finie. On éliminera ce paramètre à la fin de la procédure (dans l'exemple ci-dessus on fera  $\Lambda \rightarrow \infty$ ) :

$F(x)$  sera la limite quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  de :  $F_\Lambda(x, g_0, \Lambda) = g_0 + g_0^2 F_{1,\Lambda}(x) + g_0^3 F_{2,\Lambda}(x) + \dots$

On cherche à écrire  $F_\Lambda(x, g_0, \Lambda)$  en fonction de  $g_R$  et  $\mu$  (changement de variable) :

$F_\Lambda(x, g_0, \Lambda) \rightarrow F_\Lambda(x, g_R, \mu)$  pour **seulement ensuite** éliminer  $\Lambda$ .

On utilise une méthode **récursive** en augmentant l'ordre de la série de perturbation qui donne  $g_0$  en fonction de  $g_R$ :

$$\text{Ordre 1 : } g_0 = g_R ; F_\Lambda(x, g_R, \mu) = g_R$$

$$\text{Ordre 2 : } g_0 = g_R + \delta_2 g ; F_\Lambda(x, g_R, \mu) = g_R + \delta_2 g + g_R^2 F_{1,\Lambda}(x) \\ o(g_R^2)$$

On impose  $F_\Lambda(\mu, g_R, \mu) = g_R$ , il vient :  $\delta_2 g = -g_R^2 F_{1,\Lambda}(\mu)$  et :

$$F_\Lambda(x, g_R, \mu) = g_R + g_R^2 (F_{1,\Lambda}(x) - F_{1,\Lambda}(\mu))$$

Quand on élimine  $\Lambda$  (i.e.  $\Lambda \rightarrow \infty$ ), les divergences de  $F_{1,\Lambda}(x)$  et  $F_{1,\Lambda}(\mu)$  doivent se compenser pour obtenir la quantité physique  $F(x)$ .

On voit aussi qu'on a remplacé  $g_0$  par  $g_R$  et qu'en fait  $g_0$  est infini car  $\delta_2 g$  est infini puisque  $\delta_2 g = -g_R^2 F_{1,\Lambda}(\mu)$  et que  $F_{1,\Lambda}(\mu) \rightarrow \infty$  si  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Ordre 3 :  $g_0 = g_R + \delta_2 g + \delta_3 g$

$$F_\Lambda(x, g_R, \mu) = \underbrace{g_R + \delta_2 g + \delta_3 g}_{g_0} + \underbrace{(g_R^2 + 2g_R \delta_2 g)}_{g_0^2} F_{1,\Lambda}(x) + \underbrace{g_R^3}_{g_0^3} F_{2,\Lambda}(x)$$

$O(g_R^3)$

On impose  $F_\Lambda(\mu, g_R, \mu) = g_R$ , il vient avec  $\delta_2 g = -g_R^2 F_{1,\Lambda}(\mu)$  trouvé plus haut :

$$\delta_3 g = 2g_R^3 F_{1,\Lambda}(\mu)^2 - g_R^3 F_{2,\Lambda}(\mu) \text{ et :}$$

$$F_\Lambda(x, g_R, \mu) =$$

$$g_R + g_R^2 (F_{1,\Lambda}(x) - F_{1,\Lambda}(\mu)) + g_R^3 (F_{2,\Lambda}(x) - F_{2,\Lambda}(\mu) - 2F_{1,\Lambda}(\mu)(F_{1,\Lambda}(x) - F_{1,\Lambda}(\mu)))$$

$$F(x) = F(x, g_R, \mu) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} F_\Lambda(x, g_R, \mu)$$

**Le processus de renormalisation fonctionne si les divergences du facteur de  $g_R^3$  se compensent encore sans avoir à introduire une nouvelle constante  $\Lambda'$  de régularisation, et ainsi de suite à tous les ordres.**

**On dit alors que la théorie est renormalisable.**



### XXXI. Groupe de renormalisation

La quantité  $F(x)$  obtenue ne doit pas dépendre du point de référence choisi  $\mu$  :

$$F(x) = F(x, g_R, \mu) = F(x, g_R', \mu') = F(x, g_R'', \mu'') = \dots$$

et on doit pouvoir passer de  $(g_R, \mu)$  à  $(g_R'', \mu'')$  directement ou en passant par  $(g_R', \mu')$ .

Il y a donc une fonction  $f$  telle que :

$$g_R' = f(g_R, \mu / \mu') \text{ et } g_R'' = f(g_R, \mu / \mu'') = f(f(g_R, \mu / \mu'), \mu' / \mu'')$$

L'ensemble des transformations de la paramétrisation de la théorie  $(g_R, \mu) \rightarrow (g_R', \mu')$  forme ainsi un groupe, dit groupe de renormalisation.

Le groupe de renormalisation est un élément essentiel de la théorie : la prédictivité de la théorie repose sur le passage d'une mesure à une certaine échelle à une autre mesure à une autre échelle pas trop éloignée, sans avoir besoin d'invoquer les propriétés à une échelle hors de portée.

## Remarques :

1. Le processus de régularisation peut être vu comme un artifice mathématique. Il peut aussi avoir une signification plus profonde : les propriétés d'un système à une certaine échelle ne dépendent pas du détail des processus à très courte distance (ou très haute énergie). Il n'est pas besoin de connaître le détail de la physique microscopique pour étudier les propriétés d'un gaz parfait !
2. Il a été démontré que le modèle standard de la physique des particules est une théorie renormalisable : la redéfinition d'un nombre réduit des paramètres de la théorie permet le calcul perturbatif de nombreux processus physiques.

Gerard t'Hooft – Martinus Veltman 1971 - Prix Nobel 1999



Martinus Veltman  
Professor Emeritus at the University of Michigan, Ann Arbor, USA, formerly at the University of Utrecht, Utrecht, the Netherlands.



Gerardus 't Hooft  
Professor at the University of Utrecht, Utrecht, the Netherlands.

## XXXII. « Running coupling constant »

Conséquence importante : les paramètres de la théorie mesurés dépendent de l'échelle d'énergie à laquelle ils sont mesurés, et en particulier les « constantes » de couplage.

On parle de « running coupling constant ». Au premier ordre :

$$\text{QED : } \alpha(\mu) = \frac{\alpha(m_e)}{1 - \frac{2\alpha(m_e)}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu}{m_e}\right)}$$

$\alpha$  croît avec l'énergie

$$\text{QCD : } \alpha_s(\mu) = \frac{\alpha_s(\mu')}{1 + \alpha_s(\mu') \frac{(33 - 2N_f)}{6\pi} \ln \frac{\mu}{\mu'}}$$

$\alpha_s$  décroît avec l'énergie

Remarques pour  $\alpha_s$  :

- $N_f$  : nombre de saveurs de quarks de masse petite devant l'énergie considérée

| quark                | $u$ | $d$ | $s$ | $c$  | $b$  | $t$    |
|----------------------|-----|-----|-----|------|------|--------|
| masse (MeV / $c^2$ ) | 2   | 5   | 95  | 1275 | 4200 | 172500 |

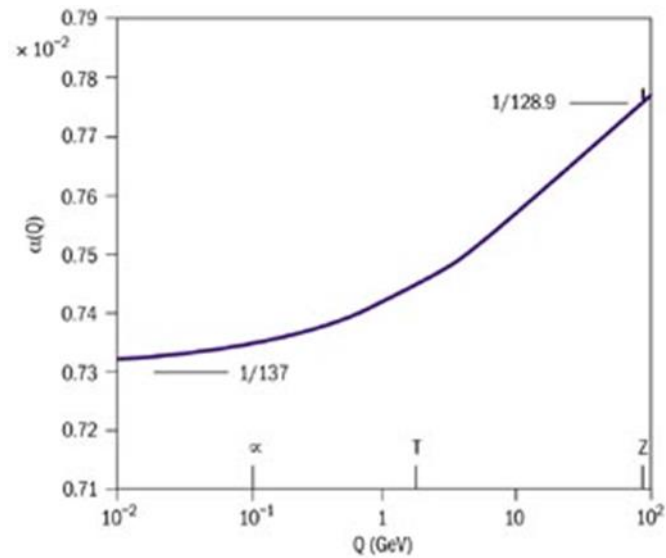
- On peut trouver une échelle  $\Lambda_{QCD}$  où la formule donne  $\infty$ .

On peut alors écrire la formule sous la forme :

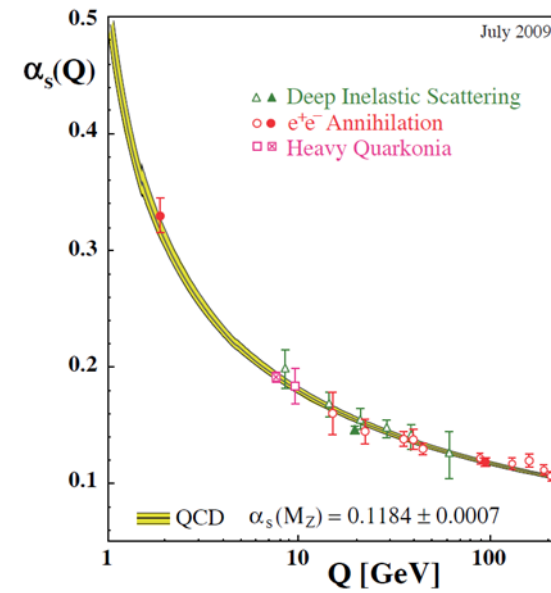
$$\alpha_s(\mu) = \frac{6\pi}{(33 - 2N_f) \ln \frac{\mu}{\Lambda_{QCD}}}$$

- Ces formules sont valables pour  $\mu > \Lambda_{QCD} \simeq 200 \text{ MeV}$

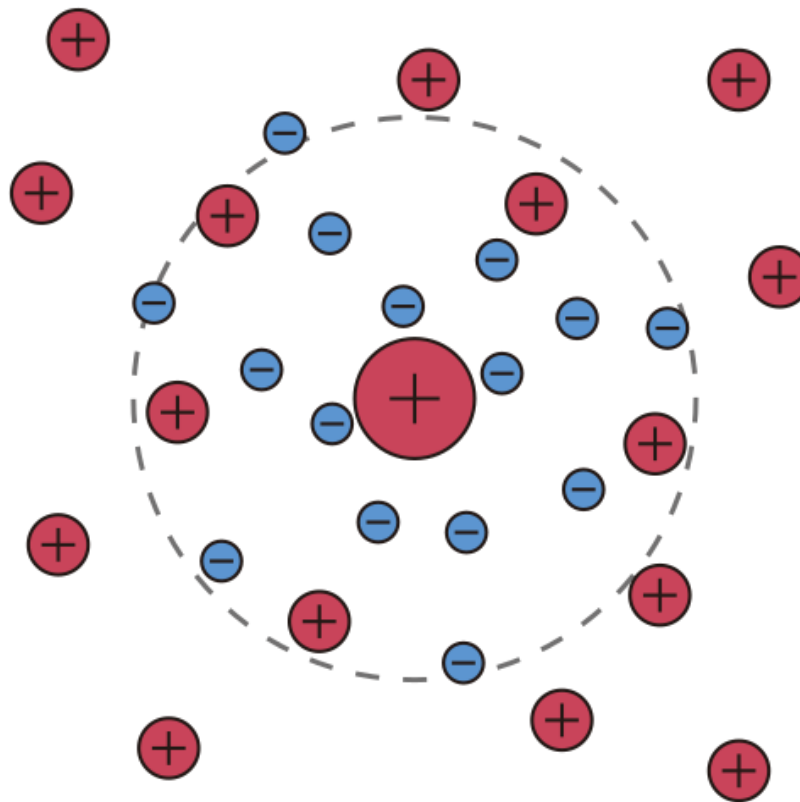
## Variation de $\alpha_{\text{QED}}$ avec l'énergie



## Variation de $\alpha_{\text{QCD}}$ avec l'énergie



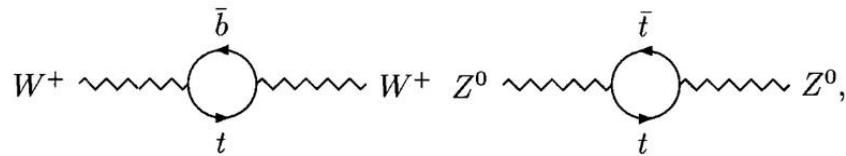
La variation de  $e$  avec l'échelle d'énergie peut se comprendre intuitivement par un effet d'écrantage de la charge nue d'un électron par les paires électron-positron virtuelles autour de la charge, de façon similaire à ce qui se passe dans un plasma (écrantage de Debye)



### XXXIII. Particules virtuelles

diagrammes de Feynman / développement perturbatif →  
échange de particules « virtuelles » ou « hors couche de masse »

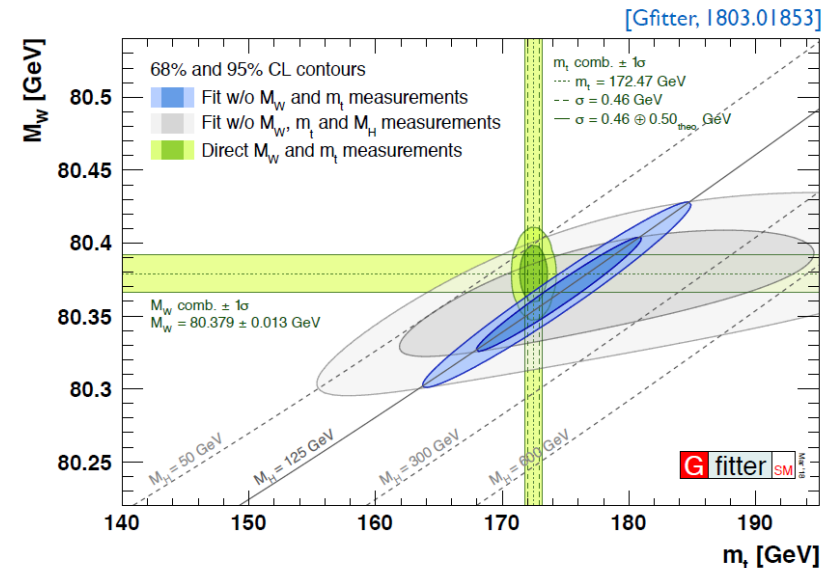
sensibilité à des particules de très haute masse sans production effective



$$M_W^2 = \cos^2 \theta_W M_Z^2 (1 + \Delta\rho)$$

$$\Delta\rho_{quarks} = \frac{3G_F m_t^2}{8\pi^2 \sqrt{2}} \quad ; \quad \Delta\rho_{Higgs} = C \ln \frac{m_H}{v}$$

$$\simeq 9,4 \times 10^{-3} \quad \quad \quad \simeq 3,0 \times 10^{-3}$$



mesures de précision →

prédiction des masses, cohérence du modèle, recherche de nouvelles particules

## I - À retenir

- Représentation en interaction
- Matrice  $S$ , matrice  $M$  :  $S = Id - iT$  ;  $\langle b | iT | a \rangle := i(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) M_{ba}$
- Taux de désintégration :

$$d\Gamma = \frac{1}{2k^0} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k) \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2q_0} \dots}_{\text{espace de phase invariant de Lorentz}} |M_{ba}|^2$$

- Section efficace de diffusion de deux particules :

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 \dots) \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3 \vec{p}'_k}{(2\pi)^3 2E'_k} \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}} |M_{ba}|^2$$

- Diagrammes de Feynman : savoir utiliser les règles de Feynman
- Notion de « running coupling constant »



## CHAPITRE 8 Interaction forte

### A - Nombre baryonique et modèle des quarks

Années 50 et 60 :

- développement des accélérateurs de particules
- découverte de très nombreux hadrons :  
mésons ( $\pi$ ,  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $K$ ...) et baryons ( $\Lambda$ ,  $\Delta$ ,  $\Sigma$ ...)
- conservation des particules lourdes  $\rightarrow$  nombre baryonique

$$\Lambda \rightarrow p\pi$$

~~$$\Lambda \rightarrow \pi\pi$$~~

$\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$ , *barus* « lourd »  
 $\mu\acute{\epsilon}\varsigma\omicron\varsigma$ , *mésos* « moyen »  
 $\lambda\epsilon\pi\tau\acute{o}\varsigma$  *leptós* « menu »

En 1961, Gell-Mann et Yuval Ne'eman proposent (indépendamment l'un de l'autre) un mode de classification des hadrons nommé « voie octuple », basée sur la symétrie de saveurs SU(3). Les hadrons étaient ainsi classés suivant leur spin, charge, et étrangeté.

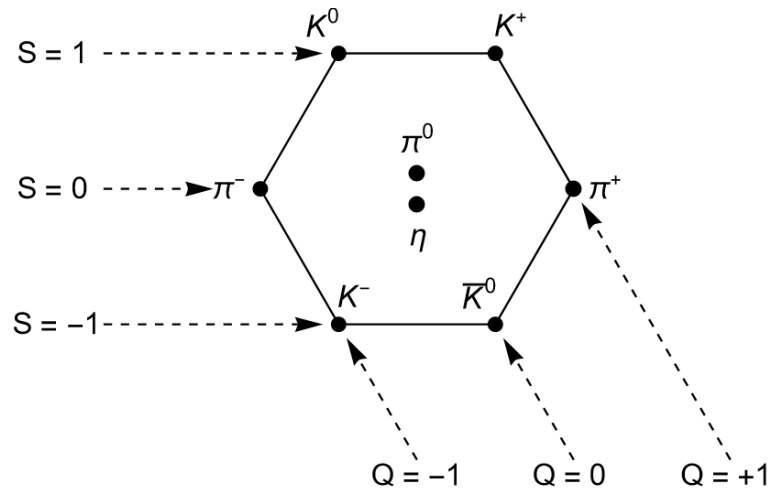
La "**Voie Octuple**" (*Eightfold Path*) est un concept fondamental du **bouddhisme** : c'est le chemin qui mène à la cessation de la souffrance et à l'illumination, et qui comporte huit éléments (compréhension juste, pensée juste, parole juste, etc.).

Cette classification ne fut réellement expliquée qu'en 1964, lorsque Gell-Mann (prix Nobel 1969) et George Zweig proposent indépendamment le modèle des quarks de **charges non entières** !  
(avec seulement les quarks u, d et s à l'époque).

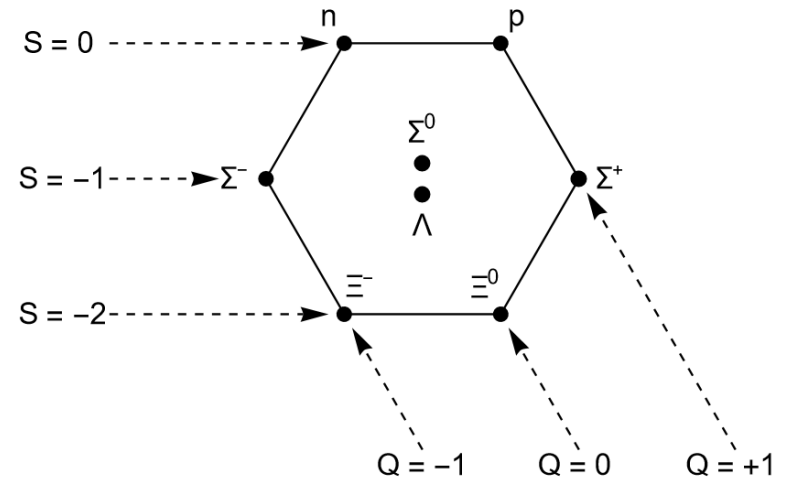
Les quarks up et down sont porteurs d'« isospin »,  
alors que le quark s porte la propriété d'« étrangeté ».

On forme les **hadrons** en associant les quarks de deux façons différentes :

- en paires quark-antiquark, qu'on appelle **mésons** ; exemples :  
 $\pi^+ = u\bar{d}$  ;  $K^+ = u\bar{s}$  ;  $K^0 = d\bar{s}$
- en triplets de quarks, qu'on appelle **baryons** ; exemples :  
 $p = uud$  ;  $n = udd$  ;  $\Delta^{++} = uuu$  ;  $\Delta^+ = uud$  ;  $\Delta^0 = udd$  ;  $\Delta^- = ddd$   
 $\Lambda = uds$  ;  $\Sigma^+ = uus$  ;  $\Sigma^0 = uds$  ;  $\Sigma^- = dds$   
 $\Xi^0 = uss$  ;  $\Xi^- = dss$   
 $\Omega^- = sss$

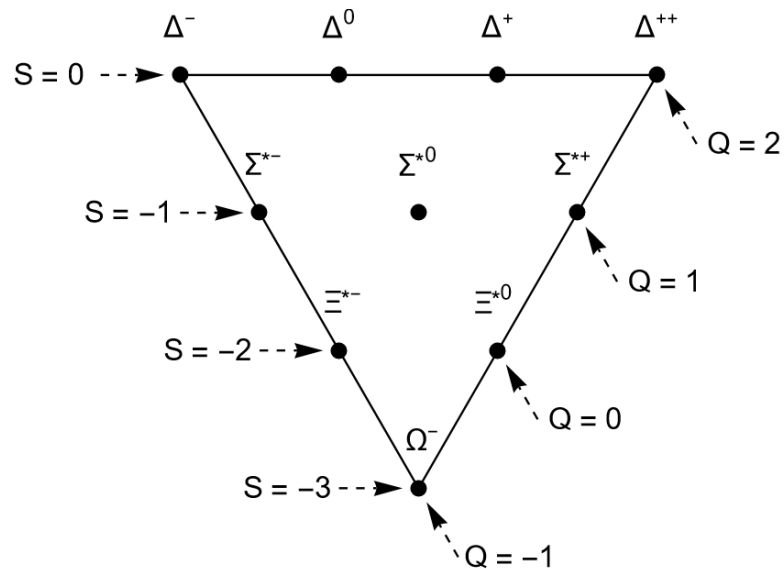


Octet des mésons  
Représentation de spin 0



Octet des baryons  
Représentation de spin 1/2

Décuplet des baryons  
Représentation de spin 3/2



**La découverte du  $\Omega^-$  en 1964** qui avait été prédit avec la bonne charge, le bon isospin, et la bonne masse dans ce cadre a été le **premier succès du modèle des quarks.**

**La preuve expérimentale de l'existence des quarks arrive en 1968 à l'accélérateur linéaire de Stanford où des expériences de diffusion profondément inélastique mettent en évidence l'existence de sous-structures dans les protons.**

## B - Nécessité de la couleur et propriétés des hadrons

### Problème :

$$\Delta^{++} \text{ et } \Omega^- : 3 \text{ quarks identiques} \quad J = \frac{3}{2} \quad l = 0$$

Fonction d'onde totalement symétrique : ~~principe de Pauli~~

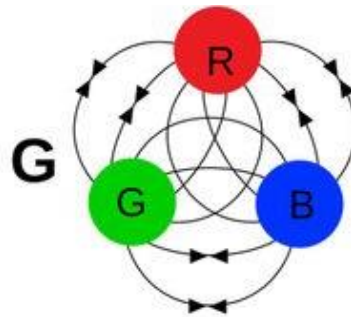
Nécessité d'une nouvelle statistique ou d'un nombre quantique nouveau

1973 : concept moderne de couleur introduit par Bardeen, Fritzsche, Gell-Mann

pour un quark :  $|\psi_c\rangle = a|r\rangle + b|g\rangle + c|b\rangle = \psi_r + \psi_g + \psi_b$

pour trois quarks il faut une fonction d'onde totalement antisymétrique :

$$\psi_c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \psi_{r1} & \psi_{r2} & \psi_{r3} \\ \psi_{g1} & \psi_{g2} & \psi_{g3} \\ \psi_{b1} & \psi_{b2} & \psi_{b3} \end{vmatrix}$$



les quarks portent un  
nombre quantique appelé  
« couleur »

L'espace de Hilbert des états d'un quark est ainsi le produit tensoriel :

$$\mathcal{E} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{C},$$

où :

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$  est l'espace des fonctions des coordonnées d'espace-temps à valeurs complexes de module carré sommable,

$\mathcal{S}$  est l'espace interne de spin, de dimension 2 (dans l'approximation non relativiste, sinon de dimension 4 comme spineurs de Dirac) car les quarks portent un spin 1/2,

$\mathcal{C}$  est l'espace interne de couleur de dimension 3.

Par la suite nombreuses preuves expérimentales supplémentaires

exemple :

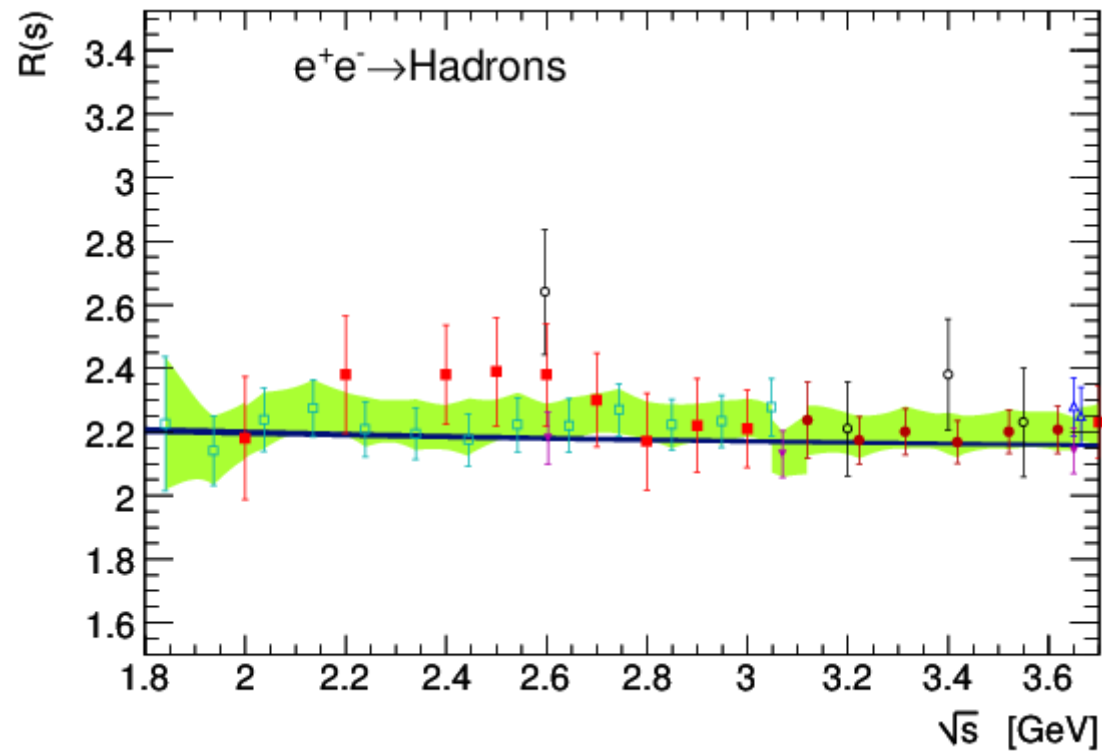
$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \Rightarrow \sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i) = \frac{4\pi\alpha^2 (Q_i/e)^2}{3s}$$

$$\Rightarrow R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \{q\bar{q}\})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_i^{m_i \leq \frac{\sqrt{s}}{2}} \frac{Q_i^2}{e^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

pour une énergie  
de 2 à 3 GeV :  
quarks u,d,s

Mesure : rapport légèrement supérieur à 2 !

Manque un facteur 3 sans les 3 couleurs de quarks



$R$  en fonction de l'énergie dans le centre de masse.  
 Les points avec barres d'erreurs correspondent à différentes mesures.  
 La zone en vert représente la combinaison des mesures.  
 La ligne est la prédiction théorique.  
*Référence : Document server CERN<sup>®</sup>*



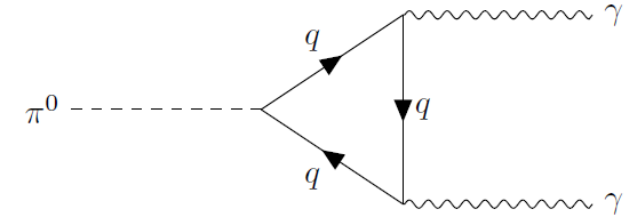
Autres preuves :

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \simeq \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{16\pi^3 f_\pi^2} N_c^2 \left( \sum Q_q^2 T_q^3 \right)^2 = \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2} \frac{N_c^2}{9}$$

$$\simeq 7,7 \text{ eV avec } m_\pi = 135 \text{ MeV et } f_\pi = 93 \text{ MeV}$$

en accord avec l'expérience si  $N_c = 3$

(anomalie axiale triangulaire)



Production de jets de hadrons : événements à 2, 3, 4 jets  
(émission de paires quarks antiquarks, et en plus de gluons).

## C - Chromodynamique quantique

### 1) Lagrangien d'interaction

invariance de jauge locale :

phase  $\rightarrow$  interaction électromagnétique

couleur  $\rightarrow$  interaction forte

$$\text{espace des couleurs : } |r\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un quark d'une **saveur** donnée  $f$  s'exprime comme :

$$q = f_1 \otimes |r\rangle + f_2 \otimes |g\rangle + f_3 \otimes |b\rangle = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$q$  est un vecteur formé de trois champs d'opérateurs fermioniques

Lagrangien libre de Dirac :  $\mathcal{L} = \bar{q}(i\not{\partial} - m)q = \sum_{i=1}^3 \bar{f}_i (i\not{\partial} - m) f_i$

Invariant par transformation globale spéciale unitaire dans l'espace des couleurs :

$q \rightarrow q' = U q$  avec  $U \in \mathcal{SU}(3)$  groupe des matrices unitaires  $3 \times 3$  de déterminant 1

une matrice  $U$  de  $\mathcal{SU}(3)$  a 8 paramètres réels indépendants :

- 9 éléments complexes soit 18 réels
- 9 contraintes par unitarité,  $(U^\dagger U = I_3) \rightarrow 9$  relations « réelles »
- 1 relation pour le déterminant

On veut l'invariance par transformation locale  $q \rightarrow q' = U(x)q$

mais :  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \bar{q} i \gamma^\mu (U^\dagger(x) \partial_\mu U(x)) q$

*Remarque 1 :*

$\mathcal{U}(3)$  aurait été plus naturel :

symétrie globale OK  $\rightarrow$  conservation du nombre baryonique

mais symétrie locale exclue pour des raisons expérimentales :

prédiction de l'existence d'un gluon sans masse et non coloré induisant une interaction à longue portée entre les hadrons :

$\mathcal{U}(3) = \mathcal{U}(1) \times \mathcal{SU}(3) \leftrightarrow U \text{ unitaire} = \exp(i\alpha) \times SU \text{ spéciale unitaire}$

*Remarque 2 :*

Les états à 1 particule ou 1 antiparticule sont donnés par :

$$|q_i\rangle = b_i^\dagger |0\rangle \quad \text{et} \quad |\bar{q}_i\rangle = d_i^\dagger |0\rangle$$

Or le champ d'opérateurs décrivant les quarks comprend des termes  $b_i^\dagger$  et  $d_i$ . Ces opérateurs doivent donc se transformer de la même façon.

En conséquence les états à une antiparticule doivent se transformer suivant :

$$d_i' = \sum_{j=1}^3 U_{ij} d_j \Rightarrow d_i^{\dagger'} = \sum_{j=1}^3 U_{ij}^* d_j^\dagger \Rightarrow |\bar{q}_i'\rangle = \sum_{j=1}^3 U_{ij}^* |\bar{q}_j\rangle$$

De la même manière que la charge électrique caractérise la transformation de jauge d'un champ chargé, la couleur caractérise la transformation de jauge des quarks. Ainsi, les antiquarks ne portent pas les mêmes couleurs que les quarks, mais ils portent ce qu'on peut appeler des anticouleurs.

$\mathcal{SU}(3)$  : groupe de Lie à 8 paramètres réels  $\rightarrow$   
matrices de  $\mathcal{SU}(3)$  engendrées par 8 « générateurs »  $T_a$  :

$$U = \exp\left(-ig_s \sum_{a=1}^8 \alpha^a T_a\right) \text{ où les } \alpha^a \text{ sont des réels et les } T_a \text{ des matrices } 3 \times 3$$

La constante  $g_s$  jouera pour l'interaction forte le même rôle que  $e$  pour l'interaction électromagnétique, elle mesure l'intensité de l'interaction.

Comme  $U$  est unitaire de déterminant 1, les matrices  $T_a$  sont hermitiennes et de trace nulle.

On pose :  $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$

$\lambda_a$  : matrices de Gell-Mann

Les normalisations sont choisies pour avoir  $Tr(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On introduit les constantes de structure du groupe  $f_{abc}$  définies par:

$$\left[ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}$$

Propriétés :

$$f_{abc} = f_{cab} = f_{bca} = -f_{bac} = -f_{acb} :$$

antisymétrie par échange de deux indices et  
invariance par permutation circulaire des indices

Valeurs :

$$f_{123} = 1; f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2; f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$$

Les constantes non définies par les relations ci-dessus sont nulles.

**Remarque :**

Pour les antiquarks, ce sont les matrices  $U^*$  et donc  $-T_a^*$  qui interviennent (elles ont les mêmes relations de commutation), leurs charges de couleur sont « opposées ».



Le lagrangien transformé de jauge locale  $\mathcal{L}'$  contient un nouveau terme :

$$\bar{q} i \gamma^\mu (U^\dagger(x) \partial_\mu U(x)) q \text{ avec } U(x) = \exp\left(-i g_s \sum_{a=1}^8 \alpha^a(x) T_a\right)$$

Le terme apparu dans  $\mathcal{L}'$  s'écrit donc :

$$\bar{q} i \gamma^\mu (U^\dagger(x) \partial_\mu U(x)) q = \bar{q} i \gamma^\mu \left( U^\dagger \left( -i g_s \partial_\mu \alpha^a(x) \frac{\lambda_a}{2} \right) U \right) q$$

On introduit la **dérivée covariante** contenant 8 nouveaux champs (**8 gluons**) :

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a$$

La transformation de jauge des champs de gluons doit rétablir l'invariance du lagrangien :

$$G_\mu^a = G_\mu^a + \underbrace{g_s \alpha^b(x) f_{abc} G_\mu^c}_{\text{terme nouveau par rapport à l'électromagnétisme}} + \partial_\mu \alpha^a(x)$$

(position des indices romains haute ou basse indifférente)

Le lagrangien prend la forme (attention  $q$  a trois composantes de couleur !) :

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i \gamma^\mu D_\mu - m) q = \underbrace{\bar{q} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) q}_{\text{termes cinétiques}} - \underbrace{g_s \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q G_\mu^a}_{\text{termes d'interaction}}$$

On a ainsi la correspondance entre les huit gluons et les matrices de Gell-Mann :

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{g} + g\bar{r})$$

$$g_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(r\bar{g} - g\bar{r})$$

$$g_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g})$$

$$g_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{b} + b\bar{r})$$

$$g_5 = \frac{i}{\sqrt{2}}(r\bar{b} - b\bar{r})$$

$$g_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(g\bar{b} + b\bar{g})$$

$$g_7 = \frac{i}{\sqrt{2}}(g\bar{b} - b\bar{g})$$

$$g_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$$

## Démonstration de l'invariance de jauge (exercice)

On considère une transformation infinitésimale :

$$dU = \exp\left(-ig_s \sum_{a=1}^8 d\alpha^a T_a\right) = Id - ig_s d\alpha^a \frac{\lambda_a}{2}$$

On développe au premier ordre

(attention à la sommation sur les indices répétés et aux indices muets) :

$$q \rightarrow q' = \left(1 - ig_s d\alpha^a \frac{\lambda_a}{2}\right) q \quad ; \quad G^a_{\mu} \rightarrow G'^a_{\mu} = G^a_{\mu} + g_s d\alpha^b f_{abc} G^c_{\mu} + \partial_{\mu} d\alpha^a$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{q} \left( 1 + ig_s d\alpha^b \frac{\lambda_b}{2} \right) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \left( 1 - ig_s d\alpha^a \frac{\lambda_a}{2} \right) q -$$

$$g_s \bar{q} \left( 1 + ig_s d\alpha^e \frac{\lambda_e}{2} \right) \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \left( 1 - ig_s d\alpha^d \frac{\lambda_d}{2} \right) q \left( G^a_\mu + \underline{g_s d\alpha^b f_{abc} G^c_\mu} + \partial_\mu d\alpha^a \right)$$

Le terme nouveau souligné va compenser les termes en  $g_s^2$  facteurs de  $G^a_\mu$  encadrés ci-dessous, qui induisent un commutateur des matrices de Gell-Mann :

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = \bar{q} ig_s d\alpha^a \frac{\lambda_a}{2} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q + \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \left( -ig_s d\alpha^a \frac{\lambda_a}{2} \right) q$$

$$\boxed{-g_s \bar{q} ig_s d\alpha^e \frac{\lambda_e}{2} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q G^a_\mu + g_s \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \left( ig_s d\alpha^d \frac{\lambda_d}{2} \right) q G^a_\mu}$$

$$-g_s \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q \left( \underline{g_s d\alpha^b f_{abc} G^c_\mu} + \partial_\mu d\alpha^a \right)$$

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = \bar{q} i g_s d\alpha^a \frac{\lambda_a}{2} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q + \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \left( -i g_s d\alpha^a \frac{\lambda_a}{2} \right) q$$

$$\boxed{-g_s \bar{q} i g_s d\alpha^a \frac{\lambda_a}{2} \gamma^\mu \frac{\lambda_b}{2} q G^b_\mu + g_s \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_b}{2} \left( i g_s d\alpha^a \frac{\lambda_a}{2} \right) q G^b_\mu} \text{ (en renommant des indices muets)}$$

$$-g_s \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \left( \underline{g_s d\alpha^b f_{abc} G^c_\mu} + \partial_\mu d\alpha^a \right) q$$

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = \boxed{-i g_s^2 \bar{q} \left( d\alpha^a i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \gamma^\mu \right) q G^b_\mu} - g_s \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q \underline{g_s d\alpha^b f_{abc} G^c_\mu}$$

$$= g_s^2 f_{abc} d\alpha^a \bar{q} \left( \frac{\lambda_c}{2} \right) \gamma^\mu q G^b_\mu - g_s^2 f_{abc} d\alpha^b \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q G^c_\mu$$

$$= -g_s^2 f_{acb} d\alpha^a \bar{q} \left( \frac{\lambda_c}{2} \right) \gamma^\mu q G^b_\mu + g_s^2 f_{bac} d\alpha^b \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q G^c_\mu$$

(car  $f_{abc}$  est antisymétrique par échange de deux indices)

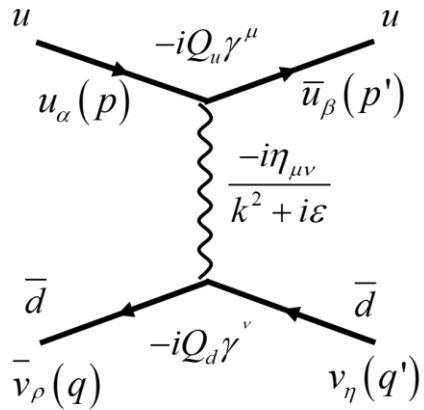
= 0 (car  $f_{abc}$  est invariant par permutation circulaire des indices)

## Comparaison avec QED

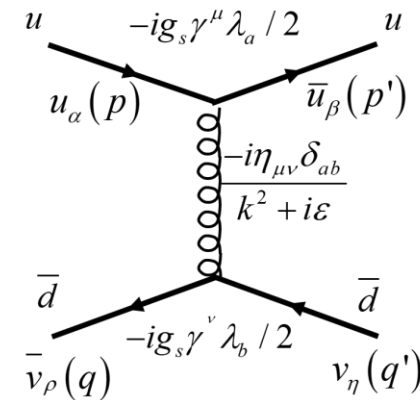
$$Q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \rightarrow g_s\bar{q}\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}qG^a_\mu = \sum_{\alpha,\beta} g_s\bar{q}_\alpha\gamma^\mu\frac{(\lambda_a)_{\alpha\beta}}{2}q_\beta G^a_\mu$$

(avec  $\alpha, \beta$  : indices de couleur)

**Exemple :**  $u\bar{d} \rightarrow u\bar{d}$



$$iM = \bar{v}_\rho(q)(-iQ_d\gamma^\nu)v_\eta(q')\frac{-i\eta_{\nu\mu}}{k^2+i\epsilon}\bar{u}_\beta(p')(-iQ_u\gamma^\mu)u_\alpha(p)$$



$$iM = \bar{v}_\rho(q)(-ig_s)\gamma^\nu\frac{(\lambda_b)_{\rho\eta}}{2}v_\eta(q')\frac{-i\eta_{\nu\mu}\delta_{ab}}{k^2+i\epsilon}\bar{u}_\beta(p')(-ig_s)\gamma^\mu\frac{(\lambda_a)_{\beta\alpha}}{2}u_\alpha(p)$$

$$Q_u Q_d \rightarrow C g_s^2 \text{ avec le facteur de couleur } C = \left( \frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 (\lambda_a)_{\rho\eta} (\lambda_a)_{\beta\alpha} \right)$$

## Analogie

$$V_{QED} = -\frac{Q_u Q_d}{e^2} \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{2}{9} \alpha \frac{1}{r} \text{ répulsif} \quad \rightarrow \quad V_{QCD} \stackrel{?}{=} -C \frac{g_s^2}{4\pi r} = -C \alpha_s \frac{1}{r} \text{ attractif si } C > 0$$

Prenons  $u_r \bar{d}_g \rightarrow u_r \bar{d}_g$  :

$$C = \left( \frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 (\lambda_a)_{22} (\lambda_a)_{11} \right) = \frac{1}{4} \left( -1 + \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{6} ; \text{ le potentiel est répulsif !}$$

Si on prend  $u_r \bar{d}_r \rightarrow u_r \bar{d}_r$ , on obtient  $C > 0$ , le potentiel est attractif :

$$C = \left( \frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 (\lambda_a)_{11} (\lambda_a)_{11} \right) = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Si on considère les autres processus possibles  $u_r \bar{d}_r \rightarrow u_g \bar{d}_g$  et  $u_r \bar{d}_r \rightarrow u_b \bar{d}_b$ ,

on obtient alors  $C = \frac{4}{3}$  (exercice), globalement attractif

*Note : un singlet de couleur doit rester singlet de couleur*

## Lagrangien pour les gluons.

Le lagrangien doit être complété par un terme cinétique pour les gluons :

QED :  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  (avec  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ) est invariant de jauge

QCD :  $-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}$  n'est pas invariant de jauge avec  ~~$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu$  !~~

L'invariance de jauge est obtenue en prenant :

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g_s f_{abc} G^b_\mu G^c_\nu$$

Le terme supplémentaire a pour origine la non-commutativité ( $\exists\{a,b,c\} f_{abc} \neq 0$ ) du groupe de jauge.

Une première conséquence est l'universalité de la constante de couplage forte à la différence de QED où les particules portent des charges différentes.



Le lagrangien des gluons s'écrit donc :

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} \left\{ \underbrace{\left( \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu \right) \left( \partial^\mu G^{a\nu} - \partial^\nu G^{a\mu} \right)}_{\text{terme cinétique}} \right. \\ \left. - g_s f_{abc} \underbrace{\left[ \left( \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu \right) G^{b\mu} G^{c\nu} + \left( \partial^\mu G^{a\nu} - \partial^\nu G^{a\mu} \right) G^b_\mu G^c_\nu \right]}_{\text{vertex à trois gluons}} \right. \\ \left. + g_s^2 f_{abc} f_{ade} \underbrace{G^b_\mu G^c_\nu G^{d\mu} G^{e\nu}}_{\text{vertex à quatre gluons}} \right\}$$

non commutativité du groupe de jauge  $\Rightarrow$  interactions gluons-gluons  
les gluons portent des charges de couleur (une couleur et une anticouleur)

C'est une deuxième nouveauté par rapport à QED où le photon n'est pas chargé

## Propriétés (liberté asymptotique, intensité)

### Confinement de la couleur

Des calculs similaires à ceux effectués montrent que les états d'énergie minimale sont les états singlets de couleur (invariants par  $SU(3)$ ), mais autorisent des états non singlets.

Cependant, l'analogie avec QED est inadéquate :

- $\alpha_s \simeq 0,5$  (à 1 GeV)  $\gg \alpha = 1/137$  : le développement perturbatif est inadapté
- les gluons interagissent entre eux, au contraire des photons

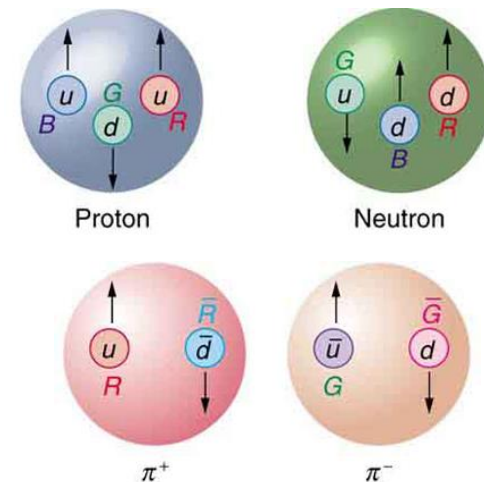
Expérimentalement, on n'a jamais observé de quark isolé, ni de gluon isolé.

Les états liés de quarks (ou hadrons) observés sont :

- baryons : 3 quarks
- mésons : paire quark-antiquark

Depuis quelques années aussi :

- « pentaquarks » : 4 quarks et un antiquark
- « tétraquarks » : 2 quarks et deux antiquarks



Tous ces états peuvent être singlets de couleur.

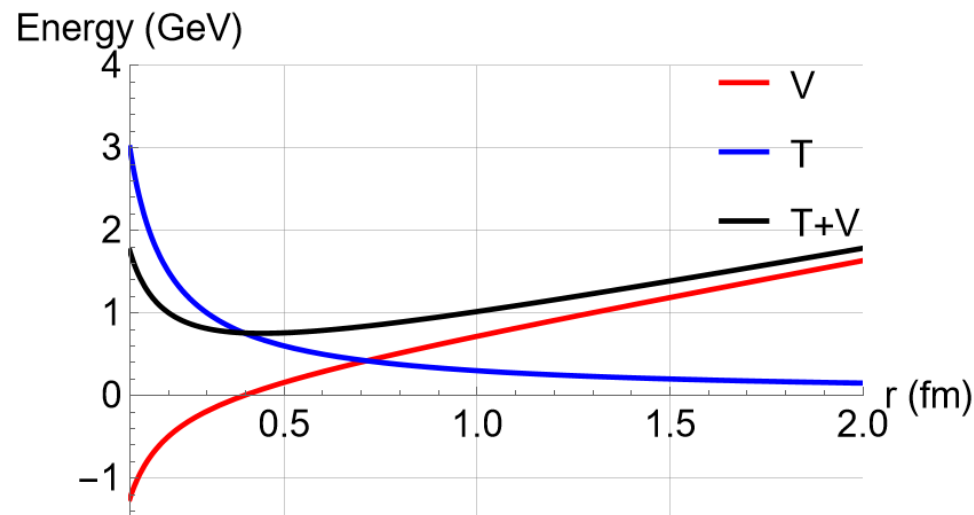
On dit que les quarks et les gluons sont **confinés**.

La propriété de confinement n'est pas analytiquement démontrée.

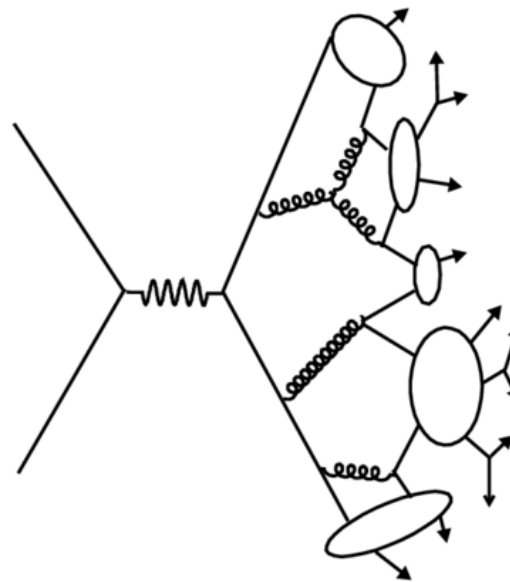
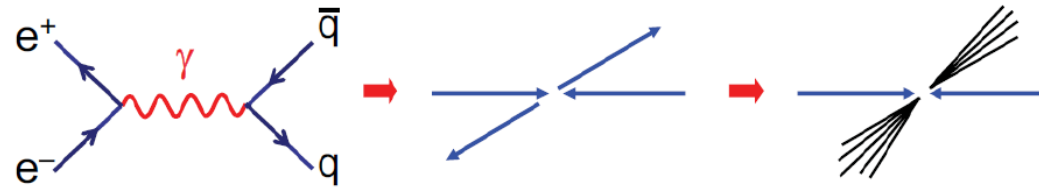
Pour des distances **pas trop petites**, l'énergie potentielle d'interaction  $q\bar{q}$  peut être grossièrement approchée par :

$$V(r) \simeq -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \hbar c + k r, \text{ avec } k \simeq 0,85 \text{ GeV} \cdot \text{fm}^{-1}$$

(avec  $T(r) \sim pc \sim 3\hbar c / 2r$ ,  $E$  est minimum pour une taille de l'ordre du fermi)



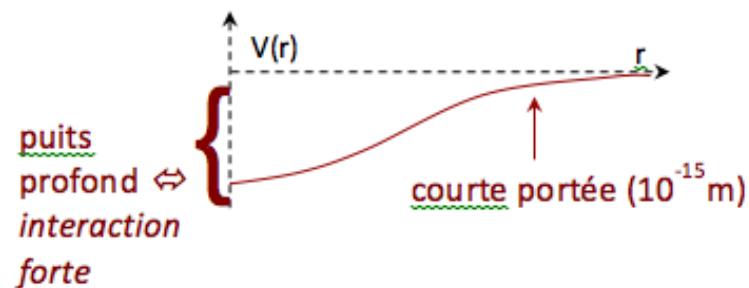
Si on essaie de séparer les constituants, l'énergie fournie entraîne la création de paires particules-antiparticules, c'est le processus dit d'**hadronisation**.



## *Courte portée*

Contrairement à l'interaction électromagnétique  
l'interaction forte est à très courte portée :

- à cause de l'interaction des gluons entre eux, la couleur est confinée dans un volume de quelques  $\text{fm}^3$ ;
- le potentiel n'est attractif que jusqu'à une distance de quelques fermis.



Formes du potentiel  $\pm$   
empiriques

Calcul difficile  $\rightarrow$  approximations  
et calcul numérique

## Liberté asymptotique

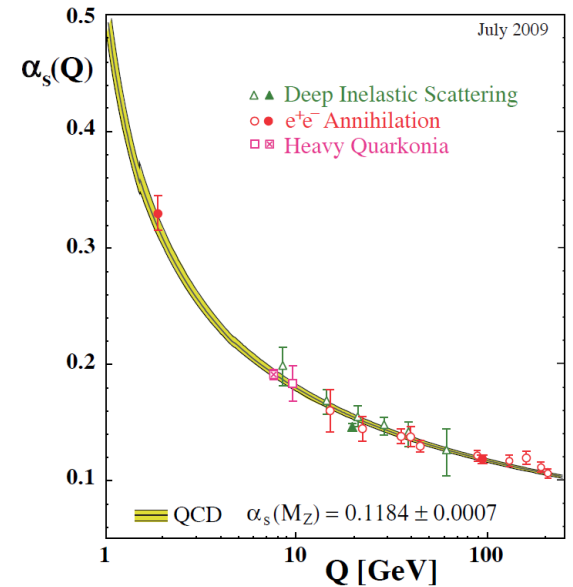
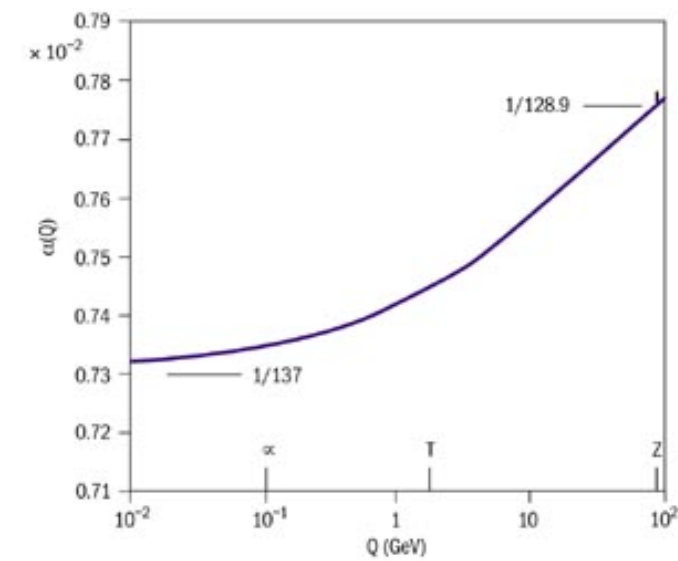
Renormalisation des constantes de couplage :

$$\text{QED} : \alpha = \frac{e^2}{4\pi} : \text{croît avec l'énergie}$$

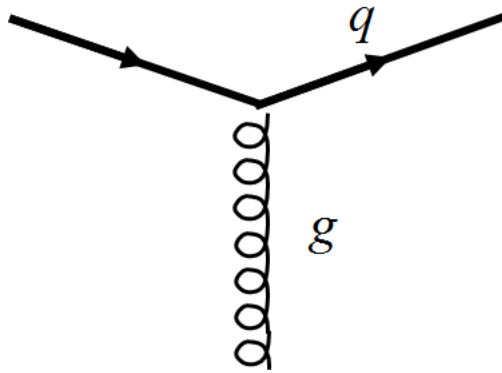
$$\text{QCD} : \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} : \text{décroît avec l'énergie}$$

À très haute énergie ou à très courte distance  $\alpha_s$  est petit.

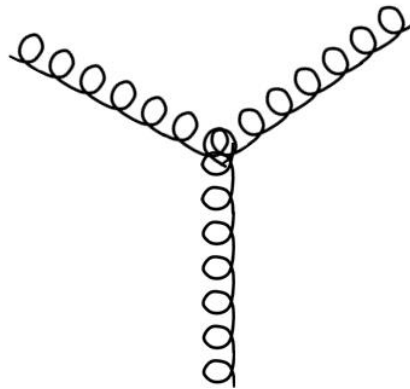
Alors le développement perturbatif peut s'appliquer avec précision



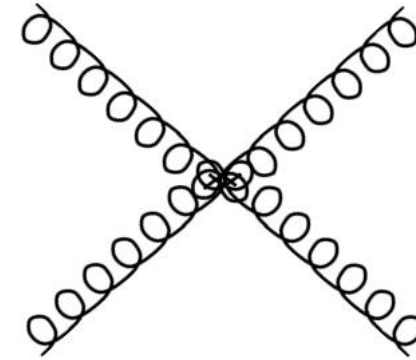
## 2) Diagrammes de Feynman



Interaction quark gluon



Interaction à 3 gluons



Interaction à 4 gluons

## D - À retenir

- Nombre quantique de couleur
- Groupe de jauge  $SU(3)_C$ , 8 bosons vecteurs « colorés » sans masse (gluons)
- Matrices de Gell-Mann, facteur de couleur
- Etats liés : baryons et mésons,
- Propriétés de l'interaction forte :  
interactions entre gluons, confinement, courte portée
- Processus d'hadronisation
- Constante de couplage  $\alpha_s$  :
  - grande à basse énergie :  $\alpha_s \simeq 0,5$  à 1 GeV
  - décroît avec l'énergie  $\rightarrow$  liberté asymptotique



## CHAPITRE 9 Interaction faible

### A - Propriétés générales

- Historiquement, l'interaction faible s'est manifestée à travers la **désintégration  $\beta$**  des noyaux
- Toutes les particules de matière sont sensibles à l'interaction faible
- Seule l'interaction faible peut changer la nature des quarks ou des leptons
- Les particules portent un nombre quantique interne, l'**isospin faible** ( $T = 1/2$ )

L'interaction faible est construite sur l'invariance de jauge locale associée aux transformations unitaires spéciales dans l'espace de l'isospin.

- Il y a **trois bosons vecteurs, massifs** :  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$

- L'interaction faible est intriquée avec l'interaction électromagnétique (interaction *électrofaible*), les constantes de couplage sont du même ordre de grandeur.
- L'interaction est faible (à **basse énergie**) à cause de ses **bosons vecteurs massifs**:

$$M_W = 80 \text{ GeV}/c^2 \quad ; \quad M_Z = 91 \text{ GeV}/c^2$$

- Pour la même raison, l'interaction faible est à très **courte portée**.

$$R \sim \frac{\hbar c}{M_{W,Z} c^2} \sim 2 \times 10^{-3} \text{ fm} !$$

- L'interaction faible viole les trois symétries discrètes que sont :
  - La parité :  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$
  - La conjugaison de charge : *particule*  $\rightarrow$  *antiparticule*
  - Le renversement du temps :  $t \rightarrow -t$

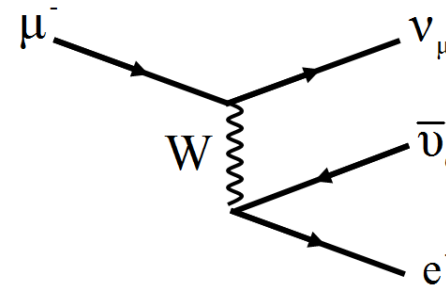
## B - Courants chargés : bosons $W^\pm$

### 1) Interaction faible et leptons

- Par « émission ou absorption » d'un boson  $W$  :  
un lepton chargé se transforme en **son** neutrino **associé** ou vice-versa  
un antilepton chargé se transforme en **son** antineutrino **associé** ou vice-versa
- L'annihilation d'un boson  $W$  crée une paire lepton chargé antineutrino **associé** ou une paire antilepton chargé neutrino **associé**

Exemple :  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$

$$\tau_\mu \simeq 384\pi \frac{\sin^4 \theta_w}{\alpha^2} \left( \frac{M_w}{m_\mu} \right)^4 \frac{\hbar}{m_\mu c^2} \simeq 2,2 \mu s$$



Constante de couplage faible :  $\frac{g_w^2}{4\pi} = \frac{\alpha}{\boxed{\sin^2 \theta_w} \simeq 0.231} \simeq \frac{1}{32}$   $\left( \alpha = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} \right)$

Les lois de conservation sont respectées dans le **bilan global** de la réaction

Nota bene :

Pour la conservation de la masse invariante, seules les particules initiales et finales doivent être considérées, et **pas les particules échangées, virtuelles, « hors couche de masse »**, dans le processus

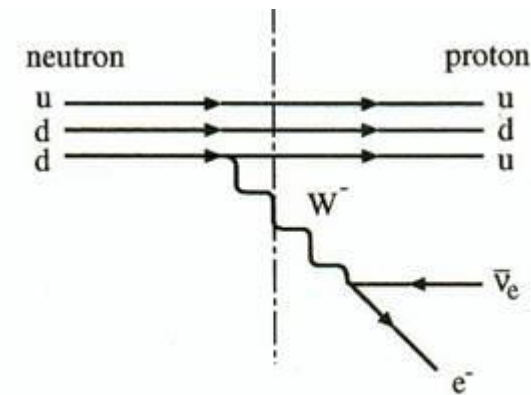
Ainsi, la masse du boson  $W$  est très supérieure à celle du muon, mais la désintégration du muon est quand même possible

## 2) Interaction faible et quarks

- L'interaction faible peut changer tout quark de charge  $2/3$  en tout quark de charge  $-1/3$ , et vice-versa

Pour les quarks, les familles se mélangent donc dans l'échange des  $W$   
la saveur des quarks est définie par l'interaction forte, ce qui n'est pas le cas des leptons

- Conséquence :  
la désintégration du neutron (libre) :  
 $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  possible car  $m_n > m_p$   
temps de vie du neutron : 880 s ( $\sim 15$  min)



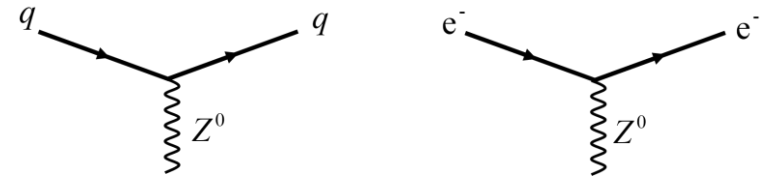
## C - Courants neutres : boson $Z^0$

L'interaction faible à courant neutre procède :

- par échange de bosons  $Z^0$

Dans ce cas le lepton ou le quark ne change pas de nature

- ou par annihilation/création de bosons  $Z^0$  et création/annihilation d'une paire lepton-antilepton ou quark-antiquark

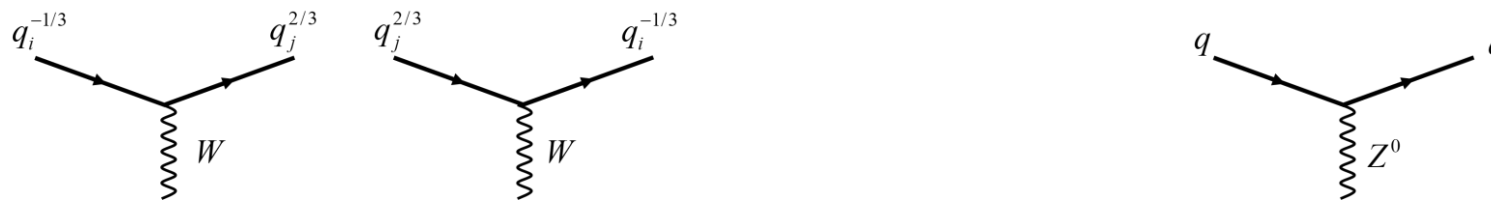


## D - Vertex de l'interaction faible

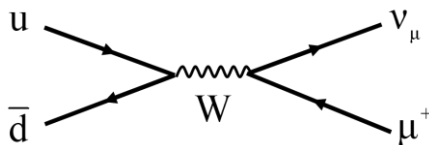
- Les vertex de l'interaction faible pour les fermions :  
Cas des leptons (idem pour les deux autres familles) :



**Cas des quarks :** pour les quarks, les familles se mélangent dans l'échange des  $W$



- On peut aussi changer les lignes entrantes en lignes sortantes et vice –versa en changeant la particule correspondante en son antiparticule
- On peut aussi tourner ces diagrammes de  $90^\circ$ , une des particules devenant une antiparticule



- Il y a aussi tous les processus avec les antiparticules correspondantes

- Les bosons vecteurs portent aussi un isospin (1) et interagissent entre eux

Vertex à trois bosons :

$$Z^0 W^+ W^-$$

$$\gamma W^+ W^-$$

Vertex à quatre bosons :

$$Z^0 Z^0 W^+ W^-$$

$$\gamma \gamma W^+ W^-$$

$$\gamma Z^0 W^+ W^-$$

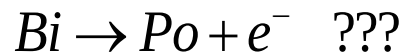
$$W^+ W^- W^+ W^-$$



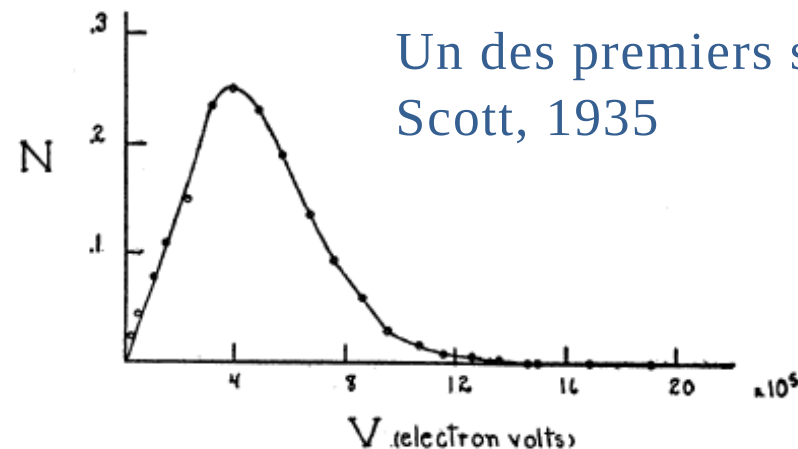
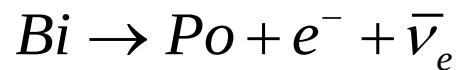
## E - Neutrinos

### 1) Prédiction

- Existence suggérée par Pauli en 1930
- Pb : violation apparente de la conservation de l'énergie et du moment angulaire dans les désintégrations  $\beta$  des noyaux ?
- Observation dès 1911 d'un spectre continu pour l'électron émis dans la désintégration du radium E (bismuth 210) :



Solution :



#### XXXIV. Désintégration à deux corps

noyau  $i \rightarrow$  noyau  $f$  + particule  $1$

- Conservation de l'énergie impulsion dans le repère du noyau  $i$  :

$$\vec{p}_f = -\vec{p}_1 \Rightarrow m_i c^2 = \sqrt{m_f^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2}$$

- Une seule solution pour  $p_1$  ( $>0$ ) (si  $m_f + m_1 < m_i$  !)

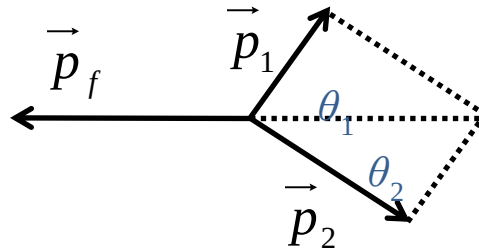
➤ spectre mono énergétique !

### XXXV. Désintégration à trois corps

noyau i  $\rightarrow$  noyau f + particule 1 + particule 2

conservation de  $\vec{p} \Rightarrow \vec{p}_f, \vec{p}_1, \vec{p}_2$  coplanaires dans le repère du CM

- Outre l'orientation globale du système (3 angles),  
5 paramètres caractérisent la désintégration :  $|\vec{p}_f|, |\vec{p}_1|, |\vec{p}_2|, \theta_1, \theta_2$



il y a seulement 3 contraintes :

(conservation de l'énergie-impulsion dans le plan de désintégration)

- spectre continu des impulsions et des angles

XXXVI. Section efficace d'interaction des neutrinos  
Leptons sans charges, ils ne sont sensibles qu'aux interactions faibles  
(et à la gravitation).

Ils interagissent très rarement et la plupart échappent à la détection !

La section efficace d'interaction des neutrinos dépend fortement de leur énergie.

La section efficace d'interaction des **neutrinos issus d'une centrale nucléaire** sur un nucléon est **une fraction** de  $10^{-43} \text{ cm}^2 = 10^{-19} \text{ barn}$ ...

→ libre parcours moyen dans l'eau :  $\lambda \sim 4 \times 10^{14} \text{ km}$  !!!

La plupart des neutrinos s'échappent sans interagir !!! **Mais...**

...on peut quand même détecter des antineutrinos  
produits par un réacteur nucléaire !

Non-prolifération et contrôle de la puissance  
AIEA, International expert meeting, October 26-28. 2008

Énergie dégagée par fission  $\sim 200$  MeV

Nombre de neutrinos émis par fission  $\sim 2,5$

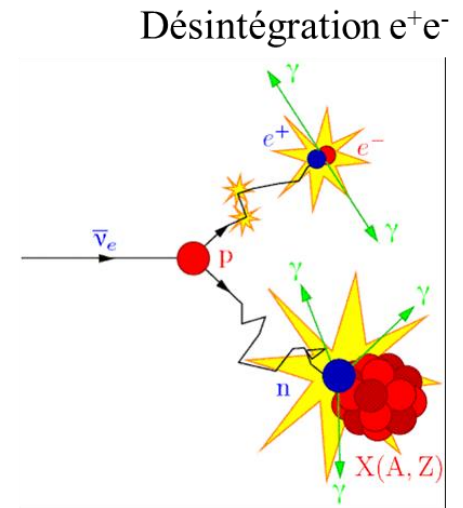
Réacteur de 100 MW thermique  $\Rightarrow$  flux de  $\nu$  émis :

$$\frac{100 \times 10^6 \times 2,5}{200 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}} \sim 8 \times 10^{18} \text{ } \nu/\text{s} \sim 7 \times 10^{23} \text{ } \nu/\text{j}$$

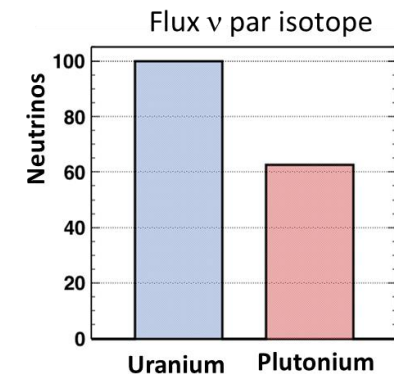
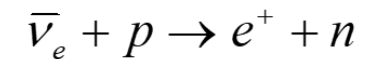
Détecteur  $\sim 1 \times 1 \times 1 \text{ m}^3$ , densité 0.8, à 10 m du coeur  
taux de neutrinos détectés :

$$7 \times 10^{23} \times \underbrace{\frac{1 \times 1}{4\pi \times 10^2}}_{\substack{\text{acceptance} \\ \text{du détecteur} \\ S/4\pi d^2}} \times \underbrace{\frac{0.8}{4 \times 10^{14} \times 10^3}}_{\substack{\text{probabilité d'interaction} \\ dx/\lambda}} \times \underbrace{0.3}_{\substack{\text{efficacité} \\ \text{de détection}}}$$

$\sim 300$  neutrinos détectés par jour



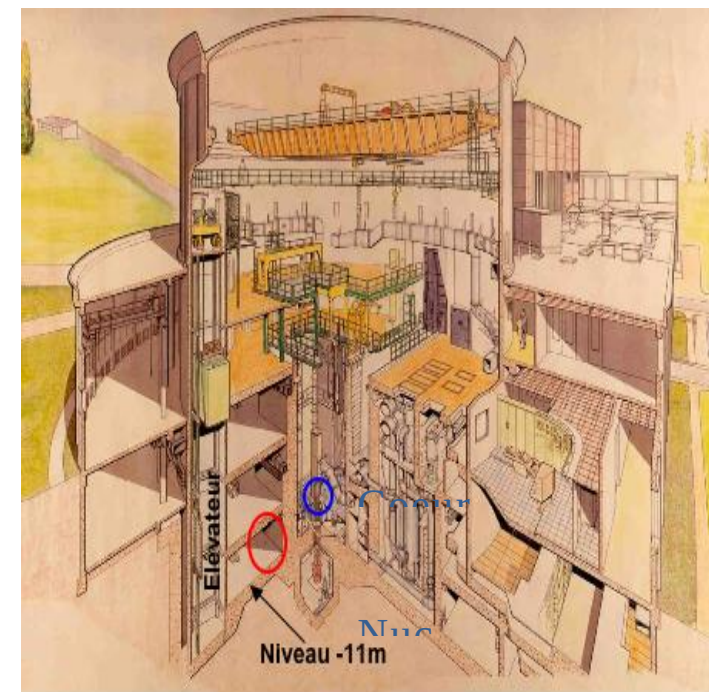
Réaction dans le détecteur



## Scénario fictif

Contrôler la destruction de plutonium issu du démantèlement des armes nucléaires en “brûlant” ce plutonium dans un réacteur.

Le flux de neutrinos détecté sera plus bas que sans l’ajout de ce plutonium et pourrait donc certifier que le plutonium a bien été irradié.

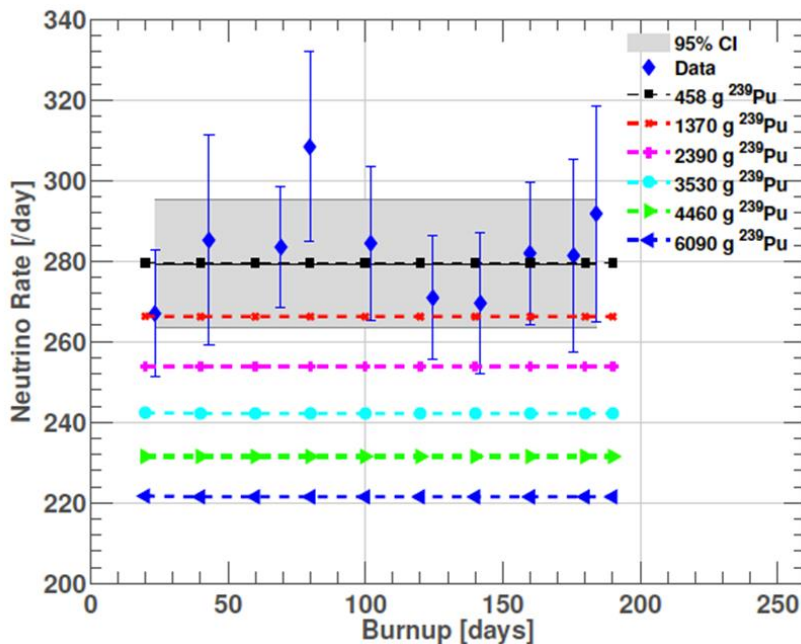


Réacteur OSIRIS  
(CEA Saclay)

Mesure “audacieuse”  
à 7 m du cœur !  
~300 v/jour attendus.

Sensibilité à 1.5 kg de Pu  
à 95% de confiance

résultats de l’expérience NUCIFER  
présentés en 2018 (D. Lhuillier, M. Vivier, CEA/IRFU)



## F - Violation des symétries discrètes

### 1) Parité

Définition de l'opérateur  $P$

Opérateur unitaire qui transforme la fonction d'onde d'un système physique en celle de son symétrique par rapport à un point (qu'on prend comme origine des coordonnées) :

$$P\psi(\vec{r}) = \psi'(\vec{r}') = \psi'(-\vec{r})$$

- Cette transformation est par exemple équivalente à une rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $Ox$  suivie d'une symétrie par rapport au plan  $x=0$ , on parle souvent de l'opération parité comme de la symétrie miroir.

Propriétés :  $P^2 = Id$  soit :  $P = P^{-1} = P^\dagger$

Donc les valeurs propres de  $P$  sont  $+1$  et  $-1$  (« parité du système »)

Les particules peuvent avoir une parité intrinsèque  $+1$  ou  $-1$

## Transformation **des quantités physiques**

Attention ! Deux types de vecteurs !

Vecteurs polaires :  $P(\vec{V}) = -\vec{V}$  ; Vecteurs axiaux (ou pseudo vecteurs) :  $P(\vec{A}) = \vec{A}$

|                       | Définition                                                                      | Opération $P$                  |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| Quantité de mouvement | $\vec{p} = (\gamma) m \frac{d\vec{r}}{dt}$                                      | $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ |
| Énergie               | $E = \begin{cases} p^2 / 2m \\ \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \end{cases}$            | $E \rightarrow E$              |
| Moment angulaire      | $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$                                              | $\vec{L} \rightarrow \vec{L}$  |
| Spin                  | $\vec{S}$                                                                       | $\vec{S} \rightarrow \vec{S}$  |
| Champ électrique      | $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$                        | $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$ |
| Champ magnétique      | $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r}}{r^3}$ | $\vec{B} \rightarrow \vec{B}$  |



## ***Transformation des fermions de spin 1/2***

On pose  $\psi'(x') = P\psi(x)$

Alors  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rightarrow \psi^\dagger P^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P \psi$   
parité

C'est un quadrivecteur, il doit se transformer comme :

$$j^0 \rightarrow j^0 \quad j^{1,2,3} \rightarrow -j^{1,2,3}$$

En prenant pour  $P$  l'opérateur représenté par la matrice  $\gamma^0$  on obtient exactement les propriétés requises (*le signe est conventionnel*)

Appliquons  $P$  aux spineurs  $u$  et  $v$  au repos :  $\gamma^0 u^{1,2} = u^{1,2}$  et  $\gamma^0 v^{1,2} = -v^{1,2}$   
[pour  $\vec{p}$  quelconque :  $\hat{P}u^{1,2}(\vec{p}) = u^{1,2}(-\vec{p})$  et  $\hat{P}v^{1,2}(\vec{p}) = -v^{1,2}(-\vec{p})$ ]

On constate que les fermions et les antifermions ont des **parités intrinsèques** opposées.

Un système fermion-antifermion (comme le pion) a une parité intrinsèque  $(-1)$ .

### *Invariance par l'opérateur Parité*

Les lois de la mécanique classique et de l'électromagnétisme sont invariantes par parité : un système physique transformé par parité obéit aux mêmes lois que le système initial

Même définition en mécanique quantique :

Lois invariantes par parité si pour tout système :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r}, t) \quad \& \quad i\hbar \frac{\partial P\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = HP\psi(\vec{r}, t)$$

Alors :  $[H, P] = 0$

Donc, si l'état d'un système est un état propre de  $P$  et si les lois d'évolution sont invariantes par parité, alors la parité du système (valeur propre de  $P$ ) est conservée au cours du temps.

## Violation de la parité

- Les particules ont une parité intrinsèque  $P(\pi) = -1$

(cf exercice)

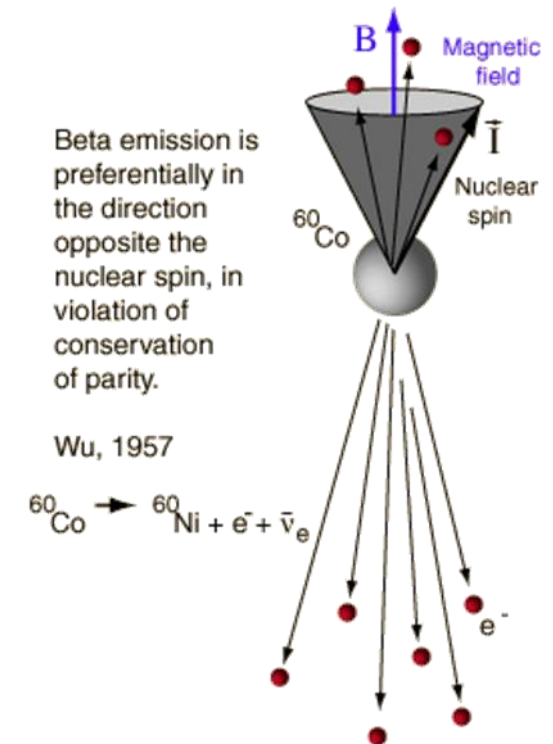
- Expérimentalement « puzzle  $\theta$   $\tau$  » (1953)

$$\theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$$

$$\tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$$

- mêmes masses, spins, et durées de vie, parités différentes
- solution :  $\theta \equiv \tau$ , même parité **mais**  
hypothèse (Lee et Yang, 1956) :  
la parité n'est pas conservée par l'interaction faible

- Vérification expérimentale (Wu et al, 1957)



## XXXVII. Conjugaison de charge

### **Définition de l'opérateur $C$ :**

- Opérateur : particules  $\rightarrow$  antiparticules,  $\vec{r}, \vec{p}, \vec{L}, \vec{S}$  inchangés
- $C$  agit sur les nombres quantiques internes :  $Q \rightarrow -Q$   $L \rightarrow -L$   $B \rightarrow -B$

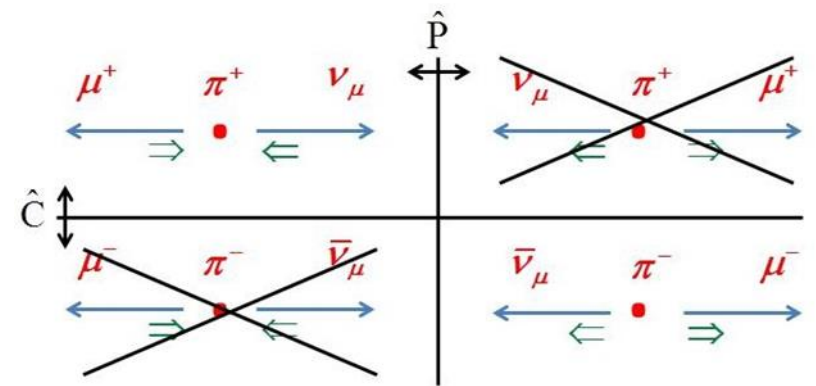
### **Transformation des fermions de spin $1/2$ : $\psi(x) \rightarrow i\gamma^2\psi^*(x)$**

En effet , si  $\psi(x)$  est la fonction d'onde d'un fermion de charge  $q$  dans un champ électromagnétique, on a (chapitre 3) :

$$\begin{aligned}\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu)\psi &= m\psi \Rightarrow \gamma^{\mu*} (-i\partial_\mu - qA_\mu)\psi^* = m\psi^* \\ \Rightarrow (i\gamma^2)\gamma^{\mu*} (-i\partial_\mu - qA_\mu)\psi^* &= (i\gamma^2)m\psi^* \Rightarrow \underbrace{-\gamma^\mu (i\gamma^2)}_{\substack{\text{on établira sans peine} \\ (i\gamma^2)\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu (i\gamma^2)}} (-i\partial_\mu - qA_\mu)\psi^* = (i\gamma^2)m\psi^* \\ \Rightarrow \gamma^\mu (i\partial_\mu + qA_\mu) \left[ (i\gamma^2)\psi^* \right] &= m \left[ (i\gamma^2)\psi^* \right]\end{aligned}$$

Ce qui montre que  $i\gamma^2\psi^*(x)$  représente un fermion de même masse et de charge opposée, c'est l'antifermion associé.

- L'opérateur  $C$  est **antiunitaire** dans ce formalisme :  $C(\lambda\psi) = \lambda^* C(\psi)$
- L'interaction faible, au contraire des autres interactions, n'est pas invariante par conjugaison de charge, ce qui est flagrant dans la désintégration des mésons  $\pi$  : **expérimentalement**, la polarisation des muons est opposée entre la désintégration des  $\pi^+$  et des  $\pi^-$



- Le produit des deux opérateurs  $P$  et  $C$  redonne un processus physique possible

## *Violation de CP*

- Pourtant, la symétrie CP est elle aussi (faiblement) violée par l'interaction faible (Christenson, Cronin, Fitch et Turlay, 1964).

La violation de CP est une condition nécessaire pour expliquer l'asymétrie matière antimatière dans l'Univers

Le modèle standard accommode la violation de CP grâce au processus de mélange des quarks et de génération des masses (voir **exercice** du chapitre 10)

Mais l'amplitude de cette violation est de nombreux ordres de grandeur trop petite pour expliquer l'asymétrie matière antimatière dans l'Univers

## XXXVIII. Renversement du temps

### *Définition de l'opérateur $T$ « renversement du temps »*

Il s'agit en fait du renversement du **mouvement** :

Un système décrit par le hamiltonien  $H(q, p)$  évolue de  $t = -t_1$  à  $t = t_1$ .

$$\partial q / \partial t = \partial H / \partial p ; \partial p / \partial t = -\partial H / \partial q$$

À l'instant  $t_1$  on renverse le mouvement :

$$q(t_1) \rightarrow q'(t_1) = q(t_1) \text{ et } p(t_1) \rightarrow p'(t_1) = -p(t_1) \text{ et on définit } t' = -2t_1 + t .$$

**Le système est dit invariant par renversement du temps** si à l'instant  $t' = t_1$  il retrouve ses coordonnées  $q$  initiales et ses moments initiaux inversés :

$$q'(t') = q(-t) ; p'(t') = -p(-t)$$

Ce mouvement est décrit par les équations :

$$\partial q' / \partial t = -\partial q / \partial t = -\partial H / \partial p = \partial H / \partial p'$$

$$\partial p' / \partial t = -\partial(-p) / \partial t \text{ (attention au sens d'évolution de } -p \text{ !)} = -\partial H / \partial q = -\partial H / \partial q'$$

Ce mouvement est donc décrit par le hamiltonien :  $H'(q', p') = H(q, -p)$  :

$$\partial q' / \partial t = \partial H' / \partial p' ; \partial p' / \partial t = -\partial H' / \partial q'$$

Le plus souvent  $H$  est quadratique en  $p$ , alors  $H'(q', p') = H(q', p')$  et le système est invariant par renversement du temps, car alors  $q'$  et  $p'$  évoluent suivant les équations du mouvement initial :

$$\partial q' / \partial t = \partial H / \partial p' ; \partial p' / \partial t = -\partial H / \partial q'$$

En présence d'un champ électromagnétique, l'opération de « renversement du temps » renverse le potentiel vecteur  $\vec{A}$  (qui a pour origine un mouvement de charges) et laisse le potentiel  $V$  inchangé.

$$\boxed{T : t \rightarrow -t, \vec{r} \rightarrow \vec{r} \quad \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \quad \vec{L} \rightarrow -\vec{L} \quad \vec{S} \rightarrow -\vec{S} \quad \vec{A} \rightarrow -\vec{A} \quad V \rightarrow V}$$

- **Mécanique classique :**

Invariance par renversement du temps (micro réversibilité)

- **Mécanique quantique :**



En mécanique quantique, la micro réversibilité est assurée pour la transformation  $T : \psi'(t', \vec{x}') = T\psi(t, \vec{x}) = \psi^*(-t, \vec{x})$  si le hamiltonien vérifie  $H^* = H$  :

$$i \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial t} = H\psi(t, \vec{x}) \Leftrightarrow \text{(complexe conjugué)}$$

$$-i \frac{\partial \psi^*(t, \vec{x})}{\partial t} = H^* \psi^*(t, \vec{x}) \Leftrightarrow \text{(définition de } \psi')$$

$$-i \frac{\partial \psi'(-t, \vec{x}')}{\partial t} = H^* \psi'(-t, \vec{x}') \Leftrightarrow \text{(changement de variable } t' = -t)$$

$$i \frac{\partial \psi'(t', \vec{x}')}{\partial t'} = H^* \psi'(t', \vec{x}')$$

En conséquence :

L'opérateur  $T$  est **antiunitaire** :  $\langle Ta | Tb \rangle = \langle b | a \rangle$  et  $T | \lambda a \rangle = \lambda^* T | a \rangle$

Micro réversibilité :  $\langle \tilde{a} | H | \tilde{b} \rangle = \langle b | H | a \rangle$  où  $|\tilde{a}\rangle = T | a \rangle$  et  $|\tilde{b}\rangle = T | b \rangle$

Pour un hamiltonien quadratique en impulsion, on a bien  $H^* = H$  car  $\Delta^* = \Delta$ .

- **Équation de Dirac :**

On montre (**exercice**) de façon analogue aux paragraphes précédents que l'opérateur reversement du temps agit sur les fermions comme :  $\psi(t, \vec{x}) \rightarrow i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, \vec{x})$  et laisse invariante l'équation de Dirac.

On montre (**exercice**) que  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  se transforme comme :  
 $j^0 \rightarrow j^0 ; j^{1,2,3} \rightarrow -j^{1,2,3}.$

- **Seules les interactions faibles violent (faiblement)  $T$**

Cependant :

***Théorème CPT :***

- Toute théorie quantique des champs locale invariante au sens de Lorentz avec un hamiltonien hermitien possède la symétrie CPT.
- La violation de CP dans les interactions faibles entraîne ainsi la violation de T

## **G - À retenir**

- Propriétés (universalité, courte portée, transformation des particules)
- Isospin faible
- Bosons vecteurs massifs  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$
- Vertex de l'interaction faible
- Propriétés des neutrinos
- Violation des symétries discrètes P, C, T
- Violation de CP, théorème CPT

## CHAPITRE 10 Modèle standard

### A - Quel groupe de jauge pour les interactions faibles ?

#### 1) Introduction

Désintégration du neutron :  $d \rightarrow W^- + u$  et  $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$

Analogie avec :  $q_R \rightarrow gluon + q_B$  et  $gluon \rightarrow \bar{q}'_B + q'_R$  ?

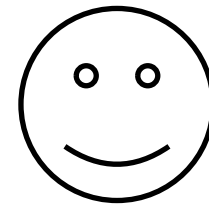
échange des couleurs similaire à l'échange  $d \rightleftharpoons u$  et  $e \rightleftharpoons \nu_e$  ?

symétrie SU(3) analogue à la symétrie SU(2) dans les espaces  $\{u, d\}$  et  $\{e, \nu_e\}$  ?

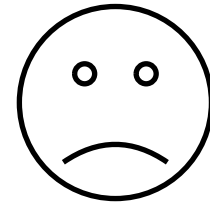
invariance du lagrangien par échange  $d \rightleftharpoons u$  et  $e \rightleftharpoons \nu_e$  ?

SU(2) est un groupe de Lie à 3 paramètres réels indépendants, il y a donc

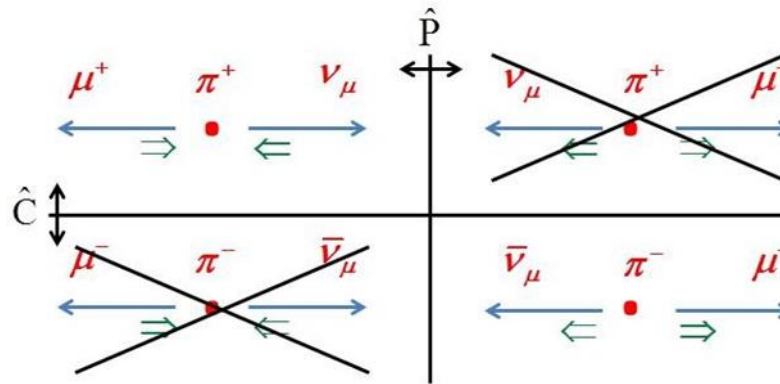
$\Rightarrow$  3 générateurs du groupe  $\Rightarrow$  3 bosons vecteurs !



Cela ne marche pas : pas de violation de la parité  
(voir paragraphe 9-F)



La violation de la parité se traduit en particulier par le fait que  
seuls les neutrinos de spin antiparallèles à l'impulsion sont émis...  
alors qu'a priori les deux directions du spin sont cinématiquement possibles



Les deux paragraphes suivant introduisent les notions de chiralité et d'hélicité pour expliciter ce problème.

### XXXIX. Chiralité

On introduit la matrice hermitienne  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$

On a :  $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$  et  $(\gamma^5)^2 = I_4$ , donc les valeurs propres de  $\gamma^5$  sont  $+1$  et  $-1$ .

On appelle état chiral droit (gauche) un état propre  $u_R$  ( $u_L$ ) de l'opérateur représenté par  $\gamma^5$  pour la valeur propre  $+1(-1)$ .

Cette propriété est invariante par transformation de Lorentz propre orthochrone.

( $\gamma^5$  commute avec  $S(\Lambda)$  car  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \Rightarrow [\gamma^5, \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0$ )

On définit les projecteurs  $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$  et  $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$  :

Quel que soit  $u$  :  $u = u_R + u_L$  avec  $u_R = P_R u$  et  $u_L = P_L u$

De plus :  $P_R u_R = u_R$   $P_L u_L = u_L$   $P_R u_L = 0$   $P_L u_R = 0$

## XL. Hélicité

On définit l'hélicité comme la projection du spin sur la quantité de mouvement :

Opérateur spin pour un champ de Dirac

$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}/2 & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}/2 \end{pmatrix}$  est l'opérateur spin pour un spineur de Dirac.

En effet  $\vec{\Sigma}$  est un moment cinétique (relations de commutation) et on montre facilement que  $\vec{L} + \vec{\Sigma}$  commute avec le hamiltonien de Dirac  $H_D = \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \gamma^0 m$  comme il se doit par invariance par rotation (**exercice**).

On le voit aussi avec le théorème de Noether (**exercice**).



Montrons que pour un champ de Dirac **sans masse ou ultra relativiste** (comme les neutrinos émis dans la désintégration  $\beta$  des noyaux), les états chiraux sont des états propres de l'opérateur hélicité :

On a dans un repère où  $\vec{p} // Oz$  et pour  $E \gg m$  :

$$u^i(\vec{p}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi_i \\ \left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right) \chi_i \end{pmatrix} \simeq \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_i \\ \sigma_z \chi_i \end{pmatrix}$$

Or :

$$u^i_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix} u^i = \frac{1}{2} \sqrt{E} \begin{pmatrix} (1-\sigma_z)\chi_i \\ -(1-\sigma_z)\chi_i \end{pmatrix}$$

Cet état est bien un état propre de l'opérateur hélicité pour la valeur propre  $(-1/2)$  :

$$\left( \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right) u^i_L = \Sigma_z u^i_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{E} \begin{pmatrix} (1-\sigma_z)\chi_i \\ -(1-\sigma_z)\chi_i \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \sqrt{E} \begin{pmatrix} (1-\sigma_z)\chi_i \\ -(1-\sigma_z)\chi_i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} u^i_L$$

Par ailleurs, l'opérateur parité agissant sur un état chirale gauche donne un état chirale droit :

$$\gamma^0 \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\gamma^0 u$$

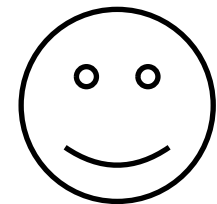
De même l'opérateur conjugaison de charge agissant sur un état chirale gauche donne un état chirale droit :

$$i\gamma^2 \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u^* = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)i\gamma^2 u^*$$

**Une solution pour obtenir la violation de la parité** est de demander l'invariance du lagrangien seulement sous l'échange des fermions chiraux gauches  $d_L \rightleftharpoons u_L$  et  $e_L \rightleftharpoons \nu_{eL}$ , (**groupe de symétrie qu'on note  $SU(2)_L$** ), en laissant les fermions droits invariants. Pour les antiparticules, ce seront les états chiraux droits qui seront échangés, et les gauches qui seront invariants.

Ainsi le terme d'interaction ne peut donner naissance qu'à des neutrinos chiraux gauches (et donc d'hélicité  $-1/2$  avec une très bonne approximation) ou des antineutrinos chiraux droits.

**Il est nécessaire d'utiliser la chiralité, une propriété invariante de Lorentz, et non l'hélicité qui donnerait un lagrangien non scalaire de Lorentz.**



Par cette transformation de jauge locale :

- on conserve l'invariance par transformation de Lorentz propre orthochrone
- on peut expliquer la violation de la parité dans les désintégrations faibles

*Exemple des désintégrations  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  et  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$*

(bien sûr c'est la polarisation du  $\mu^+$  ou du  $e^+$  qui est mesurée...)

On constate expérimentalement que :  $\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e)} \approx 10^4$

malgré l'espace de phase défavorable :  $\left(1 - (m_\mu / m_\pi)^2\right) \simeq 0.43 < \left(1 - (m_e / m_\pi)^2\right) \simeq 1$

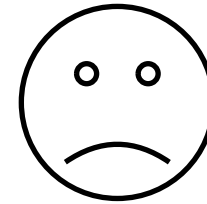
**c'est la direction du spin du  $\mu^+$  qui favorise sa production à cause de sa masse**

voir paragraphe 7-E et **exercice**

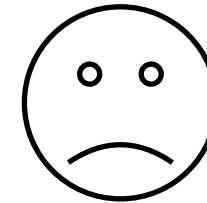
Mais cette solution ne marche pas non plus :

Le terme de masse des fermions du lagrangien ne respecte pas l'invariance de jauge  $u_L \rightleftharpoons d_L$  :

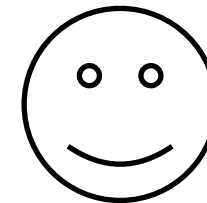
$$m\bar{u}u = m(\overline{u_R + u_L})(u_R + u_L) = m(\overline{u_R}u_L + \overline{u_L}u_R)$$



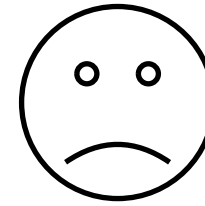
De plus les quarks  $u$  et  $d$  n'ont pas la même masse, de même pour l'électron et le neutrino !



C'est le mécanisme de Brout-Englert-Higgs (illustré sur un cas beaucoup plus simple au paragraphe 6-H) qui résout ce problème.



Mais cela ne marche pas non plus !



En effet, ce mécanisme donne aussi une masse aux bosons vecteurs, ce qui est nécessaire expérimentalement !

Mais alors, les trois bosons doivent avoir la même masse, ce qui n'est pas le cas :

$$M_W = 80,4 \text{ GeV}/c^2 ; M_Z = 91,2 \text{ GeV}/c^2$$

Conclusion : le groupe  $SU(2)_L$  n'est pas le groupe de jauge des interactions faibles .

## B - Théorie électrofaible (Glashow-Salam-Weinberg)

Aboutissement 1967 - Prix Nobel 1979

### 1) Symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Historiquement, le bon groupe a été introduit dans le but d'unifier l'interaction faible avec l'interaction électromagnétique, et a permis de prédire l'existence des courants neutres faibles et du  $Z^0$ , une prédiction remarquable.

Les fermions portent un isospin faible (noté  $T$ ) et un nouveau nombre quantique : l'hypercharge (notée  $Y$ ).

**Seuls les fermions gauches ont un isospin non nul comme précédemment.**

## Charge, isospin, troisième composante de l'isospin, hypercharge pour les fermions

|                                       | $Q$  | $T$ | $T_3$ | $Y$  |
|---------------------------------------|------|-----|-------|------|
| $\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$ | 0    | 1/2 | 1/2   | -1   |
| $e_L, \mu_L, \tau_L$                  | -1   | 1/2 | -1/2  | -1   |
| $\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$ | 0    | 0   | 0     | 0    |
| $e_R, \mu_R, \tau_R$                  | -1   | 0   | 0     | -2   |
| $u_L, c_L, t_L$                       | 2/3  | 1/2 | 1/2   | 1/3  |
| $d_L, s_L, b_L$                       | -1/3 | 1/2 | -1/2  | 1/3  |
| $u_R, c_R, t_R$                       | 2/3  | 0   | 0     | 4/3  |
| $d_R, s_R, b_R$                       | -1/3 | 0   | 0     | -2/3 |

Remarque :

L'existence de neutrinos droits n'est pas établie. S'ils existent, ils sont uniquement sensibles à la gravitation.

Noter que la relation  $Q = T_3 + Y / 2$  est vérifiée par l'ensemble des particules. On en comprendra l'origine dans quelques paragraphes.



## Construction du lagrangien électrofaible

Lagrangien libre sans masse pour un fermion :

$$\bar{f} i \not{\partial} f = (\bar{f}_L + \bar{f}_R) i \not{\partial} (f_L + f_R) = \bar{f}_L i \not{\partial} f_L + \bar{f}_R i \not{\partial} f_R$$

En incluant deux fermions associés d'une même famille :  $L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}, \nu_R, l_R$  :

$$\mathcal{L} = \bar{L} i \not{\partial} L + \bar{\nu}_R i \not{\partial} \nu_R + \bar{l}_R i \not{\partial} l_R$$

Nota bene :

Ici  $\nu$  et  $l$  désigne les deux fermions d'un même doublet d'isospin (leptons ou quarks), et non pas uniquement un neutrino et un lepton.

Ce lagrangien est invariant sous une transformation  $SU(2)_L$  (unitaire par définition !) :

$$L \rightarrow L' = \exp\left(-ig_w \vec{\alpha} \cdot \vec{T}\right)L, \quad \nu_R \rightarrow \nu_R, \quad l_R \rightarrow l_R$$

où  $T_{1,2,3}$  sont 3 générateurs de  $SU(2)_L$  :  $T_i = \sigma_i / 2$

( $\sigma_i$  : matrices de Pauli, hermitiennes de trace nulle)

Attention à la notation :  $T_3$  désigne ici la matrice troisième composante de l'opérateur isospin et non la valeur de la troisième composante de l'isospin d'un fermion (valeur propre de  $T_3$ ). Le contexte lève l'ambiguïté de la notation.

On demande l'invariance de jauge locale ( $\vec{\alpha}(x)$ ) en suivant exactement le formalisme développé pour QCD.

$$\text{Dérivée covariante : } D_\mu = \partial_\mu + ig_w \sum_{a=1,3} T_a W_\mu^a$$

$g_w$  : constante de couplage faible,  $W_\mu^a$  : trois bosons vecteurs

$$\text{Terme d'interaction : } \mathcal{L}_W = -g_w \sum_{a=1,3} \bar{L} \gamma^\mu T_a L W_\mu^a$$

Le lagrangien est aussi invariant sous une transformation  $U(1)_Y$  :

$$L \rightarrow L' = \exp\left(-ig\beta\frac{Y}{2}\right)L, \quad \nu_R \rightarrow \nu'_R = \exp\left(-ig\beta\frac{Y}{2}\right)\nu_R, \quad l_R \rightarrow l'_R = \exp\left(-ig\beta\frac{Y}{2}\right)l_R$$

où  $Y$  est l'hypercharge du fermion considéré (le facteur  $1/2$  est historique)  
(noter que les fermions d'un même doublet ont la même hypercharge).

On demande aussi l'invariance de jauge locale ( $\beta(x)$ ), il se rajoute un terme dans la dérivée covariante précédente :  $ig\frac{Y}{2}B_\mu$

$g$  constante de couplage pour l'hypercharge,  $B_\mu$  quatrième boson vecteur

**Terme d'interaction** :  $\mathcal{L}_B = -g\bar{L}\gamma^\mu\frac{Y}{2}LB_\mu - g\bar{\nu}_R\gamma^\mu\frac{Y}{2}\nu_RB_\mu - g\bar{l}_R\gamma^\mu\frac{Y}{2}l_RB_\mu$

## XLI. Courants chargés

Considérons  $\mathcal{L}_W$  et posons :

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \text{ et } W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)$$

On obtient facilement (démonstration ci-dessous) :

$$\mathcal{L}_W = \underbrace{-\frac{g_W}{\sqrt{2}}[W_\mu^+ \bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L + W_\mu^- \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L]}_{\mathcal{L}_{W12}} \underbrace{-g_W W_\mu^3 [\bar{L} \gamma^\mu T_3 L]}_{\mathcal{L}_{W3}}$$

Cette construction est valable pour les leptons et les quarks des trois familles.

La première parenthèse contient exactement les termes qu'il faut pour produire les vertex d'interaction entre les fermions et les bosons W vus au chapitre 9.

Nota bene : il reste à montrer que les bosons portent bien les charges indiquées.

## Calcul de $\mathcal{L}_{W12}$

Deux premiers termes de la somme de  $\mathcal{L}_W = -g_W \sum_{a=1,3} \bar{L} \gamma^\mu T^a L W_\mu^a$

$$\begin{aligned}
 \bar{L} \gamma^\mu T_1 L W_\mu^1 + \bar{L} \gamma^\mu T_2 L W_\mu^2 &= \frac{1}{2} \left[ (\bar{\nu}_L, \bar{l}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} W_\mu^1 + (\bar{\nu}_L, \bar{l}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} W_\mu^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L W_\mu^1 + \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^1 - i \bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L W_\mu^2 + i \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^2 \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L W_\mu^+ + \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^- \right]
 \end{aligned}$$

## XLII. Unification électrofaible

On va retrouver l'interaction électromagnétique et les courants neutres faibles.

$$\text{On pose : } \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}$$

où  $\theta_w$  est appelé angle de Weinberg.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W^3} + \mathcal{L}_B &= -g_w W_\mu^3 \left[ \bar{L} \gamma^\mu T_3 L \right] - g \left[ \bar{L} \gamma^\mu \frac{Y}{2} L B_\mu + \bar{\nu}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} \nu_R B_\mu + \bar{l}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} l_R B_\mu \right] \\ &= -A_\mu \left[ \bar{L} \gamma^\mu g_w \sin \theta_w T_3 L + g \cos \theta_w \left( \bar{L} \gamma^\mu \frac{Y}{2} L + \bar{\nu}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} \nu_R + \bar{l}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} l_R \right) \right] \\ &\quad - Z_\mu \left[ \bar{L} \gamma^\mu g_w \cos \theta_w T_3 L - g \sin \theta_w \left( \bar{L} \gamma^\mu \frac{Y}{2} L + \bar{\nu}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} \nu_R + \bar{l}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} l_R \right) \right] \end{aligned}$$

On **choisit** l'angle de Weinberg tel que :  $g_w \sin \theta_w = g \cos \theta_w$

## Interaction électromagnétique

Le terme en  $A^\mu$  devient :

$$-A_\mu g \cos \theta_w \left[ \bar{L} \gamma^\mu T^3 L + \bar{L} \gamma^\mu \frac{Y}{2} L + \bar{\nu}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} \nu_R + \bar{l}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} l_R \right]$$

On note que  $T_3$  est nul pour les fermions droits et on pose la relation  $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$  :

$$-A_\mu g \cos \theta_w \left[ \bar{\nu}_L \gamma^\mu Q \nu_L + \bar{l}_L \gamma^\mu Q l_L + \bar{\nu}_R \gamma^\mu Q \nu_R + \bar{l}_R \gamma^\mu Q l_R \right]$$

On pose  $e = g \cos \theta_w = g_w \sin \theta_w$  et on regroupe les termes :

$$\text{On obtient : } -e A_\mu \left[ \bar{\nu} \gamma^\mu Q \nu + \bar{l} \gamma^\mu Q l \right]$$

C'est exactement le terme d'interaction électromagnétique avec les fermions (trouvé au paragraphe 6-E).

On a déjà vu que  $\sin^2 \theta_w \simeq 0.231$  : les constantes de couplage faibles et électromagnétique sont du même ordre de grandeur.

## ***Courants neutres faibles***

Le calcul donne pour le terme en  $Z_\mu$  :

$$-Z_\mu \frac{g_W}{\cos \theta_W} \left[ \bar{L}_L \gamma^\mu T_3 L_L - \sin^2 \theta_W \left( \bar{\nu} \gamma^\mu Q \nu + \bar{l} \gamma^\mu Q l \right) \right]$$

On trouve la forme des interactions suggérée par les diagrammes de Feynman donnés au paragraphe 9-D.



### XLIII. Charge des bosons W

Comme SU(3), SU(2) est un groupe non abélien, et l'invariance de jauge locale du lagrangien exige l'introduction de termes d'interactions entre les bosons vecteurs :

$$\mathcal{L}_J = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

avec  $W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_W \varepsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c$  et  $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$

$\varepsilon_{abc}$  sont les constantes de structure du groupe :  $\left[\frac{\sigma_a}{2}, \frac{\sigma_b}{2}\right] = i\varepsilon_{abc} \frac{\sigma_c}{2}$  bien connues !

Les bosons de jauge sont transformés par changement de jauge comme :

$$W_\mu^a \rightarrow W'^a_\mu = W_\mu^a + \partial_\mu \alpha^a(x) + g_W \varepsilon_{abc} \alpha^b(x) W_\mu^c$$

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu + \partial_\mu \beta(x)$$

Le développement de  $\mathcal{L}_j$  donne alors le couplage entre les bosons  $W$  et  $A$  :

$$\mathcal{L}_{\gamma W^+ W^-} = -ie \left[ A^\mu W_{\mu\nu}^- W^{+\nu} - A^\mu W_{\mu\nu}^+ W^{-\nu} + A_\mu A_\nu W^{+\mu} W^{-\nu} \right]$$

Les bosons  $W$  sont couplés au champ électromagnétique comme attendu.

On peut aussi déterminer tous les couplages à 3 et 4 bosons vecteurs et retrouver les vertex et diagrammes de Feynman du paragraphe 9-D.

#### XLIV. Résumé

Le lagrangien des interactions électrofaibles est basé sur l'invariance locale pour le groupe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

Les interactions électromagnétiques et faibles sont intriquées

Le lagrangien viole les symétries discrètes (P, C, T).

La violation de la symétrie produit CP a pour origine le mélange des quarks (voir exercice)

Le lagrangien ne contient aucun terme de masse, ni pour les bosons, ni pour les fermions

## C - Masse des particules (mécanisme de Brout-Englert-Higgs)

La masse des W et Z ainsi que de tous les fermions est donnée par la brisure spontanée de la symétrie du lagrangien par l'ajout d'un doublet de champs complexes d'isospin  $1/2$  et d'hypercharge 1, dont une composante (le champ de Higgs) a une valeur non nulle dans le vide (**exercice**).

Les autres champs peuvent être éliminés par changement de jauge et n'ont pas de réalité physique.

Une version très simplifiée de ce mécanisme a été présentée au paragraphe 6-H.

1) Masse du Higgs et des bosons vecteurs :

Potentiel de Higgs :  $V(\Phi) = \mu \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$  ( $\lambda > 0, \mu < 0$ )

Champ de Higgs : doublet d'isospin ; choix de jauge :  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}$

$$v = \sqrt{-\mu / \lambda}$$

Valeur moyenne dans le vide :  $\langle 0 | \Phi^\dagger \Phi | 0 \rangle = \frac{v^2}{2}$

Masse du Higgs :  $m_H = \sqrt{2\lambda}v$

Masse des bosons faibles :  $m_W = \frac{g_W v}{2}$  ;  $m_Z = \frac{g_W v}{2 \cos \theta_W} = \frac{m_W}{\cos \theta_W}$

Mesures :  $v = 246 \text{ GeV}$ ,  $m_H = 125 \text{ GeV}/c^2$

## XLV. Masse des fermions :

La masse des fermions est obtenue en ajoutant des termes d'interaction du Higgs avec chaque fermion, et la constante de couplage est reliée à la masse par :

$$\mathcal{L}_{fH} = -g_l \bar{L} \Phi l_R - g_l \bar{l}_R \Phi^\dagger L - g_\nu \bar{L} \Phi^c \nu_R - g_\nu \bar{\nu}_R \Phi^{c\dagger} L$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_{fH} = -m_l \bar{l} l - \frac{m_l}{v} \bar{l} l h - m_\nu \bar{\nu} \nu - \frac{m_\nu}{v} \bar{\nu} \nu h \text{ avec } m_{l,\nu} = \frac{g_{l,\nu} v}{\sqrt{2}}$$

$$\text{où } \Phi^c = i\sigma_2 \Phi^*$$

Le modèle accommode les masses des fermions, mais ne fait aucune prédiction sur leurs valeurs, puisqu'il faut introduire une constante de couplage ad hoc pour chaque fermion

## D - Le modèle standard

### 1) Ingrédients

- Principes de la mécanique quantique et de la relativité restreinte.
- Invariance de jauge locale de la somme des lagrangiens libres des particules élémentaires de matière, **six leptons et six quarks** ( $\times 3$  couleurs) et mécanisme BEH de brisure spontanée de symétrie par le **Higgs**.
- Le groupe de jauge est le produit  **$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$** .
- Petit (*grand* ?) nombre de **paramètres libres : 25**
  - 12 couplages au Higgs pour donner les masses aux quarks et leptons
  - 3 constantes de couplage pour les groupes de jauge
  - 4 constantes pour décrire le mélange des quarks
  - 4 constantes pour décrire le mélange des leptons
  - 2 constantes pour le potentiel de Higgs

} non abordé dans ce cours

## XLVI. Succès

- Théorie renormalisable → calculs perturbatifs possibles et précis.
- Très grande puissance prédictive :
  - extrême variété de phénomènes microscopiques
  - très grande précision
  - échelles d'énergie allant de  $10^{-12}$  à  $10^{13}$  eV !
- Aucune observation expérimentale confirmée ne le met en défaut aujourd'hui (2025)



## XLVII. Insuffisances

Nombreuses questions et quelques problèmes, dont :

- Difficultés mathématiques → théorie effective à « basse » énergie (comparée à l'énergie de Planck  $10^{19}$  GeV)
- Pourquoi trois familles de particules similaires aux valeurs des masses près ? Existence d'une sous-structure ?
- Pourquoi des masses si différentes, étalées sur plus de dix ordres de grandeur ?

| Masse des particules en $\text{MeV}/c^2$ |       |            |                      |   |        |   |      |
|------------------------------------------|-------|------------|----------------------|---|--------|---|------|
| $e^-$                                    | 0.511 | $\nu_e$    | $< 2 \times 10^{-6}$ | u | 2      | d | 5    |
| $\mu^-$                                  | 106   | $\nu_\mu$  |                      | c | 1275   | s | 95   |
| $\tau^-$                                 | 1777  | $\nu_\tau$ |                      | t | 172500 | b | 4200 |

- Origine de l'asymétrie matière-antimatière dans l'Univers ?

Pas d'étoiles, de galaxies, d'amas de galaxies faits d'antimatière. Pourtant, en cosmologie, on fait l'hypothèse d'un état initial très dense et très chaud (le Big-Bang) où il y a autant de particules que d'antiparticules. Lors de l'expansion et du refroidissement de l'Univers, toute la matière et toute l'antimatière auraient dû disparaître sous forme de rayonnement.

- Violation de CP « comprise » dans les interactions faibles. A contrario, on ne comprend pas pourquoi cette symétrie n'est pas violée par les interactions fortes.
- Peut-on unifier les interactions fondamentales au-delà du modèle standard (1 constante de couplage plutôt que 3) ?
- Quid de l'interaction gravitationnelle ? faiblesse conceptuelle majeure.
- Quid de la nature de la matière noire et de l'énergie noire ?  
Les efforts pour trouver des réponses avec la physique des particules ont échoué : la recherche de nouvelles particules et de nouvelles symétries est restée infructueuse, et l'interprétation de l'énergie noire reste mystérieuse.

## E - À retenir

- Chiralité
- Hélicité
- Charge, isospin faible, hypercharge,  $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$
- Groupe de jauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$
- Unification électrofaible : angle de Weinberg, constantes de couplage
- Masse des particules et boson de Higgs
- Modèle standard :
  - groupe de jauge  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , 25 paramètres
  - Forces, faiblesses, questions

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{8}\text{tr}(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu}) & (\text{U(1), SU(2) and SU(3) gauge terms}) \\
& +(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \tilde{\sigma}^\mu i D_\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \bar{e}_R \sigma^\mu i D_\mu e_R + \bar{\nu}_R \sigma^\mu i D_\mu \nu_R + (\text{h.c.}) & (\text{lepton dynamical term}) \\
& -\frac{\sqrt{2}}{v} \left[ (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \phi M^e e_R + \bar{e}_R \bar{M}^e \bar{\phi} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right] & (\text{electron, muon, tauon mass term}) \\
& -\frac{\sqrt{2}}{v} \left[ (-\bar{e}_L, \bar{\nu}_L) \phi^* M^\nu \nu_R + \bar{\nu}_R \bar{M}^\nu \phi^T \begin{pmatrix} -e_L \\ \nu_L \end{pmatrix} \right] & (\text{neutrino mass term}) \\
& +(\bar{u}_L, \bar{d}_L) \tilde{\sigma}^\mu i D_\mu \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \bar{u}_R \sigma^\mu i D_\mu u_R + \bar{d}_R \sigma^\mu i D_\mu d_R + (\text{h.c.}) & (\text{quark dynamical term}) \\
& -\frac{\sqrt{2}}{v} \left[ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \phi M^d d_R + \bar{d}_R \bar{M}^d \bar{\phi} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right] & (\text{down, strange, bottom mass term}) \\
& -\frac{\sqrt{2}}{v} \left[ (-\bar{d}_L, \bar{u}_L) \phi^* M^u u_R + \bar{u}_R \bar{M}^u \phi^T \begin{pmatrix} -d_L \\ u_L \end{pmatrix} \right] & (\text{up, charmed, top mass term}) \\
& +(\overline{D_\mu \phi}) D^\mu \phi - m_h^2 [\bar{\phi} \phi - v^2/2]^2/2v^2. & (\text{Higgs dynamical and mass term})
\end{aligned}$$