

Particules

Une introduction au modèle standard
de la physique des particules

Pascal Debu

*Département de physique des particules
Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives*

Version
préliminaire

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Les origines	1
1.2	Le temps des rayons	2
1.3	Physique des particules	2
1.4	Découvrir et étudier les particules et les interactions	4
1.5	Exercices	6
2	Espace, temps, matière	7
2.1	Unités en physique microscopique	7
2.2	Rappels de relativité restreinte	9
2.3	Rappels de mécanique quantique	14
2.4	Générateurs infinitésimaux	17
2.5	Moments cinétiques	22
2.6	Équation de Klein-Gordon	25
2.7	Exercices	28
3	Antimatière	35
3.1	Équation de Dirac	35
3.2	Rapport gyromagnétique de l'électron	42
3.3	Antimatière	45
3.4	Insuffisance de la théorie	50

3.5 Exercices	51
4 Particules et interactions	55
4.1 Interactions fondamentales	55
4.2 Particules élémentaires	56
4.3 Dynamique des processus élémentaires	60
4.4 Loi de désintégration exponentielle	63
4.5 Section efficace d'interaction	66
4.6 Exercices	69
5 Un soupçon de théorie quantique des champs	75
5.1 Champ scalaire	75
5.2 Espace de Fock	78
5.3 Principe de moindre action généralisé	80
5.4 Hamiltonien de Klein-Gordon	84
5.5 Champ de Dirac	85
5.6 Hamiltonien de Dirac	87
5.7 Exercices	91
6 Interaction électromagnétique	95
6.1 Potentiel électromagnétique	95
6.2 Conservation de la charge électrique	96
6.3 Invariance de jauge locale	98
6.4 Symétries et interactions	101
6.5 Photons	102
6.6 Masse des particules	102
6.7 Exercices	107
7 Diagrammes de Feynman	109
7.1 Représentations d'un système en mécanique quantique	109

7.2	Série de Dyson	111
7.3	Matrice S , matrice M	113
7.4	Taux de désintégration	115
7.5	Section efficace	118
7.6	Exemple de la désintégration du boson de Higgs	119
7.7	Diagrammes de Feynman	125
7.8	Renormalisation	132
7.9	Exercices	141
8	Interaction forte	143
8.1	Nombre baryonique et modèle des quarks	143
8.2	Nécessité de la couleur	144
8.3	Chromodynamique quantique	145
8.4	Lagrangien pour les gluons	152
8.5	Constante de couplage, liberté asymptotique	153
8.6	Exercices	156
9	Interaction faible	161
9.1	Caractéristiques de l'interaction faible	161
9.2	Courants chargés : bosons W^+ et W^-	162
9.3	Courants neutres : boson Z^0	165
9.4	Interactions entre bosons vecteurs	166
9.5	Neutrinos	167
9.6	Violation des symétries discrètes P, C, T	170
9.7	Exercices	178
10	Modèle standard	181
10.1	Quel groupe de jauge pour les interactions faibles ?	181
10.2	Théorie électrofaible	185
10.3	Masse des particules	192

10.4 Le modèle standard	193
10.5 Exercices	195
Unités et constantes fondamentales	199
Index	201
Bibliographie	205

Version
préliminaire

Chapitre 1

Introduction

Après une courte évocation des origines de la physique microscopique, nous listons la grande variété des propriétés qui ont permis de détecter, d'identifier et de classer la multitude des particules découvertes au XX^{ème} siècle.

1.1 Les origines

A la fin du XIX^{ème} siècle, avec la maîtrise de la mécanique classique, de la thermodynamique, et de l'électromagnétisme, beaucoup de physiciens pensaient que la physique parvenait à son terme. Michelson, prix Nobel 1907, a pu écrire en 1894 : « ... The more important fundamental laws and facts of physical science have all been discovered, and these are now so firmly established that the possibility of their ever being supplanted in consequence of new discoveries is exceedingly remote... »¹

Il restait cependant quelques « petits problèmes » à résoudre :

- la constance de la vitesse de la lumière, ce qui a conduit à la relativité restreinte ;
- le mouvement du périhélie de Mercure, ce qui a conduit à la relativité générale ;
- le rayonnement du corps noir, ce qui a conduit à la théorie des quanta ;
- l'effet photo-électrique, ce qui a conduit à la dualité onde-corpuscule ;
- les spectres atomiques, ce qui a conduit à la mécanique quantique et la théorie des champs ;
- mais aussi celui de la nature des rayons cathodiques...

1. « ... Les lois et les faits fondamentaux les plus importants de la science physique ont tous été découverts, et ils sont maintenant si fermement établis que la possibilité qu'ils soient un jour supplantés à la suite de nouvelles découvertes est extrêmement faible... »

1.2 Le temps des rayons

La fin du XIX^{ème} siècle est marquée par la découverte des rayons X par Röntgen en 1895, la découverte des rayons uraniques (on dirait aujourd'hui la radioactivité de l'uranium) en 1896 par Becquerel, et l'étude systématique des rayons cathodiques (découverts par Hittorf en 1869) par Thomson. Ses travaux le conduisent en 1897 à l'identification de ces rayons cathodiques comme des corpuscules, qui seront appelés électrons. Il en mesure le rapport de la charge à la masse, et note que la valeur de ce rapport est indépendante du gaz produisant les rayons et des conditions expérimentales. Il en conclut que ces corpuscules sont un constituant universel de la matière. Tout était parti de l'étude des phénomènes lumineux (luminescence) provoqués dans les gaz par une décharge électrique et de l'observation sur le verre des tubes utilisés d'une lueur verte, provoquée par de mystérieux rayons émanant de la cathode, les rayons cathodiques. C'est en étudiant ces rayons que Röntgen découvre les rayons X, et c'est en voulant reproduire ces expériences que Becquerel découvre la radioactivité ! En 1886, Goldstein avait aussi remarqué que les rayons cathodiques sont accompagnés de rayons canaux, qui eux portent une charge positive. Leur étude montrera plus tard que les caractéristiques de ces rayons dépendent, eux, de la nature du gaz utilisé : il s'agit d'ions positifs, créés quand des électrons sont arrachés aux atomes. La physique atomique et la physique des particules sont nées !

Choisissons de dater la naissance de la physique nucléaire en 1911, date de la découverte du noyau par Rutherford (voir chapitre ??), qui avait déjà identifié en 1898 deux types de rayons uraniques, les rayons α facilement arrêtés par la matière et les rayons β plus pénétrants (rapidement identifiés comme des électrons). C'est aussi Rutherford qui a compris que la radioactivité pouvait changer la nature de l'élément (il a d'ailleurs reçu le prix Nobel de chimie !), et qui a suggéré que ces phénomènes permettraient sans doute d'expliquer l'origine de l'énergie solaire. C'est seulement après la découverte du polonium et du radium en 1898 par P. et M. Curie que le troisième type de rayonnement est découvert par Villard en 1900, le rayonnement γ , neutre et très pénétrant, émis notamment par le radium.

Rappelons pour terminer ce paragraphe que c'est en 1912 que Hess découvre les rayons cosmiques (voir chapitre 3).

1.3 Physique des particules

La physique des particules recouvre l'étude des constituants élémentaires de la matière et de leurs interactions. Les interactions fondamentales identifiées à ce jour sont :

- l'interaction électromagnétique : c'est elle qui est à l'origine de tous les phénomènes électriques et magnétiques, notamment des liaisons chimiques ;
- l'interaction forte, qui assure la cohésion des noyaux des atomes, malgré la

répulsion coulombienne entre les protons ;

- l'interaction faible, responsable de la radioactivité β ;
- la gravitation.

La physique des particules est devenue indispensable à la cosmologie, c'est-à-dire à l'étude du contenu et de l'histoire de l'Univers.

Les trois premières interactions sont décrites par un corpus théorique que l'on appelle le modèle standard de la physique des particules. La gravitation a un statut particulier, car il n'y a pas de théorie quantique établie de la gravitation. Il existe aussi un modèle standard de cosmologie, que l'on appelle aussi modèle de concordance (car il permet de comprendre de façon cohérente une grande part des observations astrophysiques), construit sur la relativité générale et incorporant la matière noire et l'énergie noire (voir paragraphe ??).

La physique des particules a des applications et des retombées innombrables dans des domaines très variés (physique, médecine, informatique).

Il a fallu environ un siècle pour découvrir l'ensemble des particules élémentaires du modèle standard. Leur existence a souvent été prédite par les théoriciens. Cette épopée est résumée dans le tableau 1.1, dans lequel figurent les noms des physiciens ou des laboratoires dont le rôle a été prééminent dans la découverte (tous les collaborateurs ne sont pas toujours cités). Le neutron attend 1932 pour être découvert, après le noyau en 1911 et le proton en 1919. L'antimatière est découverte en 1933 avec l'observation du positron. La quête des particules du modèle standard s'achève en 2012 avec la découverte du boson de Higgs au CERN.

1897	Électron (e^-)	Thomson
1911	Noyau	Rutherford
1919	Proton (p)	Rutherford
1932	Neutron (n)	Chadwick
1932	Positron (e^+)	Anderson
1937	Muon (μ^-)	Anderson, Neddermeyer
1947	Pions chargés (π^+ , π^-)	Powell et al
1947	Kaons neutres (K_l^0 , K_s^0)	Rochester, Butler
1949 à aujourd'hui	Lambdas(Λ), pions neutres (π^0), kaons chargés (K^+ , K^-), deltas (Δ), et des dizaines d'autres ha- drons	...
1953	Antineutrino électron ($\bar{\nu}_e$)	Reines, Cowan
1955	Antiproton (\bar{p})	Segré, Chamberlain
1956	Antineutron (\bar{n})	Cork
1962	Neutrino muon (ν_μ)	Lederman, Schwartz, Steinberger
1974	J/ Ψ , quark (c)	Richter, Ting
1974	Tau (τ^-)	Perl
1976	Υ , quark b	Lederman
1983	Bosons faibles W^+ , W^- , Z^0	Rubbia, van der Meer
1995	Quark t	Fermilab
2000	Neutrino tau (ν_τ)	Fermilab
2012	Boson de higgs (H^0)	CERN

TABLE 1.1 – Une avalanche de particules...

1.4 Découvrir et étudier les particules et les interactions

C'est par l'étude des rayons cosmiques et de la radioactivité puis par la construction d'accélérateurs de plus en plus performants que l'on a pu mettre à jour cette pléthore de particules. De nombreux processus physiques permettent leur détection, leur caractérisation et leur identification :

- échauffement (calorimètres) ;
- condensation (chambres à brouillard) ;
- vaporisation (chambres à bulles) ;
- luminescence (scintillateurs) ;
- ionisation (chambres à fils, détecteurs au silicium) ;
- effet Tcherenkov ;
- rayonnement de transition.

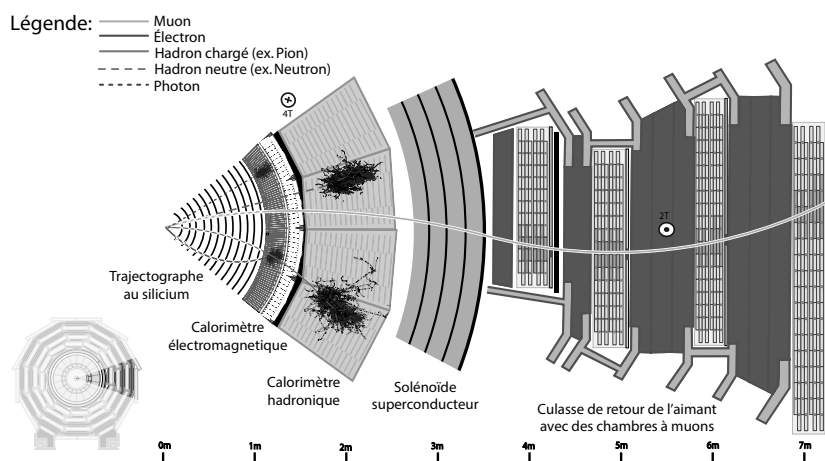


FIGURE 1.1 – Schéma du détecteur CMS. *Crédit image : D. Barney. Copyright : CERN, pour la collaboration CMS.*

La description de ces différents modes de détection n'est pas abordée dans ce document. On ne soulignera cependant jamais assez que les techniques expérimentales sont indispensables pour les progrès de la physique : c'est l'expérience qui est le « juge de paix » et qui permet de faire le tri parmi maints modèles mathématiques.

Les particules observées ont des propriétés très diverses, qui permettent de les identifier. Elles peuvent être stables ou instables, à durée de vie extrêmement courte ou étrangement longue, chargées ou neutres, très pénétrantes ou au contraire très vite arrêtées par la matière. . .

Les propriétés des particules sont étudiées aujourd'hui dans de très grands détecteurs, tel le détecteur CMS (« Compact Muon Solenoid ») installé auprès du LHC (« Large Hadron Collider » du CERN), de 14 m d'envergure, schématisé sur la figure 1.1. Il a une structure en pelure d'oignon. Les premières couches utilisent des chambres à fils pour la reconstruction des trajectoires des particules chargées. Le calorimètre électromagnétique arrête les électrons et les photons et mesure leur énergie. Le calorimètre dit hadronique mesure l'énergie des particules plus pénétrantes. Un grand solénoïde supraconducteur crée un champ magnétique qui courbe les trajectoires des particules de haute énergie et permet de mesurer leur impulsion. Ainsi, on peut reconstruire en détail la gerbe de particules produites lors de la collision frontale des protons de plusieurs TeV, qui arrivent perpendiculairement au plan de la figure au centre du trajectographe. On est loin du tube de Crooks, petite enceinte de verre contenant un gaz raréfié et deux électrodes posée

sur une table, qui a permis la découverte de l'électron !

À retenir dans le chapitre 1

- 1895 : découverte des rayons X par Wilhelm Roentgen ;
- 1897 : découverte de l'électron par Joseph Thomson ;
- 1911 : découverte du noyau par Ernest Rutherford ;
- 1919 : découverte du proton par Ernest Rutherford ;
- 1932 : découverte du neutron par James Chadwick ;
- 1933 : découverte du positron par Carl David Anderson ;
- 2012 : découverte du boson de Higgs au CERN à Genève.

1.5 Exercices

Exercice 1.a – Découverte de l'électron

Thomson a mesuré la charge Q déposée par les rayons cathodiques produits pendant un certain temps à l'aide d'un électromètre, leur énergie cinétique $mv^2/2$ par l'élévation de température ΔT d'un calorimètre de capacité calorifique C , et le rayon de courbure r de leur trajectoire dans un champ magnétique. Comment a-t-il obtenu le rapport e/m ?

Chapitre 2

Espace, temps, matière

Dans ce chapitre, nous rappelons ou introduisons des notions de base qui sont un indispensable préliminaire de la physique des particules et des noyaux.

Afin d'aborder l'étude du monde microscopique, il est pratique d'introduire des unités mieux adaptées que celles du système international. On ne mesure pas l'énergie d'une particule en joules, ni la taille d'un noyau en mètres !

Nous définissons le système d'unités naturelles souvent utilisé par les physiciens pour simplifier l'écriture des équations, et qui permet aussi d'établir des correspondances utiles entre différentes grandeurs, comme énergie et longueur, énergie et température, etc.

Nous rappelons ensuite les quelques notions de relativité restreinte et de mécanique quantique qui seront mises en œuvre dans la suite du cours.

2.1 Unités en physique microscopique

2.1.1 Constantes fondamentales et unités

Les constantes fondamentales qui s'introduisent en électromagnétisme, relativité, mécanique quantique et physique statistique sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Constante	Symbole	Valeur
Charge élémentaire	e	$1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$
Permittivité du vide	ϵ_0	$8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
Constante de Planck	h	$6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Planck réduite	\hbar	$1,055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	k	$1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

Exprimées dans les unités du système international (SI), elles ont des valeurs très grandes ou très petites, peu agréables à manier pour les physiciens. Rappelons que le système international d'unités repose sur sept unités de base desquelles sont déduites les autres, dites unités dérivées :

Grandeur	Symbole	Unité SI	Symbole
Temps	T	seconde	s
Longueur	L	mètre	m
Température	Θ	kelvin	K
Masse	M	kilogramme	kg
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité électrique	I	ampère	A
Intensité lumineuse	J	candela	cd

Plutôt que d'utiliser l'ensemble de ces unités, lorsque nous étudierons les particules et les noyaux, nous aurons souvent avantage à exprimer les énergies et les distances respectivement en électron-volts et en fermis ou femtomètres :

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J} \quad ; \quad 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}.$$

En vertu de l'équivalence masse énergie ($E = mc^2$ au repos, comme on le rappelle au paragraphe 2.2), les masses des particules peuvent s'exprimer en eV/c^2 . Ainsi, la masse de l'électron qui vaut $9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ en unités SI est aussi égale à $511 \text{ keV}/c^2$, une valeur plus pratique à employer pour les physiciens des particules. Les physiciens nucléaires préfèrent utiliser l'unité de masse atomique définie par le douzième de la masse du noyau de carbone 12 :

$$1 \text{ uma} = M(^{12}\text{C})/12 = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Enfin, nous rencontrerons à plusieurs reprises la constante de conversion très pratique :

$$\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \simeq 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}.$$

2.1.2 Unités naturelles

Les constantes fondamentales rappelées dans le paragraphe précédent interviennent fréquemment dans les formules. Aussi, il arrive souvent que l'on omette d'écrire les constantes \hbar , c , k et ϵ_0 , on dit alors que l'on utilise le système d'unités naturelles « $\hbar = c = k = \epsilon_0 = 1$ ».

Cette pratique repose sur l'observation suivante : soit une quantité X de dimension $[X] = L^a M^b T^c \Theta^d Q^e$ et qui n'est pas proportionnelle à un produit de la forme $c^x \hbar^y k^z \epsilon_0^t$, et une quantité Y de dimension $[Y] = L^\alpha M^\beta T^\gamma \Theta^\delta Q^\epsilon$, alors il existe une façon unique d'écrire de façon homogène $Y = c^x \hbar^y k^z \epsilon_0^t X^w$. Ainsi, on peut de façon non ambiguë exprimer une distance en secondes, ou une énergie en

longueur inverse, etc. Le rétablissement de la valeur en unité standard s'obtient en réinsérant les constantes fondamentales pour obtenir une relation homogène.

Exemples :

Grandeurs	Relation	Correspondance
Longueur et temps	$L = c T$	$1 \text{ fm} = 3,3 \times 10^{-24} \text{ s}$
Énergie et longueur	$E = \hbar c / L$	$200 \text{ MeV} = (1 \text{ fm})^{-1}$
Énergie et masse	$E = m c^2$	$511 \text{ keV} = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Énergie et température	$E = k\Theta$	$1 \text{ eV} = 12\,000 \text{ K}$

Cette dernière relation permet de voir rapidement par exemple que les atomes ne sont pas ionisés à température ambiante, puisque les énergies d'ionisation sont de l'ordre de quelques électron-volts, et donc équivalentes à des températures de plusieurs dizaines de milliers de kelvins. Il faut cependant prendre garde aux facteurs numériques parfois importants qui peuvent fausser ces correspondances d'ordres de grandeur basées uniquement sur l'analyse dimensionnelle.

Dans ce système d'unités naturelles, on a les équivalences suivantes :

$$[E] \sim [P] \sim [M] \sim [\Theta] \sim [L]^{-1} \sim [T]^{-1}.$$

Ainsi, dans ce système d'unités, au lieu d'écrire : masse de l'électron = $511 \text{ keV}/c^2$, on pourra écrire : masse de l'électron = 511 keV .

2.2 Rappels de relativité restreinte

La relativité restreinte est construite à partir des deux postulats énoncés en 1905 par Einstein :

1. les lois de la physique (et notamment celles de l'électromagnétisme) sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie ;
2. dans le vide, la lumière se déplace toujours avec la même vitesse, indépendamment de la vitesse de la source.

2.2.1 Cinématique

Les expressions classiques de l'énergie et de la quantité de mouvement apparaissent comme une limite à faible vitesse de leurs expressions relativistes :

	Mécanique classique	Relativité
\vec{p} : quantité de mouvement	$\vec{p} = m \vec{v}$	$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} := \gamma m \vec{v}$
T : énergie cinétique	$T = \frac{1}{2} m v^2$	$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} := \gamma m c^2$
	$T = \frac{p^2}{2m}$	$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$
		$T = E - m c^2$

La limite classique $v \ll c$ correspond à $\gamma \rightarrow 1$. En relativité, l'énergie est la somme de l'énergie de masse (ou énergie au repos) $m c^2$ et de l'énergie cinétique définie par $T = E - m c^2$. Quand la vitesse de la particule est petite devant c , on dit que la particule est non relativiste, et l'on retrouve l'expression classique de l'énergie cinétique. Lorsque l'énergie de la particule est grande devant son énergie de masse, $E \gg m c^2$, on dit qu'elle est ultra-relativiste. On a alors la relation approchée : $E \simeq p c$. Pour une particule de masse nulle, comme le photon, on a exactement $E = p c$ et la particule se déplace à la vitesse de la lumière dans le vide.

2.2.2 Notations quadridimensionnelles

Dans la section précédente nous avons noté le vecteur vitesse \vec{v} ou quantité de mouvement \vec{p} surmonté d'une flèche. Dans tout ce livre cette notation sera la caractéristique des vecteurs de \mathbb{R}^3 . En relativité, les vecteurs sont définis dans l'espace temps par 4 nombres et ne sont pas repérés par des flèches.

Par exemple, avec des notations habituelles, la position spatio-temporelle r d'un évènement sera caractérisée dans la base canonique $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^4 par la donnée de ses 4 composantes contravariantes : $x^0 = c t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

On utilisera la convention de sommation d'Einstein consistant à sommer sur les indices répétés, ce qui permet d'alléger les formules sans ambiguïté :

$$r = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu e_\mu \equiv x^\mu e_\mu.$$

Pour se conformer à l'expérience, on dote l'espace-temps \mathbb{R}^4 d'un produit scalaire de Minkowski tel que

$$e_\mu \cdot e_\nu := \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

Les 16 nombres $\eta_{\mu\nu}$ forment les composantes covariantes du tenseur métrique de Minkowski. On peut définir les composantes covariantes de l'évènement r en écrivant $x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu$ avec toujours dorénavant sommation sur les indices répétés en haut et en bas (ici ν seulement). En utilisant (2.1) on peut vérifier que $x_0 = ct$, $x_1 = -x$, $x_2 = -y$, $x_3 = -z$. Ainsi :

$$\begin{aligned} x^\mu x_\mu &= x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} = x_\mu x_\nu \eta^{\mu\nu} \\ &= c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

dans la dernière égalité de l'équation (2.2) on a utilisé les composantes contravariantes $\eta^{\mu\nu}$ du tenseur de Minkowski telles que $\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$.

Munis de ces notations on peut définir les opérateurs de dérivation partielle :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ et } \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

On notera que la position des indices est changée suivant que l'on dérive par rapport aux composantes co ou contra-variantes. Ces opérateurs généralisent le vecteur $\vec{\nabla}$ de la mécanique classique. Son carré scalaire donne le d'alembertien :

$$\square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta = \partial_\mu \partial^\mu.$$

2.2.3 Transformations de Lorentz

2.2.3.1 Transformations spéciales

On considère deux repères d'inertie $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ et $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$. Ce dernier est en translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v} par rapport à \mathcal{R} : \vec{v} est la vitesse de \mathcal{R}' mesurée dans \mathcal{R} . Pour simplifier, on suppose qu'à l'instant initial les origines et les axes des deux repères sont confondus, et que \mathcal{R}' se déplace parallèlement à l'axe des x . On parle dans ce cas de transformation spéciale.

Si $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ désigne la position dans l'espace habituel de la mécanique classique, le quadri-vecteur :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (ct, x, y, z)^\top = (ct, \vec{r})^\top$$

définit les coordonnées d'un point dans l'espace temps mesuré dans \mathcal{R} . Il est relié à celui mesuré dans \mathcal{R}' par les relations :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},$$

où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2,

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Il sera utile dans la suite d'utiliser la notion de rapidité Ω définie par :

$$\cosh \Omega = \gamma \quad ; \quad \sinh \Omega = \beta\gamma.$$

La transformation des coordonnées s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Omega & -\sinh \Omega \\ -\sinh \Omega & \cosh \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

Il est alors facile de vérifier que la composition de deux transformations spéciales suivant le même axe et de rapidités Ω_1 et Ω_2 est une transformation spéciale de rapidité $\Omega_1 + \Omega_2$.

Remarque. On rappelle qu'en mécanique classique, la mesure du temps est indépendante du repère, et l'on a :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix},$$

les vitesses se transforment alors par :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v.$$

Soit

$(E, c\vec{p})^\top$ le quadrivecteur énergie impulsion. Quand on passe de \mathcal{R} à \mathcal{R}' , l'énergie et la quantité de mouvement se transforment selon :

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Omega & -\sinh \Omega \\ -\sinh \Omega & \cosh \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x c \end{pmatrix}.$$

Les quantités de mouvement suivant y et z sont inchangées si la transformation est spéciale. Par construction, la masse ne dépend pas du référentiel inertiel :

$$mc^2 = \sqrt{E^2 - (\vec{p})^2 c^2} = \sqrt{E'^2 - (\vec{p}')^2 c^2}.$$

On insiste parfois sur cette propriété en parlant de « masse invariante ». Pour un système de plusieurs particules, les énergies et les quantités de mouvement des particules s'ajoutent, et la masse invariante désigne, par définition, l'énergie du système dans le référentiel où la quantité de mouvement totale est nulle.

Attention, la masse invariante du système n'est en général pas égale à la somme des masses des particules individuelles.

Soit un système A composé des particules 1,2,... alors :

$$\begin{aligned} E_A &= E_1 + E_2 + \dots \\ \vec{p}_A &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots \\ m_A c^2 &= \sqrt{E_A^2 - \vec{p}_A^2 c^2} \neq (m_1 + m_2 + \dots) c^2. \end{aligned}$$

2.2.3.2 Définition générale des transformations de Lorentz

On appelle transformation de Lorentz toute transformation linéaire qui laisse le carré scalaire de Minkowski défini en (2.2) invariant.

Pour une transformation homogène (sans translation) définie par $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, la condition s'écrit : $x'^{\mu} y'_{\mu} = x^{\mu} y_{\mu}$, soit : $\Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda_{\mu}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$.

Une transformation de Lorentz homogène est le produit de deux rotations et d'une transformation spéciale.

2.2.4 Conservation de l'énergie-impulsion

Soit un système A de masse m_A composé des particules 1,2,... se transformant en un système B de masse m_B composé des particules a, b, \dots

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ 1 + 2 + \dots & \rightarrow & a + b + \dots \end{array}$$

La conservation de l'énergie-impulsion se traduit par les égalités :

$$\begin{cases} \vec{p}_A = \vec{p}_B \\ E_A = E_1 + E_2 + \dots = E_B = E_a + E_b + \dots \end{cases}$$

qui entraînent la relation :

$$\sqrt{E_A^2 - (\vec{p}_A)^2 c^2} = m_A c^2 = m_B c^2 = \sqrt{E_B^2 - (\vec{p}_B)^2 c^2}$$

2.3 Rappels de mécanique quantique

La mécanique quantique est née au début du XX^{ème} siècle, lorsque la physique classique s'est avérée insuffisante pour comprendre quantitativement nombre de phénomènes : le rayonnement des corps, l'effet photoélectrique, la stabilité des atomes et leurs interactions avec le champ électromagnétique. Parmi les nombreux pionniers de la mécanique quantique, on peut citer Planck, Einstein, Bohr, de Broglie, Heisenberg, Pauli, Schrödinger, Dirac, Born. La mécanique quantique a été une révolution profonde de la représentation des phénomènes physiques. De nombreuses années ont été nécessaires à de nombreux physiciens pour aboutir à une formulation cohérente.

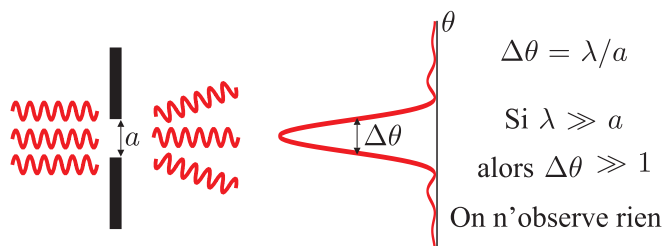
Nous nous limitons dans ce paragraphe au rappel des notions indispensables pour la suite.

2.3.1 Fonction d'onde

De même que les ondes lumineuses sont « portées » par des photons, c'est-à-dire qu'elles peuvent adopter un comportement corpusculaire, dans l'effet photoélectrique par exemple, de façon symétrique, les particules de matière, électrons... peuvent se comporter comme des ondes, comme l'expérience de diffraction des électrons sur un cristal de Davisson et Germer (1927) l'a pour la première fois démontré, après que cette dualité onde-corpuscule a été proposée par de Broglie en 1923.

En conséquence, la notion de trajectoire d'une particule, point matériel défini par sa masse, sa position, et sa vitesse à un instant donné perd de son sens. On aboutit à la représentation d'une particule par une fonction d'onde ψ , qui prend ses valeurs dans un espace de Hilbert et qui rassemble l'ensemble de ses propriétés. À une particule d'impulsion \vec{p} est associée une longueur d'onde $\lambda = h/|\vec{p}|$. Ainsi, de la même manière que la lumière ou les rayons X permettent de sonder la structure d'un cristal avec une résolution environ égale à la longueur d'onde employée (voir figure 2.1), on pourra sonder la matière avec une très grande résolution à l'aide de particules de grande énergie.

On vérifiera sans peine le pouvoir de résolution obtenu avec les faisceaux suivants :

FIGURE 2.1 – La résolution d'un objet de taille a nécessite $\lambda \sim a$.

Particule	Énergie cinétique	Résolution	Objet sondable
Électron	1 keV	1 Å	atome
Électron	1 GeV	1 fm	noyau
Proton	7 TeV	2×10^{-19} m	structure des quarks ?

2.3.2 Inégalités de Heisenberg

Les états d'un système sont décrits par des vecteurs (caractérisés par leur fonctions d'onde) d'un espace de Hilbert. En mécanique quantique, on peut superposer les états : si ψ_1 et ψ_2 sont deux états possibles, alors $\psi = \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$, où λ_1 et λ_2 sont des nombres complexes, est encore un état possible. C'est une propriété remarquable de la mécanique quantique. Elle conduit à des phénomènes sans équivalent classique.

À toute quantité physique mesurable est associé un opérateur hermitien (appelé *observable*) agissant dans l'espace de Hilbert des états du système. Lorsque l'on cherche à mesurer une propriété physique d'un système décrit par la fonction d'onde ψ , le résultat de la mesure est une des valeurs propres de l'opérateur hermitien correspondant. Ainsi, le résultat de la mesure d'une quantité physique suit une loi de probabilité dépendant de la décomposition de la fonction d'onde du système sur la base des vecteurs propres de l'opérateur.

Le principe de correspondance stipule que la mesure d'une coordonnée x, y ou z est associée à l'opérateur multiplication par x ou y ou z (on note généralement les opérateurs avec un chapeau) :

$$\hat{x}[\psi] = x\psi \text{ etc.}$$

et que la mesure de l'impulsion est associée à l'opérateur $-i\hbar\vec{\nabla}$:

$$\vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}.$$

Du fait que les opérateurs \hat{x} et \hat{p}_x ne commutent pas, et de même pour les direc-

tions y et z , il en résulte les inégalités (ou relations d'incertitude) de Heisenberg :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Les quantités Δx , Δp_x , etc. représentent les écarts-types des distributions de probabilité des variables position ou impulsion.

Du fait que le temps est un paramètre et non une propriété du système, il n'est pas associé à un opérateur, il se distingue donc des coordonnées d'espace. On peut cependant associer la mesure de l'énergie E à l'opérateur $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ et énoncer une relation d'incertitude temps-énergie :

$$\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim \hbar/2.$$

La borne inférieure est moins rigoureusement définie, et Δt désigne un laps de temps pendant lequel le système évolue de façon appréciable. Par exemple, un état excité d'un atome n'a pas une énergie parfaitement définie, et le spectre du photon émis lors de sa décroissance vers un autre état possède une largeur intrinsèque.

2.3.3 Équation de Schrödinger

C'est l'équation de Schrödinger qui décrit l'évolution d'un système (non relativiste) décrit par une fonction d'onde ψ . Cette équation remplace le principe fondamental de la dynamique qui permet de prévoir la trajectoire d'une particule en mécanique classique. Pour une particule de masse m dans un potentiel V , l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi.$$

On remarque que cette équation s'obtient en exprimant l'énergie totale en fonction de l'impulsion et de l'énergie potentielle, en appliquant le principe de correspondance et en remplaçant l'énergie E par l'opération $i\hbar \partial / \partial t$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V \\ &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V \rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi. \end{aligned}$$

Le remplacement de l'énergie par $i\hbar \partial / \partial t$ est une extension naturelle du principe de correspondance pour l'impulsion si l'on se réfère au quadrivecteur énergie impulsion de la relativité restreinte. Il faut cependant noter que l'équation de Schrödinger n'est pas compatible avec la dynamique relativiste, car c'est une équation différentielle du premier ordre en temps et du second ordre dans les coordonnées d'espace. Elle ne peut être invariante par les transformations de Lorentz, qui mélangent de façon linéaire les coordonnées d'espace et de temps.

2.3.4 Spin

En présence d'un champ magnétique, le nombre de raies du spectre de certains atomes se démultiplie, c'est l'effet Zeeman. Il est dû à l'interaction avec le champ magnétique du moment magnétique \vec{M}_L créé par l'électron en mouvement. Pour certains atomes, on observe que le nombre de raies est multiplié par un nombre pair, et non impair comme on s'y attend à cause des règles de quantification du moment orbital. Cet effet Zeeman anormal ainsi que l'expérience de Stern et Gerlach (déviations d'un jet d'atomes dans un champ magnétique variable conduisant à la séparation du jet en un nombre pair de jets pour certains atomes) ont conduit à admettre que l'électron possède un moment cinétique intrinsèque, le spin, lui conférant un moment magnétique intrinsèque \vec{M}_S . En champ faible, l'énergie d'interaction magnétique s'écrit :

$$E = - (\vec{M}_L + \vec{M}_S) \cdot \vec{B},$$

avec $\vec{M}_L = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$, $\vec{M}_S = -g\frac{e}{2m_e}\vec{S}$ et $g \simeq 2,002$.

C'est cette énergie d'interaction qui perturbe le spectre des atomes, et c'est la valeur 1/2 du spin de l'électron qui explique le nombre pair de raies. L'existence du spin et le facteur g (facteur de Landé) ne sont pas expliqués par l'équation de Schrödinger. C'est Dirac qui proposera une équation d'évolution compatible avec la relativité, de laquelle découle naturellement l'existence du spin et du facteur g , mais aussi de l'antimatière (voir chapitre 3)!

2.3.5 Évolution de la fonction d'onde

Il est à noter qu'en mécanique quantique, l'évolution d'un système est donnée par l'équation de Schrödinger en l'absence de mesure sur le système, mais que la fonction d'onde est réduite après une mesure à un état propre de l'opérateur associé à la quantité mesurée. C'est ce qui est communément appelé la « réduction du paquet d'ondes ».

2.4 Générateurs infinitésimaux

2.4.1 Translations

Soit un système décrit par une fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$. On effectue sur ce système une translation infinitésimale d'une quantité dx parallèlement à l'axe des x , on la note $\mathcal{T}(dx)$. On cherche l'opérateur $\hat{T}(dx)$ qui fait passer de l'ancienne fonction d'onde à la nouvelle fonction d'onde : $\psi'(x', y', z', t') =$

$\hat{T}(dx) \psi(x, y, z, t)$. Par définition de $\mathcal{T}(dx)$, on veut qu'à l'ordre dx :

$$\psi'(x, y, z, t) = \psi(x - dx, y, z, t) = \psi - dx \partial_x \psi = \psi - dx \frac{i}{\hbar} \hat{p}_x \psi.$$

On peut lire sur cette dernière équation, l'expression de l'opérateur de translation infinitésimale : $\hat{T}(dx) = \hat{I} - dx \frac{i}{\hbar} \hat{p}_x$, où \hat{I} désigne l'opérateur identité.

Une translation finie est le résultat d'une succession de translations infinitésimales. On a ainsi : $\mathcal{T}(x + dx) = \mathcal{T}(dx)\mathcal{T}(x)$ et donc :

$$\hat{T}(x + dx) = \hat{T}(dx)\hat{T}(x) = \left(\hat{I} - dx \frac{i}{\hbar} \hat{p}_x \right) \hat{T}(x).$$

Soit :

$$\frac{d\hat{T}(x)}{dx} = -\frac{i}{\hbar} \hat{p}_x \hat{T}(x) \Rightarrow \hat{T}(x) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} x \hat{p}_x \right].$$

On peut facilement généraliser cette relation :

$$\hat{T}(\vec{r}) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \vec{r} \cdot \hat{\vec{p}} \right].$$

On dit que $\hat{\vec{p}}$ est le générateur infinitésimal des translations spatiales du système.

2.4.2 Rotations géométriques

On s'intéresse maintenant aux rotations qui laissent invariant le point origine du repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Soit M un point quelconque de l'espace. En notant $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, on définit la rotation infinitésimale d'angle $d\alpha$ autour du vecteur unitaire \vec{u} par :

$$\mathcal{R}_{\vec{u}}(d\alpha) \vec{r} = \vec{r} + d\alpha \vec{u} \wedge \vec{r}.$$

Une rotation d'angle fini s'obtient par l'application successive de rotations infinitésimales :

$$\mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha + d\alpha) = \mathcal{R}_{\vec{u}}(d\alpha) \mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha) = \mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha) \mathcal{R}_{\vec{u}}(d\alpha).$$

Les deux dernières rotations commutent car elles se font autour du même vecteur. On a évidemment $\mathcal{R}_{\vec{u}}(0) = \hat{I}$. Par contre, les opérations de rotation autour de vecteurs différents ne commutent pas en général : $\mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha) \mathcal{R}_{\vec{v}}(\beta) \neq \mathcal{R}_{\vec{v}}(\beta) \mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha)$

En particulier, la relation suivante va être utile pour la suite :

$$\mathcal{R}_4 \equiv \mathcal{R}_{\vec{e}_y}(-d\alpha') \mathcal{R}_{\vec{e}_x}(d\alpha) \mathcal{R}_{\vec{e}_y}(d\alpha') \mathcal{R}_{\vec{e}_x}(-d\alpha) = \mathcal{R}_{\vec{e}_z}(d\alpha d\alpha'). \quad (2.3)$$

Démontrons-la.

On constate d'abord que si $d\alpha = 0$ ou si $d\alpha' = 0$ alors $\mathcal{R}4 = \hat{I}$.

Donc $\mathcal{R}4 \vec{r} - \vec{r}$ est proportionnel à $d\alpha d\alpha'$. Pour calculer $\mathcal{R}4$, il suffit donc de se limiter aux termes du premier ordre en $d\alpha$ et $d\alpha'$.

Effectuons le calcul par étapes, en éliminant les termes d'ordre supérieur au fur et à mesure. On a tout d'abord :

$$\mathcal{R}_{\vec{e}_x}(-d\alpha) \vec{r} = \vec{r} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \vec{r},$$

puis

$$\mathcal{R}_{\vec{e}_y}(d\alpha') \mathcal{R}_{\vec{e}_x}(-d\alpha) \vec{r} = \vec{r} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \vec{r} + d\alpha' \vec{e}_y \wedge (\vec{r} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \vec{r})$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\vec{e}_x}(d\alpha) \mathcal{R}_{\vec{e}_y}(d\alpha') \mathcal{R}_{\vec{e}_x}(-d\alpha) \vec{r} &= \vec{r} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \vec{r} + d\alpha' \vec{e}_y \wedge (\vec{r} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \vec{r}) \\ &\quad + d\alpha \vec{e}_x \wedge (\vec{r} + d\alpha' \vec{e}_y \wedge (\vec{r})) \\ &= \vec{r} + d\alpha' \vec{e}_y \wedge (\vec{r} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \vec{r}) \\ &\quad + d\alpha d\alpha' \vec{e}_x \wedge (\vec{e}_y \wedge \vec{r}) \end{aligned}$$

soit enfin

$$\begin{aligned} \mathcal{R}4 \vec{r} &= \vec{r} + d\alpha' \vec{e}_y \wedge (\vec{r} - d\alpha \vec{e}_x \wedge \vec{r}) + d\alpha d\alpha' \vec{e}_x \wedge (\vec{e}_y \wedge \vec{r}) - d\alpha' \vec{e}_y \wedge \vec{r} \\ &= \vec{r} - d\alpha' d\alpha \vec{e}_y \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{r}) + d\alpha d\alpha' \vec{e}_x \wedge (\vec{e}_y \wedge \vec{r}) \end{aligned}$$

On utilise alors la relation :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) = 0$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}4 \vec{r} &= \vec{r} - d\alpha' d\alpha \vec{r} \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) = \vec{r} + d\alpha' d\alpha \vec{e}_z \wedge \vec{r} \\ &= \mathcal{R}_{\vec{e}_z}(d\alpha d\alpha') \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

2.4.3 Description quantique

On va voir dans ce paragraphe comment se traduisent les propriétés des rotations dans le cadre de la mécanique quantique.

2.4.3.1 Système sans spin

Soit un système décrit par la fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$ (système sans spin). On effectue une rotation de $d\alpha$ autour de l'axe des z . Comme précédemment on cherche l'opérateur $\widehat{R}_{\vec{e}_z}(d\alpha)$ qui fait passer de ψ à ψ' avec :

$$\begin{aligned}\psi'(\vec{r}, t) &= \psi(\mathcal{R}_{\vec{e}_z}(-d\alpha)\vec{r}, t) = \psi(\vec{r} - d\alpha \vec{e}_z \wedge \vec{r}) \\ \psi'(x, y, z, t) &= \psi(x + y d\alpha, y - x d\alpha, z, t) \\ \psi' &= \psi + d\alpha (y\partial_x - x\partial_y) \psi,\end{aligned}\quad (2.4)$$

on voit apparaître l'une des composantes de l'opérateur moment cinétique :

$$\widehat{L}_z := y\partial_x - x\partial_y,$$

et l'on peut lire sur l'équation (2.4) que :

$$\widehat{R}_{\vec{e}_z}(d\alpha) = \widehat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} \widehat{L}_z.$$

De même, on peut voir que :

$$\widehat{R}_{\vec{e}_x}(d\alpha) = \widehat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} \widehat{L}_x \quad \text{et} \quad \widehat{R}_{\vec{e}_y}(d\alpha) = \widehat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} \widehat{L}_y,$$

et en déduire que, plus généralement, on obtient, de façon analogue aux translations :

$$\widehat{R}_{\vec{u}}(d\alpha) = \widehat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} \vec{u} \cdot \widehat{\vec{L}}$$

et

$$\widehat{R}_{\vec{u}}(\alpha) = \exp\left(-\alpha \frac{i}{\hbar} \vec{u} \cdot \widehat{\vec{L}}\right).$$

L'opérateur $\widehat{\vec{L}}$ est le générateur infinitésimal des rotations du système.

On peut vérifier que les relations de composition des rotations sont respectées. On dit que les opérateurs agissant sur le système constituent une représentation des opérations de rotation dans l'espace.

Considérons en particulier la relation (2.3) démontrée plus haut :

$$\mathcal{R}_{\vec{e}_y}(-d\alpha') \mathcal{R}_{\vec{e}_x}(d\alpha) \mathcal{R}_{\vec{e}_y}(d\alpha') \mathcal{R}_{\vec{e}_x}(-d\alpha) = \mathcal{R}_{\vec{e}_z}(d\alpha d\alpha')$$

Elle se traduit par :

$$\left(\widehat{I} + i \frac{d\alpha'}{\hbar} \widehat{L}_y\right) \left(\widehat{I} - i \frac{d\alpha}{\hbar} \widehat{L}_x\right) \left(\widehat{I} - i \frac{d\alpha'}{\hbar} \widehat{L}_y\right) \left(\widehat{I} + i \frac{d\alpha}{\hbar} \widehat{L}_x\right) = \widehat{I} d - i \frac{d\alpha d\alpha'}{\hbar} \widehat{L}_z.$$

En ne conservant que les termes du premier ordre en $d\alpha$ et $d\alpha'$, on obtient :

$$[\widehat{L}_x, \widehat{L}_y] = i\hbar\widehat{L}_z, \quad (2.5)$$

ce qui est bien vérifié, comme on peut le calculer directement à partir de la définition des opérateurs \widehat{L}_x , \widehat{L}_y et \widehat{L}_z . Par permutation circulaire des indices x, y, z , on retrouve aussi sans difficulté les autres relations de commutation.

Les relations de commutation des composantes du moment cinétique orbital apparaissent donc comme une conséquence de la non commutativité des opérations de rotation.

2.4.3.2 Système avec spin

Le raisonnement du paragraphe précédent ne s'applique pas dans le cas général, car la relation entre ψ' et ψ n'est plus la même à cause de l'existence possible de degrés de liberté internes. De ce fait, on va voir que le spin va s'introduire naturellement.

On cherche un opérateur linéaire et unitaire $\widehat{R}_{\vec{u}}(\alpha)$ qui relie ψ' et ψ pour une rotation $\mathcal{R}_{\vec{u}}(\alpha)$ dans l'espace géométrique.

Si $\widehat{R}_{\vec{u}}(0) = \widehat{I}d$, une rotation infinitésimale d'angle $d\alpha$ autour de z s'écrira par exemple en toute généralité :

$$\widehat{R}_{\vec{e}_z}(d\alpha) = \widehat{I}d - d\alpha \frac{i}{\hbar} \widehat{J}_z.$$

L'opérateur \widehat{J}_z est celui que l'on cherche à caractériser. Il est hermitien car $\widehat{R}_{\vec{e}_z}(d\alpha)$ est unitaire par hypothèse. En effet :

$$\widehat{R}_{\vec{e}_z}^\dagger(d\alpha) \widehat{R}_{\vec{e}_z}(d\alpha) = \widehat{I} \Leftrightarrow \left(\widehat{I} + d\alpha \frac{i}{\hbar} \widehat{J}_z^\dagger \right) \left(\widehat{I} - d\alpha \frac{i}{\hbar} \widehat{J}_z \right) = \widehat{I}.$$

D'où, en gardant le premier ordre : $\widehat{J}_z^\dagger - \widehat{J}_z = 0$, CQFD.

On obtient les relations semblables pour les directions x et y .

Pour respecter les relations de composition des opérations de rotation, on est conduit, comme précédemment, aux relations : $[\widehat{J}_x, \widehat{J}_y] = i\hbar\widehat{J}_z$ et permutations circulaires sur x, y, z .

Cette fois, c'est une relation qui s'impose à l'opérateur $\widehat{\vec{J}}$ pour qu'il représente le moment cinétique total du système, c'est-à-dire le générateur des rotations du système.

2.5 Moments cinétiques

2.5.1 Définition des opérateurs moment cinétique

Les développements des paragraphes précédents justifient la généralisation de la définition d'un moment cinétique comme opérateur vectoriel hermitien $\widehat{\vec{J}}$ dont les 3 composantes vérifient les relations de commutation :

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$$

où l'on a utilisé pour la première fois le symbole de Levi-Civita :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.6)$$

On retiendra la relation : $\widehat{R}_{\vec{u}}(\alpha) = \exp\left(-\alpha \frac{i}{\hbar} \vec{u} \cdot \widehat{\vec{J}}\right)$.

L'opérateur $\widehat{\vec{J}}$ est le générateur infinitésimal des rotations spatiales du système.

2.5.2 Spin

L'étude générale des propriétés d'un opérateur moment cinétique montre que (voir exercice 2.i) :

- Les seules valeurs propres possibles de l'opérateur \widehat{J}^2 sont de la forme : $j(j+1)\hbar^2$ avec j entier ou demi-entier positif ;
- Les valeurs propres des opérateurs \widehat{J}_x , \widehat{J}_y et \widehat{J}_z sont les $(2j+1)$ quantités $m\hbar$ avec : $m \in \{-j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j\}$.

Ainsi, les particules peuvent porter un moment cinétique interne entier ou demi-entier, appelé spin.

L'introduction d'un moment cinétique intrinsèque pour l'électron avec $j = 1/2$ a été motivée par l'expérience, et a permis de comprendre de nombreuses observations sur les spectres atomiques. L'espace des états de l'électron devient alors le produit tensoriel de l'espace des fonctions d'onde dépendant des variables \vec{r} et \vec{p} , appelé espace orbital, et de l'espace des états de spin. Pour un spin $1/2$, cet espace est de dimension deux, et un vecteur de cet espace s'appelle un *spineur* à deux composantes. La base usuelle consiste à prendre les états propres de la composante z de l'opérateur moment cinétique intrinsèque. Les valeurs propres correspondantes sont $\hbar/2$ et $-\hbar/2$.

L'opérateur de transformation de la fonction d'onde pour un spin J quelconque est donné par la relation :

$$\widehat{R}_{\vec{u}}(\alpha) = \exp\left(-\alpha \frac{i}{\hbar} \vec{u} \cdot \widehat{\vec{J}}\right).$$

2.5.2.1 Cas du spin 1/2

L'opérateur moment cinétique interne pour un spin 1/2 s'écrit (voir exercice 2.i) :

$$\widehat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2} \widehat{\vec{\sigma}}$$

où $\widehat{\vec{\sigma}}$ est le vecteur des matrices de Pauli : $\widehat{\vec{\sigma}} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^\top$ avec

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Si on applique cette relation à la rotation de 2π d'un spin 1/2 autour de l'axe des z , on obtient :

$$\widehat{R}_{\vec{e}_z}(2\pi) = \exp\left(-2\pi \frac{i}{\hbar} \frac{\hbar}{2} \widehat{\sigma}_z\right) = \begin{pmatrix} \exp(-i\pi) & 0 \\ 0 & \exp(i\pi) \end{pmatrix} = -\widehat{I}.$$

La rotation de 2π n'est pas égale à l'identité, mais à son opposé !

Cette possibilité provient du fait que nous avons construit les rotations à partir des rotations infinitésimales, sans imposer qu'une rotation de 2π soit l'identité. On trouve ainsi des représentations sans équivalent classique du groupe des rotations avec les moments cinétiques demi-entiers.

Intermède : opération exponentielle sur les matrices

On définit l'exponentielle d'une matrice par la relation :

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

On montre en particulier que : $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

Quelques propriétés qui nous seront utiles :

- attention : si $[A, B] \neq 0$ alors $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$;
- un petit calcul montre que : $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A))$;
- soit $M = \exp(iG)$: si G est hermitienne, alors M est unitaire :

$$G^\dagger = G \Rightarrow \exp(-iG^\dagger) = \exp(-iG) \Rightarrow M^\dagger = M^{-1}.$$

Retour au spin 1/2

Pour une rotation quelconque, l'opérateur qui s'applique à un spineur est :

$$\widehat{R}_{\vec{u}}(\alpha) = \exp\left(-i\alpha\vec{u} \cdot \frac{\widehat{\vec{\sigma}}}{2}\right).$$

Comme les matrices de Pauli sont hermitiennes de trace nulle, $\widehat{R}_{\vec{u}}(\alpha)$ est une matrice 2×2 unitaire de déterminant 1, elle appartient au groupe noté SU(2), groupe de Lie qui dépend de trois paramètres continus indépendants.

Réciproquement, toute matrice de SU(2) peut s'écrire sous la forme $\widehat{R}_{\vec{u}}(\alpha)$: les matrices de Pauli engendrent groupe SU(2). En effet, on peut facilement montrer la relation :

$$\widehat{R}_{\vec{u}}(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} \hat{I} - i \sin \frac{\alpha}{2} \vec{u} \cdot \widehat{\vec{\sigma}}.$$

2.5.3 Addition des moments cinétiques

Soit un système composé de deux sous-systèmes possédant des moments cinétiques associés aux opérateurs \widehat{J}_1 et \widehat{J}_2 agissant sur des variables indépendantes. Il peut s'agir de deux particules, ou d'une seule particule avec son moment orbital et son moment intrinsèque, ou de systèmes plus complexes.

On s'intéresse à l'espace de Hilbert décrivant les états des moments cinétiques. On prend une base de vecteurs propres normalisés communs aux opérateurs \widehat{J}_1^2 , \widehat{J}_2^2 , \widehat{J}_{1z} , \widehat{J}_{2z} . On note ces $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ vecteurs $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ avec :

$$\begin{aligned}\widehat{J}_i^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= j_i(j_i + 1) \hbar^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \\ \widehat{J}_{iz} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= m_i \hbar |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle.\end{aligned}$$

Les modules de \widehat{J}_1 et \widehat{J}_2 sont fixés (j_1 et j_2 fixés), mais leurs orientations sont quelconques, les m_i peuvent donc prendre toutes les valeurs entre $-j_i$ et $+j_i$ par sauts de une unité. Le moment cinétique total du système est : $\widehat{J} = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2$.

On montre (exercice 2.j) que :

- les valeurs propres de \widehat{J}^2 sont $J(J + 1) \hbar^2$ avec : $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$;
- les valeurs propres de \widehat{J}_z sont $M \hbar$ avec : $-J \leq M \leq +J$.

On peut ainsi construire une autre base de l'espace de Hilbert précédent à partir des vecteurs propres des opérateurs \widehat{J}^2 et \widehat{J}_z . Ces vecteurs de base sont notés

$|J, M\rangle$. Ils peuvent s'exprimer en fonction des vecteurs de base précédents (avec $M = m_1 + m_2$) :

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{JMm_1 m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle.$$

Les phases des vecteurs de base sont choisies de façon que tous les coefficients de Clebsch-Gordan $C_{JMm_1 m_2}$ soient réels.

Nota bene. Les coefficients $C_{JMm_1 m_2}$ dépendent de j_1 et j_2 , c'est pourquoi on devrait noter les vecteurs $|J, M\rangle$ plutôt $|j_1, j_2, J, M\rangle$, mais on a préféré ici alléger l'écriture.

2.6 Équation de Klein-Gordon

2.6.1 Motivation

L'équation de Schrödinger est une équation différentielle du premier ordre en temps et du second ordre pour les coordonnées d'espace. Elle est incompatible avec la relativité restreinte.

Il était possible dès 1925 d'appliquer le principe de correspondance pour une particule relativiste libre à l'équation qui relie l'énergie et la quantité de mouvement pour obtenir l'équation dite de Klein-Gordon :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \Delta \psi + m^2 c^4 \psi \quad (2.8)$$

Schrödinger aurait en effet calculé les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène en partant de cette équation et obtenu des valeurs en bon accord avec les mesures. Cependant la structure fine des raies – c'est-à-dire la dépendance de l'énergie d'un niveau n avec le moment cinétique orbital de l'électron, déjà très bien mesurée – était mal reproduite (voir figure 2.2). Il aurait préféré l'équation non relativiste qui donne de meilleurs résultats.

La raison, qui sera comprise plus tard, est que les corrections dues aux effets relativistes (vitesse de l'électron de l'atome d'hydrogène de l'ordre de 1 % de la vitesse de la lumière) sont partiellement compensées par celles dues au spin de l'électron, qui induit un moment magnétique intrinsèque pour l'électron, moment magnétique qui interagit avec le champ électromagnétique créé par le proton et entraîne un décalage des niveaux d'énergie. Cette compensation partielle fait que les niveaux d'énergie calculés avec l'équation de Schrödinger sont en meilleur accord avec l'expérience que l'équation de Klein-Gordon.

L'équation de Klein-Gordon (« équation de K-G ») sera proposée plus tard, en 1927, par plusieurs auteurs.

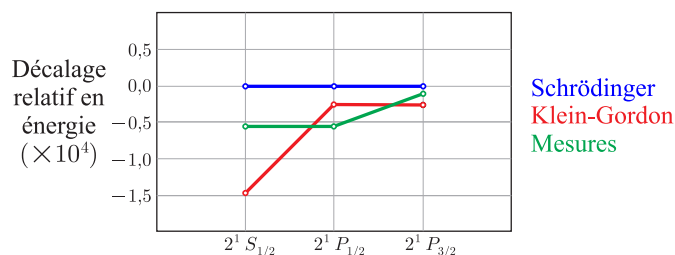


FIGURE 2.2 – Structure fine du spectre de l'atome d'hydrogène. Décalage des raies par rapport aux prédictions de l'équation de Schrödinger. Couche $n = 2$; sous-couches $l = 0, 1$; $j = 1/2, 3/2$.

2.6.2 Insuffisance des équations

Malgré les succès de l'équation de Schrödinger puis de Klein-Gordon, les physiciens sont confrontés à des difficultés :

- il faut ajouter « à la main » un terme pour prendre en compte le spin de l'électron. La modification des niveaux d'énergie en présence d'un champ magnétique s'écrit : $\Delta E = -g \frac{q}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B}$ ($g \simeq 2$). Elle est analogue à la relation classique : $\Delta E = -\frac{q}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}$, mais il y a un facteur mystérieux g en plus ;
- l'équation de K-G est du second ordre en temps, la donnée de la fonction d'onde à l'instant initial ne suffit pas pour prédire son évolution, contrairement à l'équation de Schrödinger ;
- l'équation de K-G a des solutions d'énergie négative :

$$\psi(\vec{r}, t) = N \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{r}) \right]$$

est solution pour

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} ;$$

- l'équation de Klein-Gordon ne permet pas de définir une probabilité de présence toujours positive.

Nous verrons au chapitre 3 comment certaines de ces difficultés ont été levées par une nouvelle équation, l'équation de Dirac.

2.6.3 Densité et densité de courant de probabilité

Nous montrons dans ce paragraphe la difficulté de définir la notion de probabilité de présence avec l'équation de Klein-Gordon.

◇ **Notation.** À partir d'ici, et pour alléger l'écriture, nous utiliserons dans les cours les unités naturelles : $\hbar = c = k = \epsilon_0 = 1$.

2.6.3.1 Cas de l'équation de Schrödinger

En mécanique quantique, la quantité $\rho = \psi^* \psi$ donne la densité de probabilité de présence du système décrit par ψ , toujours positive. On peut définir une densité de courant de probabilité par :

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*].$$

Elle vérifie l'équation de continuité (exercice 2.m) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0,$$

qui assure la conservation de la probabilité de présence au cours du temps :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Notons que pour une onde plane $\psi = N \exp[-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})]$:

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*] = \frac{|N|^2}{m} \vec{p} = |N|^2 \vec{v} = \rho \vec{v}.$$

2.6.3.2 Cas de l'équation de Klein-Gordon

Pour rester compatible avec la relativité, il faut définir un quadrivecteur courant :

$$j^\mu = i [\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*] \quad \text{avec} \quad j^0 = \rho; \quad j^1 = j_x; \quad j^2 = j_y; \quad j^3 = j_z.$$

En utilisant l'équation de K-G on obtient l'équation de continuité (exercice 2.m) :

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Un problème subsiste cependant.

Si on prend la solution $\psi(\vec{r}, t) = N \exp[-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})]$, on obtient :

$$j^0 = \rho = -\frac{1}{m} \text{Im} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = -\frac{|N|^2}{m} \text{Im} [-iE] = \frac{|N|^2}{m} E.$$

Cette quantité est négative pour les solutions d'énergie négative $E = -\sqrt{p^2 + m^2}$.

Difficile de concevoir une densité de probabilité négative !

À retenir dans le chapitre 2

- constantes fondamentales ;
- unités naturelles : $\hbar = c = k = \varepsilon_0 = 1$;
- manipulation des notations quadridimensionnelles ;
- transformations de Lorentz spéciales, rapidité, masse invariante :

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Omega & -\sinh \Omega \\ -\sinh \Omega & \cosh \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x c \end{pmatrix}$$

$$\cosh \Omega = \gamma ; \sinh \Omega = \beta\gamma ; E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 ;$$

- longueur d'onde de de Broglie : $\lambda = h/p$;
- principe de correspondance, équations de Schrödinger et de Klein-Gordon :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \psi$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \Delta \psi + m^2 c^4 \psi ;$$

- notion de générateur infinitésimal ;
- définition d'un moment cinétique : $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$;
- valeur propre de \widehat{J}^2 : $j(j+1)\hbar^2$ avec j entier ou demi-entier ;
- Valeurs propres de $\widehat{J}_{x,y,z}$:

$$m\hbar \text{ avec } m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\} : (2j+1) \text{ valeurs ;}$$

- addition des moments cinétiques :

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 ; m = m_1 + m_2.$$

2.7 Exercices**Exercice 2.a – Unités naturelles**

La constante de structure fine α est une constante sans dimension qui donne une mesure de l'intensité de l'interaction électromagnétique. Elle est définie par $\alpha = e^2/4\pi$ en unités naturelles. Calculer $1/\alpha$.

Exercice 2.b – Dilatation du temps

Le muon a une masse de $106 \text{ MeV}/c^2$ et une durée de vie τ de $2,2 \mu\text{s}$. On considère un muon d'énergie cinétique T de 106 GeV . Quelle distance parcourt-il pendant une durée de vie ? Comparer à $c\tau$.

Exercice 2.c – Transformation de Lorentz

Montrer que la composition de deux transformations de Lorentz spéciales suivant le même axe est équivalente à une transformation de Lorentz de rapidité égale à la somme des rapidités des deux transformations.

Exercice 2.d – Énergie seuil

On considère la réaction endoénergétique : $(1) + (2) \rightarrow (3) + (4)$; où (1) est la particule incidente et (2) la particule cible au repos.

1. Montrer que l'énergie cinétique minimale que doit posséder (1) pour que la réaction puisse avoir lieu s'exprime :

$$T_1 = -Q \times \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{2m_2},$$

où : $Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)] c^2 < 0$.

2. Que devient cette expression à la limite non relativiste ?

Exercice 2.e – Élément d'intégration

1. Montrer que $d^3\vec{p}/E := dp_x dp_y dp_z / E$ est invariant par changement de repère dans le cadre de la relativité restreinte.
2. En déduire que l'élément d'espace des phases :

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) \frac{d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_1 (2\pi)^3 2E_2}$$

est aussi invariant.

La quantité $\delta^4(p_1 + p_2 - p)$ est le produit de quatre distributions de Dirac :

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p) = \delta(E_1 + E_2 - E) \delta(p_{1x} + p_{2x} - p_x) \delta(p_{1y} + p_{2y} - p_y) \delta(p_{1z} + p_{2z} - p_z).$$

Exercice 2.f – Conservation de l'énergie-impulsion

1. Montrer que la masse invariante d'un système de deux particules est toujours supérieure ou égale à la somme des masses des particules.
2. Le pion neutre π^0 est une particule de masse $135 \text{ MeV}/c^2$ qui se désintègre très rapidement (durée de vie de $8,5 \times 10^{-17} \text{ s}$) en deux photons. Quelle est la masse invariante du pion neutre ? Du système de deux photons ?

Exercice 2.g – Inégalités de Heisenberg

Démontrer l'inégalité : $\Delta A \cdot \Delta B \geq \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| / 2$ où A et B sont des observables et ΔA (resp. B) est l'écart quadratique moyen des résultats de la mesure de A (resp. B).

Exercice 2.h – Longueur d'onde de de Broglie

Calculer la longueur d'onde de de Broglie d'un électron de 1 keV, d'un électron de 1 GeV, d'un proton de 7 TeV (les énergies données sont les énergies cinétiques des particules). On utilisera la constante de conversion $\hbar c \simeq 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ pour simplifier les calculs. Dire quelle structure de la matière peut être analysée dans chacun de ces cas.

Exercice 2.i – Opérateurs moments cinétiques

1. Spin 1/2
Soit l'espace à 2 dimensions d'un spin 1/2, les 2 vecteurs de base étant les états $S_z = +\hbar/2$ et $-\hbar/2$.
Représenter l'opérateur S_z sous forme d'une matrice. Dire pourquoi S_x , S_y et S_z ont les mêmes valeurs propres, trace et déterminant.
2. Matrices de Pauli
On définit les matrices de Pauli : $\sigma_i = (2/\hbar)S_i$.
Utiliser les propriétés montrées en 1. pour trouver la forme générale des σ_i .
Choisir σ_x réelle à coefficients positifs, en déduire σ_y en utilisant la relation $[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$. Calculer les vecteurs propres de S_x et S_y .
3. Propriétés des opérateurs moment cinétique
(a) On rappelle les relations de commutation qui définissent un opérateur moment cinétique : $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$.
En déduire que $[J^2, J_i] = 0$.

On pose $J^\pm = J_x \pm i J_y$. Calculer $[J_z, J^\pm]$ et $[J^2, J^\pm]$.

Montrer que J^- est hermitique conjugué de J^+ .

- (b) On désigne par $|a, b\rangle$ un vecteur propre normalisé commun à J^2 et J_z , dont les valeurs propres sont respectivement $\hbar^2 a$ et $\hbar b$. Les nombres a et b sont des réels, a priori inconnus. Montrer que $J^\pm |a, b\rangle$ est un vecteur proportionnel à $|a, b \pm 1\rangle$. Calculer la norme des vecteurs $J^\pm |a, b\rangle$. En déduire les valeurs possibles de a et b .

Remarque : les états $|a, b\rangle$ sont plutôt notés $|j, m\rangle$ où : $a = j(j+1)$ et $b = m$.

- (c) Retrouver ainsi les matrices de Pauli.

4. Spin 1

Calculer les matrices représentant J_i et J^2 pour le spin 1.

Exercice 2.j – Addition des moments cinétiques

On reprend les notations de la section 2.5.3.

A) Cas général

- Combien y a-t-il de vecteurs propres $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$?
- Montrer que l'opérateur $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$ est bien un opérateur moment cinétique.
- Calculer de deux façons différentes $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | \hat{J}_z | J, M \rangle$ et en déduire que $C_{JMm_1m_2}$ est nul si $M \neq m_1 + m_2$.
- Montrer que $J \leq j_1 + j_2$.
- En utilisant le produit scalaire $\langle j_1, j_2, \pm j_1, \pm j_2 | J, M \rangle$, montrer qu'on doit trouver des vecteurs $|J, M\rangle$ avec J supérieur ou égal à $|j_1 - j_2|$ et inférieur ou égal à $j_1 + j_2$. Un comptage précis du nombre d'états possibles pour chaque valeur de M montrerait que toutes les valeurs de J telles que $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ sont effectivement réalisées. On admettra ce résultat.
- Combien y a-t-il de vecteurs $|J, M\rangle$ pour $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$.
- En déduire que $C_{JMm_1m_2}$ est nul si la condition

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$$

n'est pas vérifiée.

B) Cas de deux spins 1/2

On considère le système composé de deux particules de spin 1/2. On veut exprimer les états $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2\rangle$ en fonction des états $|J, M\rangle$ possibles.

1. Montrer que $\widehat{J}^2 = \widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2 + 2\widehat{J}_{1z}\widehat{J}_{2z} + \widehat{J}_1^+\widehat{J}_2^- + \widehat{J}_1^-\widehat{J}_2^+$.
2. Pour chaque état $\psi_{m_1 m_2} = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2\rangle$, calculer $\widehat{J}^2\psi_{m_1 m_2}$ et $\widehat{J}_z\psi_{m_1 m_2}$. Calculer alors $\widehat{J}^2(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \pm |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle)$ et en déduire qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{2}|1, 0\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{2}|0, 0\rangle \end{aligned}$$
3. En déduire l'expression de tous les vecteurs $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2\rangle$ en fonction des états $|J, M\rangle$ possibles.

Exercice 2.k – Équation de Klein-Gordon

On considère l'équation de Klein Gordon $(\square + m^2)\psi = 0$, où \square désigne le l'opérateur d'alembertien $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, où Δ est le laplacien. Montrer qu'on peut écrire une équation du premier ordre en temps sur la fonction d'onde à deux composantes $(\Phi, \Xi)^T$ en posant :

$$\Phi = \psi + \frac{i}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{et} \quad \Xi = \psi - \frac{i}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Exercice 2.l – Spin et distribution angulaire

On considère une particule Λ de spin 1/2 au repos qui se désintègre selon :

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-.$$

Le pion est une particule de spin nul. On suppose que le Λ est dans un état propre de \widehat{S}_z (projection du spin sur l'axe Oz d'un repère centré sur la particule) : $|\Lambda, s = 1/2, s_z = \pm 1/2\rangle$. On mesure la direction de l'impulsion du proton (repérée par les angles θ et φ des coordonnées sphériques) et son hélicité $\hbar\lambda$, c'est-à-dire la projection de son spin sur sa quantité de mouvement : $\hbar\lambda = (\vec{S} \cdot \vec{p})/|\vec{p}|$. Après la mesure, le proton est donc dans l'état noté $|\theta, \varphi, \lambda\rangle$. L'amplitude de probabilité de cette observation est donnée par : $A_{\pm\frac{1}{2}, \lambda}(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi, \lambda | p, \pi^-, j = 1/2, m = \pm 1/2 \rangle$, où $|p, \pi^-, j = 1/2, m = \pm 1/2\rangle$ désigne l'état final proton pion dans un état propre $|1/2, m = \pm 1/2\rangle$ des opérateurs \widehat{J}^2 et \widehat{J}_z . C'est-à-dire que la probabilité de trouver le proton dans la direction (θ, φ) et l'élément d'angle solide $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ vaut $|A_{\pm\frac{1}{2}, \lambda}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de λ ?

2. Justifier que l'état final est dans un état propre du moment cinétique total de \widehat{J}^2 et \widehat{J}_z , et donner les valeurs propres.
3. En déduire que : $A_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(0, 0) = \langle 0, 0, -\frac{1}{2} | \mathbf{p}, \pi^-, j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \rangle = 0$ et $A_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(0, 0) = 0$.

On pose $A^+ = A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(0, 0)$ et $A^- = A_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(0, 0)$. On cherche à obtenir $A_{m, \lambda}(\theta, \varphi)$ en fonction de ces deux quantités. L'état $|\theta, \varphi, \lambda\rangle$ du proton s'obtient à partir de l'état $|0, 0, \lambda\rangle$ par une rotation \mathcal{R}_1 de θ autour de l'axe Oy suivie par une rotation \mathcal{R}_2 de φ autour de Oz . On rappelle que la transformation d'un spineur par une rotation d'angle α autour du vecteur unitaire \vec{u} est donnée par :

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp\left(-i\alpha\vec{u}\cdot\widehat{\vec{S}}/\hbar\right)\psi.$$

4. Calculer les opérateurs $\widehat{\mathcal{R}}_1$ et $\widehat{\mathcal{R}}_2$ correspondant à \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 .
5. En déduire $A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\theta, \varphi)$ et $A_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\theta, \varphi)$ en fonction de A^+ et A^- .
6. On suppose que s_z , la projection du spin du Λ sur l'axe Oz , vaut $+1/2$. Exprimer la probabilité de trouver le proton dans la direction (θ, φ) en fonction de $\alpha = (|A^+|^2 - |A^-|^2) / (|A^+|^2 + |A^-|^2)$.

Exercice 2.m – Équations de continuité

Démontrer les équations de continuité pour les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon. On rappelle que :

— pour l'équation de Schrödinger :

$$\rho = \psi^* \psi \quad \text{et} \quad \vec{j} = -\frac{i}{2m} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*];$$

— pour l'équation de Klein-Gordon :

$$j^\mu = i[\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*] \quad \text{avec} \quad j^0 = \rho; \quad j^1 = j_x; \quad j^2 = j_y; \quad j^3 = j_z.$$

Version
préliminaire

Chapitre 3

Antimatière

En cherchant à résoudre les problèmes liés aux équations de Schrödinger et de Klein-Gordon évoqués au chapitre 2, Dirac formule une équation en 1928, compatible avec la relativité restreinte, qui permet de comprendre la nécessité du spin de l'électron et du facteur de Landé g qui s'introduit dans l'expression de son moment magnétique intrinsèque.

Cette équation présente ses propres difficultés, elle possède notamment des solutions correspondant à un système de masse négative, qui conduiront Dirac, après quelques détours, à postuler l'existence du positron, première particule d'antimatière, avant même sa découverte en 1933 par Anderson. En 1928, seuls l'électron et le proton avaient été observés. Le neutron ne le sera qu'en 1932. C'est dire l'audace de cette prédiction. Dirac recevra le prix Nobel pour ces travaux en 1933.

Nous consacrons ce chapitre à l'étude de l'équation de Dirac. Initialement, cette équation était conçue pour décrire la dynamique de l'électron. Nous savons aujourd'hui qu'elle s'applique à tous les fermions de spin $1/2$, c'est-à-dire à toutes les particules élémentaires de matière. Nous serons donc amenés à exploiter les résultats présentés dans ce chapitre dans toute la suite du cours.

3.1 Équation de Dirac

3.1.1 Établissement de l'équation de Dirac

Afin d'obtenir une équation qui soit déterministe et compatible avec la relativité restreinte, Dirac cherche à écrire une équation différentielle du premier ordre en espace et en temps. Il l'écrit sous la forme initiale suivante :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m \beta \right) \psi. \quad (3.1)$$

Les paramètres qu'il introduit $\vec{\alpha}$ et β sont à déterminer. La notation $\vec{\alpha}$ ne doit pas

laisser croire que ses composantes α_1 , α_2 et α_3 se transforment comme les composantes d'un vecteur : elles sont indépendantes du référentiel considéré. Cette notation est simplement introduite pour alléger l'écriture. Par ailleurs, signalons que β n'a rien à voir avec le v/c de la relativité restreinte, mais c'est la notation choisie par Dirac.

La compatibilité avec l'équation de Klein-Gordon exige que :

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m\beta \right) \left(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m\beta \right) \psi = \left(-\nabla^2 + m^2 \right) \psi.$$

Il vient :

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \quad (3.2)$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = 0 \quad \dots \text{ et permutation des indices } \dots \quad (3.3)$$

$$\alpha_1\beta + \beta\alpha_1 = 0 \quad \dots \text{ et de même pour 2 et 3... } \quad (3.4)$$

Une conséquence apparaît alors, $\vec{\alpha}$ et β ne peuvent pas être des nombres : ce sont des opérateurs que l'on notera donc $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$.

Ces deux opérateurs doivent posséder les propriétés suivantes :

- ils sont linéaires, car l'équation obtenue doit être linéaire ;
- ils sont hermitiens car $\left(-i\hat{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m\hat{\beta} \right)$ est le hamiltonien du système et doit donc être hermitien (noter que $-i\vec{\nabla} = \hat{p}$ est hermitien) ;
- leurs valeurs propres sont ± 1 car leur carré vaut l'identité ;
- ils sont de trace nulle.

Montrons par exemple la nullité des traces : En utilisant la relation (3.4) il vient

$$\hat{\beta} \times \left(\hat{\alpha}_1 \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_1 = 0 \right) ,$$

puis, en utilisant (3.2), on en déduit que $\hat{\beta} \hat{\alpha}_1 \hat{\beta} = -\hat{\alpha}_1$. En prenant la trace de cette relation on obtient

$$\text{Tr} \left(\hat{\beta} \hat{\alpha}_1 \hat{\beta} \right) = -\text{Tr} \left(\hat{\alpha}_1 \right) , \quad (3.5)$$

mais comme $\hat{\beta}^2 = 1$ implique que $\hat{\beta} = \hat{\beta}^{-1}$, la matrice $\hat{\beta} \hat{\alpha}_1 \hat{\beta}$ est semblable à $\hat{\alpha}_1$ qui est donc comme annoncé de trace nulle en vertu de l'équation (3.5). En utilisant les deux autres versions en $\hat{\alpha}_2$ et $\hat{\alpha}_3$ de l'équation (3.4) on montre la nullité de leurs traces.

Pour celle de $\hat{\beta}$, en vertu de (3.2) on écrit que

$$\hat{\beta} = \hat{\beta} \hat{I} = \hat{\beta} \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_1 ,$$

qui en utilisant (3.4) devient

$$\hat{\beta} = -\hat{\alpha}_1 \hat{\beta} \hat{\alpha}_1, \quad (3.6)$$

La matrice $\hat{\alpha}_1$ étant sa propre inverse, la trace de l'équation (3.6) implique donc que $\text{Tr}(\hat{\beta}) = 0$.

L'ensemble de leurs propriétés implique que les matrices représentant les opérateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ doivent donc être carrées d'ordre pair. On vérifie facilement qu'il n'y a pas assez de matrices 2×2 indépendantes pour satisfaire toutes ces conditions. La solution la plus simple est donc de prendre des matrices 4×4 au minimum.

Pour satisfaire l'ensemble des contraintes, on peut les écrire sous la forme :

$$\hat{\alpha}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_{1,2,3} \\ \hat{\sigma}_{1,2,3} & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{I}_2 & 0 \\ 0 & -\hat{I}_2 \end{pmatrix}$$

où \hat{I}_2 est la matrice identité d'ordre 2 et $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ et $\hat{\sigma}_3$ sont les 3 matrices de Pauli introduites lors de l'étude du moment cinétique (voir équation (2.7) page 23).

On rappelle que les matrices de Pauli vérifient :

$$\hat{\sigma}_1^2 = \hat{I} \quad ; \quad [\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2] = 2i\hat{\sigma}_3 \quad ; \quad \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 = -\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1$$

et relations similaires par permutations circulaires des indices.

La conclusion de cette étude est que l'on est conduit à élargir l'espace représentant les états. Ce n'est plus un espace de fonctions d'onde à valeurs complexes comme en mécanique quantique « classique » mais un espace de fonctions à 4 composantes complexes que l'on appelle des (bi)spineurs.

Il reste à interpréter physiquement ces fonctions. Nous le ferons au paragraphe 3.2.

Remarque. *Il est possible de trouver d'autres matrices solutions des équations (3.2) à (3.4). En fait tout ensemble de 4 matrices construites à partir des matrices précédentes par une transformation $M \rightarrow U M U^\dagger$ où U est une matrice unitaire ($U^\dagger U = U U^\dagger = I$) vérifie le système de contraintes, comme on peut le voir très facilement. Toutes ces solutions conduisent à des représentations équivalentes de la physique. Il suffit de représenter le système physique initialement décrit par ψ par la nouvelle fonction d'onde $\psi' = U\psi$:*

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m\beta \right) \psi \Rightarrow i \frac{\partial U\psi}{\partial t} = \left(-iU\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + mU\beta \right) \psi \Rightarrow \\ i \frac{\partial U\psi}{\partial t} &= \left(-iU\vec{\alpha}U^\dagger \cdot \vec{\nabla} + mU\beta U^\dagger \right) U\psi \Rightarrow i \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \left(-i\vec{\alpha}' \cdot \vec{\nabla} + m\beta' \right) \psi'. \end{aligned}$$

Réciproquement, tout système de matrices solutions du système s'obtient à partir d'une transformation définie plus haut (c'est un peu long à démontrer, et on admettra ce résultat).

3.1.2 Matrices γ

Pour donner à l'équation de Dirac une forme plus symétrique entre les coordonnées spatiales et temporelle, on introduit les matrices γ^μ :

$$\gamma^0 = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^{1,2,3} = \hat{\beta}\hat{\alpha}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{1,2,3} \\ -\sigma_{1,2,3} & 0 \end{pmatrix}.$$

En multipliant l'équation (3.1) du début du paragraphe 3.1.1 par γ^0 , on obtient :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (3.7)$$

C'est la forme habituelle de l'équation de Dirac dans laquelle il y a bien sûr sommation sur les 4 valeurs possibles de l'indice μ .

3.1.3 Covariance de l'équation de Dirac

On doit assurer l'invariance de la forme de l'équation du mouvement par transformation de Lorentz pour satisfaire au principe de relativité en définissant la loi de transformation du spineur ψ .

Soit une transformation de Lorentz $\Lambda : x \rightarrow x' = \Lambda x$ (ou plus explicitement $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$).

On cherche l'opérateur $S(\Lambda)$, sans chapeau pour alléger les notations, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

On normalise $S(\Lambda)$ en imposant $\det S(\Lambda) = 1$. Tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, toujours pour alléger les notations, on pourra noter $S(\Lambda) = S$.

En combinant (3.8) et (3.9) on obtient :

$$i\gamma^\mu \partial_\mu S^{-1} \psi'(x') = m S^{-1} \psi'(x').$$

Puis en multipliant par S et en développant les calculs on trouve successivement :

$$\begin{aligned} m\psi'(x') &= iS\gamma^\mu \partial_\mu S^{-1} \psi'(x') \\ &= iS\gamma^\mu \partial'_\nu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} \psi'(x') \\ &= iS\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} \partial'_\nu \psi'(x'). \end{aligned}$$

Un dernier jeu d'écriture sur la transformation de Lorentz permet de voir rapidement que $\partial_\mu = \partial'_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \partial'_\nu \Lambda^\nu_\mu$. On retrouve finalement l'équation de Dirac (3.10) à condition que :

$$S^{-1} \gamma^\nu S = \Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu. \quad (3.11)$$

C'est cette condition qui détermine complètement $S(\Lambda)$.

Nota bene. Contrairement à ce que les notations pourraient faire croire, les matrices γ^μ ne sont pas des composantes d'un quadrivecteur, ce sont des matrices constantes qui ne sont pas affectées par les transformations de Lorentz.

Deux cas particuliers de transformations méritent l'attention :

- Si la transformation est orthochrone (i.e. elle ne renverse pas le sens du temps : $\Lambda^0_0 > 0$) alors : $S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0$ (exercice 3.e).
- Si la transformation est propre (i.e. $\det \Lambda = 1$) et orthochrone alors :

$$S(\Lambda) = \exp \left[-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \text{ avec : } \begin{cases} \omega_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu} - \Lambda_{\nu\mu} \\ \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \end{cases}.$$

3.1.4 Quadrivecteur densité de courant de probabilité

Il est d'usage, afin d'alléger encore les notations, d'introduire la quantité $\bar{\psi}$ définie par :

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (3.12)$$

Considérons la quantité

$$j^\mu = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi,$$

et montrons qu'il s'agit de la composante contravariante d'un quadrivecteur. Souvenons-nous tout d'abord que $\psi'(x') = S\psi(x)$. Ainsi :

$$j'^\mu(x') = \psi'^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu S \psi(x).$$

Attendu que $(\gamma^0)^2 = I$, en supposant que la transformation est orthochrone, il vient :

$$j'^\mu(x') = \psi^\dagger \gamma^0 S^{-1} \gamma^\mu S \psi(x).$$

En utilisant la relation (3.11), on a donc finalement

$$\begin{aligned} j'^\mu(x') &= \psi^\dagger \gamma^0 \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \psi(x) = \bar{\psi} \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \psi(x) \\ &= \Lambda^\mu_\nu j^\nu(x) \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

On notera que les deux dernières égalités ont été obtenues en permutant les positions de $\bar{\psi}$ et de Λ^μ_ν , ce qui est possible car ce dernier est un nombre, ici réel.

Maintenant que le statut de quadrivecteur de j^μ est prouvé, montrons qu'une équation de continuité lui est associée : $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Écrivons :

$$\partial_\mu j^\mu = \left(\partial_\mu \psi^\dagger \right) \gamma^0 \gamma^\mu \psi + \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (\partial_\mu \psi).$$

En utilisant l'équation de Dirac, on a :

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 &\Rightarrow i\gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\gamma^0 \psi = 0 \\ &\Rightarrow -i\partial_\mu \psi^\dagger (\gamma^0 \gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger \gamma^{0\dagger} = 0. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 \\ (\gamma^0 \gamma^{1,2,3})^\dagger = (\beta^2 \alpha_{1,2,3})^\dagger = \alpha_{1,2,3} = \gamma^0 \gamma^{1,2,3} \end{cases}$$

on en conclut :

$$\partial_\mu j^\mu = -\frac{m}{i} \psi^\dagger \gamma^0 \psi + \psi^\dagger \gamma^0 \frac{m}{i} \psi = 0 \text{ CQFD.}$$

On observe de plus que la composante temporelle du courant de probabilité est positive $j^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi > 0$.

La conclusion de ces deux calculs est donc que l'équation de Dirac permet de définir une densité de probabilité positive et conservée. Cela règle un des problèmes soulevés plus haut.

3.1.5 Solutions de l'équation de Dirac

Afin de pouvoir donner un sens physique aux fonctions d'onde à quatre composantes qui apparaissent dans ce formalisme, commençons par obtenir les solutions en ondes planes de l'équation de Dirac.

On écrit :

$$\psi(x^\mu) = (u_1, u_2, u_3, u_4)^\top \exp(-ip_\mu x^\mu).$$

où pour chaque valeur de $j = 1, \dots, 4$ les quantités u sont des fonctions de la quadri-impulsion $p_\mu = (E, -\vec{p})^\top$. On pose, pour alléger les notations :

$$\begin{pmatrix} u_1(p_\mu) \\ u_2(p_\mu) \\ u_3(p_\mu) \\ u_4(p_\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}.$$

On introduit ainsi deux « spineurs » u_a et u_b possédant chacun deux composantes. On justifiera plus loin le terme spineur.

Comme $i\partial_\mu [\exp(-ip_\mu x^\mu)] = p_\mu \exp(-ip_\mu x^\mu)$, l'équation de Dirac devient :

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = 0.$$

En explicitant les matrices γ ainsi que la composante covariante de la quadri-impulsion, on obtient :

$$\begin{pmatrix} EI & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -EI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

◇ **Notation.** Dans cette équation, l'expression $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ n'est pas un produit scalaire entre $\vec{\sigma}$, dont les composantes sont les matrices de Pauli, et le 3-vecteur impulsion \vec{p} : elle désigne simplement la combinaison linéaire des matrices de Pauli $\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z$. On remarquera également que nous avons enlevé les chapeaux sur $\vec{\sigma}$ et sur l'identité I .

L'équation (3.13) s'explicité donc sous la forme

$$\begin{cases} (E - m) u_a = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_b \\ (E + m) u_b = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_a \end{cases} \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

En multipliant les deux lignes de ce système on obtient :

$$(E^2 - m^2) u_{a,b} = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 u_{a,b} = \|\vec{p}\|^2 u_{a,b}. \quad (3.16)$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé l'identité $\sigma^j \sigma^k = \delta^{jk} + i\varepsilon^{jkl} \sigma^\ell$ qui implique :

$$\forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbb{R}^3, (\vec{\sigma} \cdot \vec{w}_1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{w}_2) = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 I + i (\vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2) \cdot \vec{\sigma} \quad (3.17)$$

L'équation (3.16) n'est autre que la relation relativiste :

$$E^2 = \|\vec{p}\|^2 + m^2 \Rightarrow E = \pm \varepsilon \text{ avec } \varepsilon = \sqrt{\|\vec{p}\|^2 + m^2} \geq m.$$

Chacune des deux valeurs possibles pour le signe l'énergie E correspond à une solution différente de l'équation de Dirac :

— lorsque $E = +\varepsilon$, on peut diviser l'équation (3.15) par $(E + m)$, et pour tout u_a , on obtient la solution :

$$\psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} u_a \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m} u_a \end{pmatrix} \exp(-ip_\mu x^\mu) ;$$

— inversement, lorsque $E = -\varepsilon$, on peut diviser l'équation (3.14) par $(E - m)$, et pour tout u_b , on obtient la solution :

$$\psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m} u_b \\ u_b \end{pmatrix} \exp(-ip_\mu x^\mu).$$

On trouve, comme pour l'équation de Klein-Gordon, des solutions d'énergie négative. Nous y reviendrons.

On vérifiera par ailleurs que la fonction d'onde :

$$\psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} +\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m} u_b \\ u_b \end{pmatrix} \exp(+ip_\mu x^\mu),$$

est également solution de l'équation de Dirac à condition de *poser* :

◇ **Notation.**

$$p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (3.18)$$

Nous utiliserons systématiquement cette notation au chapitre 5.

3.2 Rapport gyromagnétique de l'électron

Nous considérons à présent l'équation de Dirac en présence d'un champ magnétique, et nous cherchons les valeurs propres de l'opérateur hamiltonien. Nous allons alors pouvoir interpréter les solutions d'énergie positive.

3.2.1 Principe de correspondance en présence d'un champ magnétique

En mécanique analytique, l'impulsion \vec{p} est la variable conjuguée du vecteur position \vec{r} . Par définition, si L est le lagrangien du système, on a :

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}.$$

Elle diffère de la quantité de mouvement $m\dot{\vec{r}}$ en présence d'un champ magnétique $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$. En théorie des champs classiques, on voit en effet que si q est la charge de la particule, on a dans ce cas :

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}. \quad (3.19)$$

Le principe de correspondance associe l'opérateur $-i\vec{\nabla}$ à l'impulsion \vec{p} et non à la quantité de mouvement, ceci afin de satisfaire aux relations de commutation canoniques qui permettent de retrouver les équations de la mécanique classique à la limite $\hbar \rightarrow 0$:

$$\{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \leftrightarrow [\widehat{q}_\alpha, \widehat{p}_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}\widehat{L}.$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ désigne ici le crochet de Poisson entre deux fonctions et $[\cdot, \cdot]$ le commutateur entre deux opérateurs.

Ainsi, en présence d'un champ magnétique :

— l'équation de Schrödinger devient :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2}{2m} + qV \right] \psi, \text{ avec } \psi = \psi(\vec{r}, t);$$

— l'équation de Dirac devient :

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) \psi = m\psi, \text{ avec } \psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix},$$

qui fait intervenir cette fois le quadripotiel A dont les composantes sont :

$$A^\mu = (V, \vec{A})^\top \text{ et } A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = (V, -\vec{A}).$$

3.2.2 Résolution de l'équation aux valeurs propres

L'équation aux valeurs propres s'écrit : $\hat{H}\psi = E\psi$, soit plus explicitement $i\partial_0\psi = E\psi$. Cette définition de la dérivée temporelle, et le fait que $-i\vec{\nabla} = \hat{\vec{p}}$ permettent d'affirmer que :

$$\hat{p}_\mu = i\partial_\mu = i(\partial_t, \vec{\nabla}),$$

ce qui permet d'écrire l'équation de Dirac sous la forme :

$$\gamma^\mu \hat{p}_\mu = \gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \hat{\vec{p}}.$$

Explicitement, on obtient maintenant en présence d'un champ électromagnétique :

$$\begin{pmatrix} [E - qV] \hat{I} & -\vec{\sigma} \cdot [\hat{\vec{p}} - q\vec{A}] \\ \vec{\sigma} \cdot [\hat{\vec{p}} - q\vec{A}] & -[E - qV] \hat{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$\begin{cases} E\psi_a = \vec{\sigma} \cdot (\hat{\vec{p}} - q\vec{A}) \psi_b + (qV + m) \psi_a & (3.20) \\ E\psi_b = \vec{\sigma} \cdot (\hat{\vec{p}} - q\vec{A}) \psi_a + (qV - m) \psi_b & (3.21) \end{cases}$$

On se place dans la limite non relativiste et $E > 0$. On a donc :

$$(E - m), qV, |q\vec{A}|, |m\vec{r}| \ll m.$$

L'équation (3.21) se simplifie en :

$$\psi_b = \frac{\vec{\sigma} \cdot (\hat{\vec{p}} - q\vec{A})}{E + m + o(m)} \psi_a,$$

que l'on injecte dans l'équation (3.20) pour avoir :

$$(E - m) \psi_a = \left[\frac{(\vec{\sigma} \cdot (\hat{\vec{p}} - q\vec{A}))^2}{E + m} + qV \right] \psi_a. \quad (3.22)$$

On utilise à nouveau l'identité (3.17), pour écrire

$$\begin{aligned} [\vec{\sigma} \cdot (\hat{\vec{p}} - q\vec{A})]^2 &= (\hat{\vec{p}} - q\vec{A})^2 + i [(\hat{\vec{p}} - q\vec{A}) \wedge (\hat{\vec{p}} - q\vec{A})] \cdot \vec{\sigma} \\ &= (\hat{\vec{p}} - q\vec{A})^2 - q (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{\sigma} = (\hat{\vec{p}} - q\vec{A})^2 - q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir cette dernière ligne, outre le développement du produit vectoriel, on a utilisé le fait que $\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$ et on a pris en compte la non commutation des opérateurs.

Dans la limite non relativiste, en faisant ré-apparaître la quantité de mouvement de l'équation (3.19), on obtient donc :

$$(E - m) \psi_a = \left[\frac{|m\dot{\vec{r}}|^2 - q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}}{E + m + o(m)} + qV \right] \psi_a \quad (3.23)$$

Dans la limite $E - m = o(m)$, $E + m$ peut s'écrire $E + m = 2m + o(m)$, et en identifiant les deux opérateurs agissant sur ψ_a dans l'équation (3.23), on trouve finalement :

$$E - m = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + qV - \frac{q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}}{2m}$$

Le dernier terme de cette égalité, appelé terme de Pauli, est exactement le terme qui manquait à l'équation de Schrödinger pour prendre en compte le spin de l'électron. En effet, on se souvient (voir paragraphe 2.6.2 page 26) que l'interaction du moment magnétique intrinsèque de l'électron avec le champ magnétique donne un terme supplémentaire à l'énergie :

$$E_{\text{Pauli}} = -\frac{gq}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B} \text{ avec } \begin{cases} g = 2 \\ \vec{S} = \vec{\sigma}/2 \\ \hbar = 1 \end{cases} \text{ soit : } E_{\text{Pauli}} = -\frac{q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \text{ CQFD.}$$

En revenant à l'équation (3.22), on peut interpréter ψ_a comme le spineur à deux composantes qui décrit l'électron avec son spin ! On trouve naturellement le terme de Pauli pour ψ_a à la limite non relativiste.

C'est un succès majeur de l'équation de Dirac qui prédit ainsi :

- l'existence du spin de l'électron ;
- et le facteur de Landé $g = 2$,

ajoutés « à la main » à l'équation de Schrödinger pour rendre compte des résultats expérimentaux.

Il nous reste maintenant à traiter les solutions à énergie négative associées à ψ_b pour lequel $E\psi_b = (-m - o(m))\psi_b$. Tel est l'objet de la prochaine section !

3.3 Antimatière

3.3.1 Théorie des trous de Dirac

Pour interpréter les solutions d'énergie négative décrites au paragraphe précédent, Dirac proposa que le vide quantique soit un état pour lequel tous les niveaux d'énergie négative sont occupés par des électrons. Cet état, la « mer de Dirac », n'est pas directement observable, seules les déviations par rapport à cet état le sont.

Dans cette hypothèse où le vide est assimilé à un milieu rempli d'électrons, alors, en vertu du principe d'exclusion de Pauli, l'ajout d'un électron ne sera possible que si ce dernier est d'énergie positive. Inversement, si on retire un électron d'énergie négative de la mer, le « trou » ainsi créé apparaît comme une particule de charge opposée et d'énergie opposée, donc positive. Après avoir fait diverses suggestions, Dirac émet en 1931 l'hypothèse de l'existence d'un antiélectron, de même masse que l'électron mais de charge opposée. L'antiélectron sera plus tard renommé positon ou positron. La création d'une paire électron-positron par l'interaction d'un photon avec un électron de la mer de Dirac est alors rendue possible (voir figure 3.1), ainsi que le processus inverse « d'annihilation » d'un positron et d'un électron.

3.3.2 Le positron

En 1932, Carl David Anderson étudie les rayons cosmiques. Les rayons cosmiques ont été découverts par Hess en 1912. On sait aujourd'hui qu'ils ont pour origine des particules de très haute énergie produites par des phénomènes violents dans l'Univers et qui traversent le vide interstellaire. Il s'agit principalement de protons, de noyaux légers, ainsi que d'électrons et de rayons γ (photons de grande énergie). Sans connaître l'hypothèse de Dirac (!), il annonce la découverte (publiée en 1933) d'une particule de masse beaucoup plus faible que le proton, mais

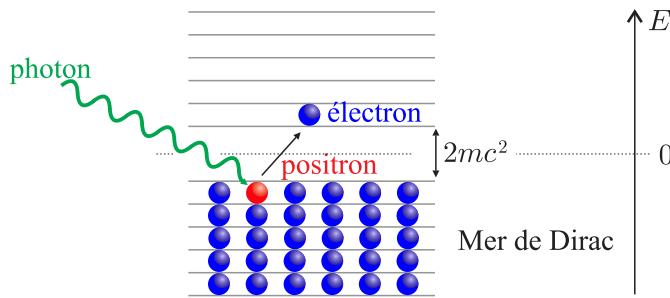


FIGURE 3.1 – Illustration schématisque de la création de paire électron-positron.

de charge opposée à celle de l'électron, qu'il nomme positron (on dit aussi positon en français). La première antiparticule est découverte !

Comment ce positron a-t-il été produit ? Les rayons cosmiques interagissent dans la très haute atmosphère, et en vertu de l'équivalence masse-énergie, ils produisent des gerbes de particules et d'antiparticules de toutes sortes : lorsqu'une grande énergie est mise en jeu dans l'interaction entre particules, cette énergie peut se transformer en une paire particule-antiparticule. C'est le processus appelé création de paire.

Dans les années qui ont suivi cette découverte, c'est grâce aux rayons cosmiques de haute énergie que le bestiaire des particules élémentaires s'est enrichi, après la découverte de l'électron (1897), du proton (1919) et du neutron (1932), et avant l'avènement des grands accélérateurs de particules.

3.3.3 Équation aux valeurs propres pour le positron

Reprenons la recherche des valeurs propres de l'équation de Dirac mais intéressons-nous à présent aux solutions d'énergie négative. En repartant des mêmes équations (3.20) et (3.21), dans la limite non relativiste ($qV, |q\vec{A}|, |\vec{\pi}| \ll m$) mais avec cette fois $E = -\varepsilon$, on obtient maintenant en refaisant les mêmes calculs :

$$\psi_a = \frac{\vec{\sigma} \cdot (\hat{p} - q\vec{A})}{-\varepsilon - m + o(m)} \psi_b$$

puis

$$(-\varepsilon + m) \psi_b = \left[\frac{(\vec{\sigma} \cdot (\hat{p} - q\vec{A}))^2}{-\varepsilon - m} + qV \right] \psi_b.$$

Les mêmes manipulations sur le terme $(\hat{\vec{p}} - q\vec{A})^2$ que celle effectuées dans la section précédente aboutissent alors à l'expression :

$$(-\varepsilon + m)\psi_b = \left(\frac{|m\dot{\vec{r}}|^2 - q\vec{B} \cdot \vec{\sigma}}{-\varepsilon - m + o(m)} + qV \right) \psi_b.$$

En identifiant les deux termes en facteur de ψ_b dans cette dernière relation, on trouve finalement :

$$\varepsilon - m = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2.$$

Si ε (et non $-\varepsilon$) pouvait représenter l'énergie du système considéré, la dernière équation s'interpréterait comme l'énergie d'une particule de masse m et de charge $-q$, soit d'un positron, en présence d'un champ électromagnétique.

À ce stade cependant, le problème de l'énergie négative subsiste, il ne pourra être résolu que dans le cadre de la théorie quantique des champs (voir chapitre 5).

3.3.4 Propriétés de l'antimatière

Rassemblons ici les propriétés de l'antimatière.

La concentration d'une grande quantité d'énergie lors d'un choc permet la conversion d'une partie de cette énergie en paires de particules et d'antiparticules, pourvu que l'énergie disponible dans le centre de masse soit supérieure à la somme des énergies de masse des particules produites. C'est grâce à la construction d'accélérateurs de plus en plus puissants que l'antiproton et l'antineutron ont été découverts dans les années 50. Aujourd'hui, on produit de façon routinière des antiparticules auprès des grands accélérateurs de particules et on peut ainsi les étudier en détail.

Mais on verra au chapitre ?? que les positrons sont aussi produits tout à fait naturellement dans certaines formes de radioactivité.

De façon tout à fait générale, toutes les particules ont leur antiparticule associée, de même masse, de même durée de vie, de même spin, mais de charge(s) opposée(s) (on verra au chapitre 4 qu'il y a d'autres « charges » que la charge électrique).

	Particule	Antiparticule
Masse	m	m
Durée de vie	τ	τ
Spin	S	S
Charge	q	$-q$

Lorsqu'une antiparticule entre en collision avec la particule associée, la réaction inverse de la réaction de création de paire peut se produire, l'antiparticule et la particule disparaissent, on parle improprement d'annihilation, il y a en fait une émission d'énergie sous forme de rayons γ ou d'autres particules.

3.3.5 Utilisations de l'antimatière

L'antimatière est aujourd'hui utilisée par les physiciens en recherche fondamentale, par les médecins pour l'imagerie médicale, et pour l'étude des surfaces en science des matériaux.

Dans un accélérateur de particules circulaire, les particules et antiparticules peuvent circuler dans le même anneau mais dans des sens opposés, permettant des collisions frontales de très haute énergie. Comparons l'énergie dans le centre de masse d'une collision entre un proton de 300 GeV sur un proton dans une cible fixe et d'une collision entre un proton et un antiproton de 300 GeV :

— dans le premier cas, l'énergie dans le repère du laboratoire vaut :

$$E = \underbrace{T + mc^2}_{\text{proton incident}} + \underbrace{mc^2}_{\text{proton cible}}$$

et la quantité de mouvement :

$$pc = \sqrt{(T + mc^2)^2 - m^2c^4},$$

et donc l'énergie dans le centre de masse vaut, par conservation de la masse invariante du système (le proton a une masse d'environ 1 GeV/c²) :

$$\begin{aligned} E_{CM} &= \sqrt{(T + 2mc^2)^2 - ((T + mc^2)^2 - m^2c^4)} \\ &= \sqrt{2Tmc^2 + 4m^2c^4} = 24,6 \text{ GeV} ; \end{aligned}$$

— dans le deuxième cas, l'énergie dans le centre de masse est égale à l'énergie dans le système du laboratoire, soit 602 GeV. C'est un gain gigantesque, qui a permis en 1983 la découverte des bosons W^+ , W^- et Z^0 de masses 80 et 92 GeV/c² auprès du supersynchrotron à protons du CERN, le laboratoire européen de physique des particules à Genève. Le prix Nobel a été attribué aux promoteurs de cette technique, Carlo Rubbia et Simon van der Meer.

En physique atomique, on utilise l'antimatière pour mesurer les constantes fondamentales, par exemple en remplaçant un électron d'un atome par un antiproton, ou pour tester les symétries fondamentales. L'étude des propriétés de l'antihydrogène auprès du décélérateur d'antiprotons au CERN va permettre des

comparaisons précises entre les propriétés (spectre des niveaux d'énergie, masse gravitationnelle) des atomes d'hydrogène ($p + e^-$) et d'antihydrogène ($\bar{p} + e^+$).

L'antimatière est aussi utilisée **en médecine**, par exemple en imagerie fonctionnelle utilisant la tomographie par émission de positrons (TEP). Dans cette technique, on fait absorber à un patient une substance radioactive qui libère des positrons. Ces derniers parcourent une distance très faible dans les tissus, de l'ordre du millimètre, puis s'annihilent avec les électrons présents dans la matière. Cette annihilation produit deux rayons gamma de 511 keV de directions opposées. Des détecteurs répartis sur une couronne autour du patient permettent de reconstruire la ligne de vol, et par l'intersection de plusieurs lignes, le point origine des rayons gamma (voir figure 3.2). La TEP permet des études physiologiques en temps réel : on fait absorber au patient des molécules marquées (des traceurs) avec des isotopes radioactifs du carbone, de l'azote, de l'oxygène, du fluor, ou d'autres éléments utilisés par l'organisme. Ces molécules sont choisies pour se fixer en des endroits précis de l'organisme et renseignent sur le métabolisme. Les caméras TEP sont très répandues dans le monde.

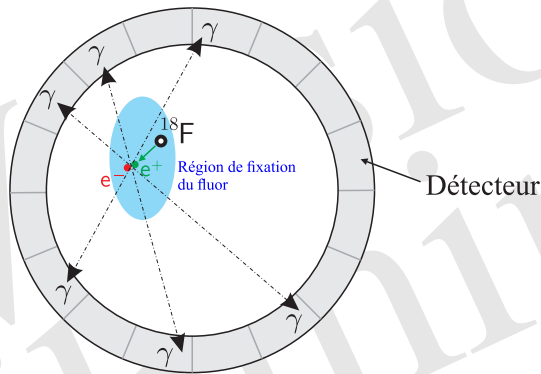


FIGURE 3.2 – Schéma de principe de la tomographie par émission de positrons. Ici, c'est le fluor 18 qui sert de traceur. Par radioactivité β^+ , il produit un positron, qui après un parcours très court s'annihile avec un électron présent dans la matière. Deux rayons gamma sont émis dos à dos, et leur direction est reconstruite grâce à un ensemble de détecteurs répartis en couronne. La détection de plusieurs désintégrations permet la localisation de la source de positrons.

Les positrons sont aussi utilisés **en science des matériaux** pour détecter et caractériser les lacunes et la porosité à l'échelle nanométrique de la surface de divers matériaux. Des applications potentielles sont l'analyse de l'état de corrosion et de vieillissement des aciers, des alliages, etc., l'étude de la porosité pour la conception de membranes filtrantes, la détection de défauts sur les substrats en silicium pour l'électronique rapide... Le principe est le suivant : on envoie un faisceau de positrons sur la surface à étudier, et on mesure le temps qu'ils mettent pour s'an-

nihiler dans la matière. Le spectre en temps est caractéristique de la taille et de la densité des lacunes dans le matériau.

3.4 Insuffisance de la théorie

Malgré les succès de la mécanique quantique et de l'équation de Dirac, un certain nombre d'insuffisances apparaissent dans le formalisme :

- la mécanique quantique est incapable de décrire la création ou l'annihilation de particules, mais à cause des inégalités de Heisenberg, on ne peut localiser une particule à mieux que $\Delta x \sim \hbar/4mc$ sous peine de créer d'autres particules :

$$\Delta p \geq \hbar/2\Delta x = 2mc \Rightarrow \Delta E \geq 2mc^2 ;$$

- le temps et les coordonnées d'espace jouent un rôle très différent en mécanique quantique (paramètre/opérateurs), cette dissymétrie de traitement des composantes de la 4-position est peu compatible avec le traitement global des composantes en relativité ;
- on ne peut pas (facilement) prendre t comme un opérateur, sous peine de perdre la notion d'état fondamental d'énergie minimale (exercice 3.a).

La théorie quantique des champs s'est progressivement imposée afin de surmonter ces diverses difficultés.

Dans ce cadre, les coordonnées sont prises comme paramètres, les opérateurs sont alors des fonctions des coordonnées d'espace-temps (représentation de Heisenberg généralisée). On obtient une théorie quantique et relativiste dans laquelle la physique est décrite par des champs d'opérateurs de création et d'annihilation de particules. On fera une brève introduction à la théorie quantique des champs au chapitre 5.

La construction de la théorie se fonde sur des principes d'invariance des équations sous diverses actions de symétrie : symétries discrètes comme la symétrie miroir, ou continues comme le changement de phase d'une fonction d'onde, globales c'est-à-dire appliquées identiquement partout, ou locales c'est-à-dire fonctions du point d'espace-temps. Nous en verrons le mécanisme dans les chapitres 6, 8 et 9.

À retenir dans le chapitre 3

- définition et propriétés des matrices γ ;
- équation de Dirac $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$;
- quadrivecteur densité de courant $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$;
- solutions de l'équation de Dirac (avec $p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$) :

$$\psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} u_a \\ \left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\varepsilon+m}\right) u_a \end{pmatrix} \exp(-ip_\mu x^\mu)$$

$$\psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\varepsilon+m}\right) u_b \\ u_b \end{pmatrix} \exp(ip_\mu x^\mu);$$

- relation impulsion / quantité de mouvement en champ électromagnétique;
- rapport gyromagnétique / facteur de Landé de l'électron $g = 2$;
- propriétés de l'antimatière;
- principe de la TEP.

3.5 Exercices**Exercice 3.a – Opérateur temps**

On suppose que le temps est un opérateur, noté T , au même titre que les autres coordonnées d'espace temps.

Montrer qu'alors le commutateur $[T, E]$ doit valoir $(-i)$.

En déduire que si $|E\rangle$ est un vecteur propre du hamiltonien H pour la valeur propre E alors l'état $e^{i\varepsilon t}|E\rangle$ avec ε positif infinitésimal est un vecteur propre pour une énergie inférieure à E .

On ne peut donc pas définir d'état fondamental (d'énergie minimale).

Exercice 3.b – Opérateur impulsion

Montrer que l'opérateur impulsion est hermitien.

Exercice 3.c – Matrices de Dirac

Les matrices de Dirac (matrices γ) sont définies par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} ; \gamma^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{1,2,3} \\ -\sigma_{1,2,3} & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les matrices γ sont de trace nulle et de déterminant 1.

Indication : On montrera que $\det \begin{pmatrix} 0 & N \\ M & 0 \end{pmatrix} = \det(-MN)$ où M et N sont des matrices carrées d'ordre 2.

2. On définit l'anticommutateur de deux matrices A et B par $\{A, B\} = AB + BA$. Montrer que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4.
3. Montrer que $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$.
4. Montrer que la trace du produit d'un nombre impair de matrices de Dirac est nulle.

On définit $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Vérifier cette égalité.
6. Montrer que $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$; $(\gamma^5)^2 = I_4$; $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.

Exercice 3.d – Encore sur les matrices de Dirac

Montrer que si une matrice carrée d'ordre 4 commute avec toutes les matrices de Dirac alors elle est proportionnelle à la matrice identité I_4 .

Exercice 3.e – Covariance de l'équation de Dirac

Montrer que pour les transformations orthochrones (qui ne renversent pas le sens du temps : $\Lambda^0_0 > 0$) $S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0$, où $S = S(\Lambda)$ est l'opérateur qui transforme le spineur de Dirac lors d'une transformation de Lorentz ($\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ avec $x \rightarrow x' = \Lambda x$).

On normalisera $S(\Lambda)$ en imposant $\det S(\Lambda) = 1$.

Exercice 3.f – Opérateur spin sur les spineurs de Dirac

Utiliser le principe de correspondance pour déterminer le hamiltonien de Dirac \widehat{H}_D .

Calculer le commutateur $[\widehat{H}_D, \widehat{L}]$ où \widehat{L} est l'opérateur moment cinétique.

Indication : calculer sur une composante puis faire une permutation circulaire des indices.

Montrer que $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ commute avec \hat{H}_D , où $\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ et $\vec{\sigma}$ est le vecteur dont les composantes sont les matrices de Pauli.

En déduire que $\hat{\vec{S}}$ est l'opérateur spin pour les spineurs de Dirac.

Exercice 3.g – Équation de Weyl

Montrer que pour une particule de masse nulle, on peut trouver une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans toutes les coordonnées d'espace-temps compatible avec l'équation de Klein-Gordon en introduisant un spineur à seulement deux composantes.

Version préliminaire

Version
préliminaire

Chapitre 4

Particules et interactions

Nous offrons dans ce chapitre un panorama purement descriptif des interactions fondamentales et des particules élémentaires. Nous énonçons les lois de conservation qui régissent l'ensemble des processus que nous allons considérer. Nous décrivons la méthode des perturbations stationnaires pour étudier quelques cas particuliers d'évolution d'un système et obtenir la règle d'or de Fermi. Nous introduisons enfin les notions de durée de vie et de section efficace d'interaction, dont le calcul et la mesure pour les divers systèmes de particules et d'interactions sont des objets essentiels de la physique des particules.

4.1 Interactions fondamentales

Le tableau 4.1 résume les propriétés des interactions décrites par le modèle standard, que nous allons commenter.

Interaction	Médiateurs (spin 1)	Symbole	Force (à basse énergie) Portée	Charge
Électromagnétique	1 photon sans masse	γ	$\alpha = 1/137$ longue	électrique
Faible	3 bosons faibles massifs	$W^+, W^-,$ Z^0	α_W effectif $\sim 10^{-6}$ courte	isospin faible et hyper- charge
Forte	8 gluons	g	$\alpha_S \sim 1$	couleur

TABLE 4.1 – Les interactions du modèle standard

Les interactions sont portées par des particules, appelées « médiateurs » :

la répulsion électromagnétique entre deux électrons peut ainsi être décrite par l'échange de photons entre ces électrons. Le photon est le vecteur de l'interaction. De façon analogue, l'interaction faible peut être décrite par l'échange de particules appelées W^+ , W^- et Z^0 , et l'interaction forte par l'échange de gluons notés g .

Ces trois interactions ont des propriétés très différentes :

- l'interaction électromagnétique est à longue portée, et son intensité est caractérisée par la charge élémentaire e , ou, plus commodément par la constante de structure fine sans dimension $\alpha = 1/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137$;
- l'interaction faible est à très courte portée (de l'ordre de 10^{-18} m), et son intensité (à basse énergie) est caractérisée par la quantité sans dimension $\alpha_W \sim 10^{-6}$;
- l'interaction forte est à courte portée (de l'ordre du femtomètre), et la constante qui mesure son intensité est environ cent fois celle de l'interaction électromagnétique (à basse énergie) : $\alpha_S \sim 1$.

Les constantes α , α_W et α_S sont appelées constantes de couplage, respectivement celle de l'électromagnétisme, de l'interaction faible, et de l'interaction forte. Il est à noter que l'intensité des interactions dépend de l'énergie à laquelle elle est mesurée.

Tous les médiateurs des interactions sont des bosons de spin 1. Mais, alors que le photon et les gluons sont des particules sans masse, les bosons W et Z sont très massifs (masse de l'ordre de cent fois la masse du proton!). C'est la raison pour laquelle l'interaction faible est faible et à très courte portée.

De la même façon que l'interaction électromagnétique ne concerne que les particules portant une charge électrique, les autres interactions n'agissent que sur les particules portant des nombres quantiques internes spécifiques de l'interaction, « isospin faible » et « hypercharge » pour l'interaction faible, et « couleur » pour l'interaction forte (qui n'a rien à voir avec la notion habituelle de couleur).

La suite de cet ouvrage montrera comment la construction théorique des interactions du modèle standard permet de rendre compte de l'ensemble de ces propriétés.

4.2 Particules élémentaires

Il a fallu plusieurs décennies pour mettre de l'ordre dans la grande diversité des particules découvertes d'abord dans les rayons cosmiques puis produites dans les accélérateurs. La plupart sont en fait composées de particules dites élémentaires, pour lesquelles aucune sous-structure n'a encore été mise en évidence. Celles-ci apparaissent donc comme les briques dont sont constituées toutes les autres. Le tableau 4.2 en résume les propriétés.

Particules élémentaires de matière : Fermions de spin 1/2		Deux grandes classes			
		Leptons insensibles à l'interaction forte		Quarks sensibles à l'interaction forte	
Trois familles (?)		ν_e	e^-	u	d
		ν_μ	μ^-	c	s
		ν_τ	τ^-	t	b
Charges additives conservées	électrique Q	0	-1	+2/3	-1/3
	leptonique L	1	1	0	0
	baryonique B	0	0	1/3	1/3

TABLE 4.2 – Particules élémentaires de matière du modèle standard.

Pour les distinguer des bosons vecteurs qui portent les interactions, nous appellerons ces particules « particules de matière ».

On notera les propriétés générales suivantes des particules de matière :

- elles sont toutes des fermions de spin 1/2 ;
- elles se rangent en trois familles aux propriétés semblables, sauf pour ce qui concerne la valeur des masses des particules composant ces familles ;
- elles sont divisées en deux grandes classes :
 - les leptons, insensibles à l'interaction forte, ne portent donc pas de nombre quantique de couleur,
 - les quarks, qui portent une couleur et qui sont sensibles à l'interaction forte ;
- les leptons portent une charge leptonique égale à 1 ;
- les quarks portent une charge baryonique égale à 1/3 ;
- l'interaction faible agit sur toutes les particules ;
- l'interaction électromagnétique n'agit que sur les particules portant une charge électrique non nulle ;
- toutes les particules ont leur antiparticule associée, dont les charges leptonique, baryonique et électrique sont opposées.

Les charges leptoniques, baryoniques et électriques sont additives, c'est-à-dire que l'on obtient la charge correspondante d'un ensemble de particules en additionnant les charges des diverses particules. Ainsi, le proton et le neutron étant composés de trois quarks, ont une charge baryonique égale à 1.

Les leptons étant insensibles à l'interaction forte, ils ne s'associent pas facilement entre eux. Au contraire, les quarks forment de nombreux états liés et en

fait n'apparaissent jamais isolés. Ils forment les particules que l'on appelle les hadrons. Il y a deux sortes de hadrons :

- les baryons, états liés de trois quarks, et donc de nombre baryonique 1 ($3 \times 1/3$);
- les mésons, états liés de paires de quark antiquark, et donc de nombre baryonique nul.

Donnons quelques exemples :

- le proton est l'état fondamental du système composé de deux quarks u et un quark d, c'est un baryon;
- le neutron est l'état fondamental du système composé d'un quark u et de deux quarks d, c'est aussi un baryon;
- le pion π^+ est un méson, composé d'un quark u et d'un antiquark \bar{u} ;
- le kaon K^+ est un méson composé d'un quark u et d'un antiquark \bar{s} .

Les hadrons sont facilement arrêtés par la matière à cause de leur interaction forte avec les noyaux.

Remarque. On observe aussi beaucoup plus rarement des états liés de deux quarks et deux antiquarks, improprement nommés tétraquarks, et des états liés de quatre quarks et d'un antiquark, improprement appelés pentaquarks.

4.2.1 Stabilité des particules

Les seules particules de matière stables dans le vide sont l'électron, le proton, les neutrinos et certains noyaux atomiques qui sont stables ou ont une très longue durée de vie. Noter que le neutron, plus lourd que le proton, n'est stable que s'il est à l'intérieur de certains noyaux. Cette propriété sera expliquée au chapitre ??.

Toutes les autres particules sont suffisamment massives pour se désintégrer en d'autres particules. Les masses des particules élémentaires sont données dans le tableau 4.3.

e^-	0,511	ν_e	$< 2 \times 10^{-6}$	u	2	d	5
μ^-	106	ν_μ		c	1275	s	95
τ^-	1777	ν_τ		t	173500	b	4200

TABLE 4.3 – Masse des particules élémentaires en MeV/c^2 .

On remarquera au passage l'extrême diversité des masses des particules. Il y a plus de dix ordres de grandeur entre les masses des neutrinos et celle du quark top. C'est un point que nous commenterons au paragraphe 10.4.

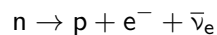
Il y a plusieurs processus qui permettent ces désintégrations :

- la scission d'un système composite en plusieurs morceaux, comme dans la radioactivité α des noyaux (voir chapitre ??);
- l'annihilation particule antiparticule, à l'œuvre par exemple dans la désintégration du pion neutre en deux photons γ : $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$;
- la transformation d'une particule en d'autres particules, cause de la radioactivité β de certains noyaux (voir chapitre ??).

Il est important de noter dès à présent que seule l'interaction faible est capable de changer la nature des particules élémentaires.

Donnons deux exemples :

- la désintégration du neutron en proton plus électron plus antineutrino



est causée par la transformation d'un quark d en quark u et la création concomitante d'un électron et de son antineutrino associé;

- le muon se désintègre par interaction faible en électron, antineutrino électron et neutrino muon :



4.2.2 Lois de conservation

Les différents processus élémentaires que nous allons étudier, désintégrations et diffusions de particules dans le vide, respectent un certain nombre de lois de conservation que nous listons ici :

1. l'énergie et l'impulsion, et donc la masse invariante;
2. le moment cinétique total;
3. les charges additives :
 - la charge électrique,
 - la charge leptonique,
 - la charge baryonique.

La conservation de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique sont les conséquences du théorème de Noether (invariance du lagrangien par translation dans le temps, dans l'espace et par rotation), et celle des charges additives des propriétés des lagrangiens pour les différentes interactions.

Il est important de se souvenir que les antiparticules ont leurs charges additives opposées à celles de leur particule associée. Par exemple, l'antineutrino électron

a un nombre leptonique égal à -1 . Le bilan des charges additives dans la désintégration du neutron se lit comme suit :

$$\begin{array}{rccccccc} & n & \rightarrow & p & + & e^- & + & \bar{\nu}_e \\ Q : & 0 & = & 1 & - & 1 & + & 0 \\ L : & 0 & = & 0 & + & 1 & - & 1 \\ B : & 1 & = & 1 & + & 0 & + & 0 \end{array}$$

4.3 Dynamique des processus élémentaires

4.3.1 Évolution d'un système

En mécanique quantique, l'évolution des systèmes est donnée par l'équation de Schrödinger. Nous présentons la méthode des perturbations qui permet de résoudre cette équation de façon approchée, et donnons l'exemple d'une perturbation indépendante du temps.

Considérons un système décrit par la fonction d'onde $\psi(t)$ dont l'évolution est régie par le hamiltonien $H = H_0 + H_1(t)$ où H_0 est le hamiltonien du système non perturbé, indépendant du temps, et $H_1(t)$ une perturbation du système à partir de $t \geq 0$.

Soit $|n\rangle$ et E_n les vecteurs propres et valeurs propres de H_0 .

On suppose qu'à $t = 0$ le système est dans un état propre $|n\rangle$. On cherche la probabilité de l'observer dans l'état $|m\rangle \neq |n\rangle$ à l'instant t :

$$P_{n \rightarrow m}(t) = |\langle m | \psi(t) \rangle|^2 \text{ avec } \begin{cases} \psi(t) = \sum_k a_k(t) \exp(-iE_k t/\hbar) |k\rangle \\ \psi(0) = |n\rangle \end{cases} .$$

On a exprimé $\psi(t)$ en fonction des vecteurs propres de H_0 en introduisant une phase $\exp(-iE_k t/\hbar)$ qui absorbe l'évolution des quantités $a_k(t)$ si $H_1(t) = 0$.

L'équation de Schrödinger donne :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} &= i\hbar \sum_k \left[\dot{a}_k - i \frac{E_k}{\hbar} a_k \right] \exp\left(-i \frac{E_k t}{\hbar}\right) |k\rangle \\ &= \sum_k a_k \exp\left(-i \frac{E_k t}{\hbar}\right) (H_0 + H_1) |k\rangle. \end{aligned}$$

Cette équation est équivalente à :

$$i\hbar \sum_k \dot{a}_k \exp\left(-i \frac{E_k t}{\hbar}\right) |k\rangle = \sum_k a_k \exp\left(-i \frac{E_k t}{\hbar}\right) H_1 |k\rangle ,$$

qui, projetée sur $\langle m |$, donne :

$$i\hbar\dot{a}_m = \sum_k a_k \exp\left(-i\frac{(E_k - E_m)t}{\hbar}\right) \langle m | H_1 | k \rangle. \quad (4.1)$$

Si $H_1(t) = 0$, on trouve bien $\dot{a}_m = 0$.

4.3.1.1 Méthode des perturbations

Nous introduisons à présent la méthode des perturbations. Elle s'applique si l'on peut supposer que les éléments de matrice de H_1 sont petits devant les différences des valeurs propres de H_0 .

Afin de rendre explicite cette condition, on pose $H_1 = \lambda W_1$, où les éléments de matrice de W_1 sont supposés comparables à ceux de H_0 et $\lambda \ll 1$.

On cherche alors les coefficients $a_k(t)$ sous la forme :

$$a_k(t) = a_k^0(t) + \lambda a_k^1(t) + \lambda^2 a_k^2(t) + \dots$$

La fonction d'onde est une fonction continue du temps, attendu que $\psi(0) = |n\rangle$, on doit avoir $a_k(0) = \delta_{kn}$ et $a_k^r(0) = 0$ si $r \geq 1$.

On reporte le développement en puissance de λ des a_k dans l'équation (4.1) et l'on égale les termes de même ordre en λ , en se limitant au premier ordre.

L'ordre 0 fournit :

$$i\hbar\dot{a}_m^0(t) = 0.$$

En conséquence, la condition initiale impose que :

$$a_m^0(t) = 0 \text{ si } m \neq n. \quad (4.2)$$

L'ordre 1 est un peu plus consistant :

$$i\hbar\lambda\dot{a}_m^1(t) = \sum_k a_k^0(t) \exp\left[-i\frac{(E_k - E_m)t}{\hbar}\right] \langle m | \lambda W_1 | k \rangle.$$

On s'intéresse aux transitions du système vers un état différent de l'état initial $m \neq n$, ainsi la condition (4.2) obtenue à l'ordre 0 permet de simplifier la somme et d'écrire sous forme implicite :

$$\lambda a_{m \neq n}^1(t) = \frac{1}{i\hbar} \int \exp[-i(E_n - E_m)t/\hbar] \langle m | H_1 | n \rangle dt.$$

La constante d'intégration est fixée par le fait que $a_k^1(0) = 0$ comme évoqué plus haut. Le calcul ne peut pas être mené plus loin de façon générale compte-tenu de l'éventuelle dépendance temporelle du hamiltonien perturbé H_1 .

4.3.1.2 Cas où H_1 est indépendant du temps

Si H_1 est indépendant du temps pour $t > 0$, le calcul de la primitive avec prise en compte de la condition initiale est très simple :

$$\lambda a_{m \neq n}^1(t) = \frac{1}{i\hbar} \langle m | H_1 | n \rangle \frac{\exp[-i(E_n - E_m)t/\hbar] - 1}{[-i(E_n - E_m)/\hbar]}.$$

On en déduit la probabilité cherchée :

$$P_{n \rightarrow m}(t) = |\lambda a_m^1(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |\langle m | H_1 | n \rangle|^2 \frac{\sin^2[(E_m - E_n)t/2\hbar]}{[(E_m - E_n)/2\hbar]^2}. \quad (4.3)$$

Dans la limite des temps extrêmement courts, $t < \hbar/(E_m - E_n)$, cette expression se simplifie en :

$$P_{n \rightarrow m}(t) \simeq \frac{1}{\hbar^2} |\langle m | H_1 | n \rangle|^2 t^2.$$

On trouve un résultat qui peut surprendre : la probabilité est quadratique en temps. Cette dépendance en t^2 n'est généralement pas observée, car elle concerne des durées difficilement mesurables :

- systèmes atomiques : $\hbar/(E_m - E_n) \sim \frac{6,6 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}}{\text{qqs eV}} \sim 10^{-16} \text{ s}$;
- systèmes nucléaires : $\hbar/(E_m - E_n) \sim \frac{6,6 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}}{\text{qqs MeV}} \sim 10^{-22} \text{ s}$.

Cette dépendance a cependant été vérifiée expérimentalement, et elle conduit à un phénomène appelé « effet Zénon quantique » : on peut ralentir l'évolution d'un système par des mesures très rapprochées.

4.3.2 Désintégration d'un système instable

La probabilité que le système évolue vers n'importe quel autre état est simplement la somme de toutes celles obtenues en (4.3), soit :

$$P_{n \rightarrow \bullet}(t) = \sum_m \frac{1}{\hbar^2} |\langle m | H_1 | n \rangle|^2 \frac{\sin^2[(E_m - E_n)t/2\hbar]}{[(E_m - E_n)/2\hbar]^2}$$

Cette relation n'est valable que pour des temps suffisamment courts pour que les calculs à l'ordre 1 en λ restent valables (qui se traduisent par le fait que la probabilité de transition est petite devant 1). Il est plus pertinent d'évaluer le taux de transition Γ donné par $P_{n \rightarrow \bullet}(t)/t$.

On utilise une des représentations bien connue de la distribution de Dirac :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \delta(x),$$

et l'on obtient :

$$\Gamma \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_m |\langle m | H_1 | n \rangle|^2 \delta(E_m - E_n).$$

On passe à la limite continue : les états finals forment un continuum de densité d'états $dN/dE = \rho(E)$. Seuls les états d'énergie proche de E_n contribuent à la somme. On suppose d'une part que l'élément de matrice $\langle m | H_1 | n \rangle$ varie continûment autour de l'état $|n\rangle$, il vient alors :

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \int |\langle m | H_1 | n \rangle|^2 \delta(E_m - E_n) \frac{dN}{dE} dE,$$

et d'autre part que $|\langle m | H_1 | n \rangle|^2$ est le même pour tous les états m tels que ($E_m = E_n$).

On obtient ainsi la règle d'or de Fermi :

$$1/\tau = \Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m, E_m = E_n | H_1 | n \rangle|^2 \rho(E_n).$$

où τ est par définition la durée de vie du système.

Quelques remarques s'imposent :

- l'état $|m\rangle$ peut par exemple contenir un ou plusieurs photons ;
- le hamiltonien perturbé H_1 représente par exemple le couplage d'un noyau instable avec le champ électromagnétique fluctuant existant dans l'espace même en l'absence de champ extérieur ou de photons incidents ;
- on constate que pour une perturbation constante, il n'y a que des transitions entre états de même énergie à environ \hbar/t près ;
- trois échelles de temps gouvernent l'évolution du système :
 - le temps quantique $dt < \hbar/\Delta E$, pour lequel la probabilité de transition varie de façon quadratique avec le temps,
 - le temps infinitésimal $t \ll \tau$, pour lequel on peut définir un taux de transition,
 - le temps caractéristique τ , qui mesure la durée de vie moyenne du système.

4.4 Loi de désintégration exponentielle

4.4.1 Durée de vie

Du fait de l'équivalence masse – énergie, de la possibilité pour certains systèmes d'émettre différentes formes de rayonnement, ou pour les particules de changer

de nature à cause de l'interaction faible, on observe de nombreuses particules ou systèmes instables. Les différentes formes de radioactivité des noyaux en sont une illustration particulièrement importante (chapitre ??).

Nous admettrons la propriété suivante de ces phénomènes d'instabilité, que nous appellerons de façon générique *désintégration* : la probabilité de désintégration entre les instants t et $t+dt$ est égale à Γdt , où Γ est une quantité indépendante du temps.

Par conséquent, si le système est présent à l'instant initial $t = 0$, la probabilité $P(t)dt$ qu'il se désintègre entre t et $t+dt$ est égal au produit de la probabilité qu'il ne soit pas désintégré sur l'intervalle $[0, t[$ par la probabilité qu'il se désintègre sur l'intervalle $[t, t + dt]$, soit :

$$P(t)dt = \left(1 - \int_0^t P(u)du\right) \times \Gamma dt .$$

Cette relation conduit à une équation différentielle dont la solution normalisée à l'unité s'écrit :

$$P(t) = \Gamma e^{-\Gamma t} .$$

La durée de vie moyenne du système, appelée temps de vie et notée τ , est alors :

$$\tau = \langle t \rangle = \int_0^\infty tP(t)dt = 1/\Gamma .$$

Finalement, on peut donc écrire :

$$P(t)dt = e^{-t/\tau} \frac{dt}{\tau} .$$

Si, par exemple, le système est constitué à l'instant t d'un très grand nombre $N(t)$ de noyaux instables de durée de vie τ , il y en a Ndt/τ qui se désintègrent en moyenne entre t et $t + dt$. On en déduit le nombre de noyaux qui ne se sont pas désintégrés en fonction du nombre initial de noyaux N_0 :

$$dN = -N \frac{dt}{\tau} \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-t/\tau} .$$

Il est d'usage quand on parle de décroissance radioactive de parler de la période T , ou demi-vie, de l'élément considéré, définie par :

$$N(T) = N_0/2 \Rightarrow T = \tau \ln 2 = 0,693 \tau .$$

Ainsi, par définition, quand on a un échantillon de matières radioactives, l'activité de l'échantillon, c'est-à-dire le nombre de désintégrations par unité de temps au sein de cet échantillon, est divisée par 2 après une demi-vie, d'où la terminologie.

Remarque. La loi de désintégration exponentielle ne s'applique pas à tous les systèmes instables. Par exemple, pour des systèmes confinés et à petit nombre d'états finals possibles, le système peut revenir à son état initial par ré-interaction des produits de désintégration.

4.4.2 Distribution de Breit-Wigner

Soit une particule instable de temps de vie $\tau = 1/\Gamma$ créée à l'instant $t = 0$. La probabilité de l'observer à l'instant t est $\exp(-\Gamma t)$.

Plus généralement, un système stable d'énergie E_0 est décrit par une fonction d'onde :

$$\psi(t) = \psi(0) \exp(-iE_0 t).$$

On peut donc légitimement modéliser un système instable par :

$$\psi(t) = \psi(0) \exp(-iE_0 t) \exp(-\Gamma t/2),$$

de sorte que :

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 \exp(-\Gamma t).$$

Soit alors un système créé à l'instant $t = 0$, soit $\psi(t) = 0$ si $t < 0$. Prenons la transformée de Fourier de $\psi(t)$:

$$\mathcal{F}\psi(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iEt) \psi(t) dt = \frac{i\psi(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(E - E_0) + i\Gamma/2}.$$

ψ apparaît comme la superposition d'ondes stables d'énergie E avec le coefficient $\mathcal{F}\psi(E)$. La probabilité de mesurer l'énergie entre E et $E + dE$ est donc proportionnelle à :

$$|\mathcal{F}\psi(E)|^2 = \frac{|\psi(0)|^2}{2\pi} \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}.$$

C'est une distribution dite de Breit-Wigner non relativiste (ou de Lorentz, ou de Cauchy), illustrée figure 4.1.

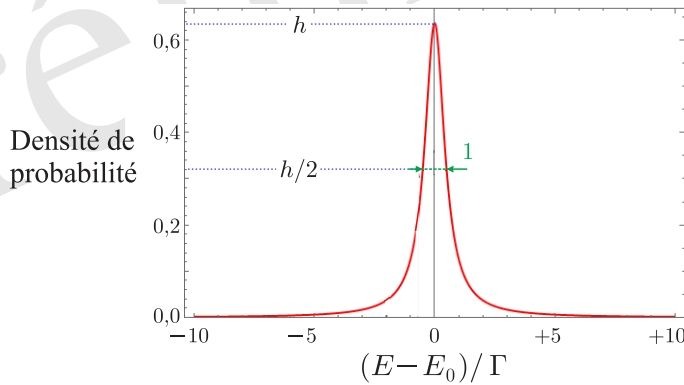


FIGURE 4.1 – Distribution de Breit-Wigner.

L'énergie d'un système instable est définie à environ Γ près (en unités naturelles), où Γ est la largeur à mi hauteur de la distribution, dont il faut noter qu'elle a une variance infinie.

4.5 Section efficace d'interaction

En mécanique quantique, les processus de diffusion et d'interactions en général ont un caractère statistique, différentes réactions sont possibles, chacune avec une certaine probabilité. La notion de section efficace permet de quantifier précisément la probabilité d'occurrence de ces phénomènes.

4.5.1 Analogie classique

Commençons par une image purement classique de particules ponctuelles incidentes sur une épaisseur de matière dx et de surface S contenant n sphères de rayon R par unité de volume (voir figure 4.2). On suppose que les particules ar-

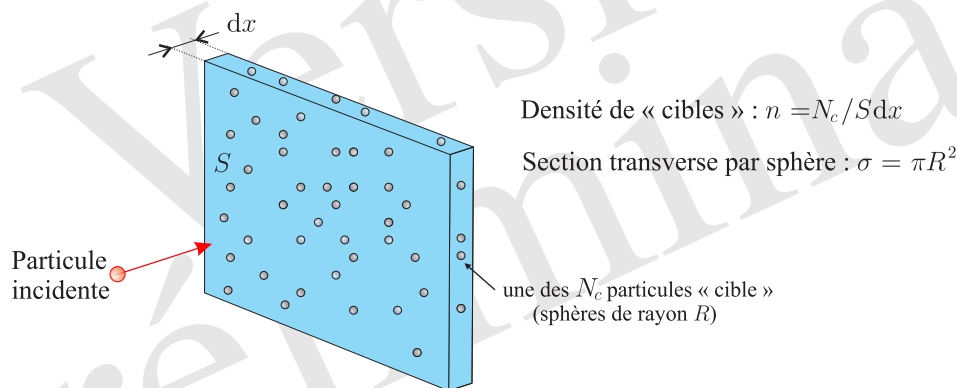


FIGURE 4.2 – Illustration de la notion classique de section efficace

rivent avec une distribution aléatoire sur la surface du matériau, et qu'il n'y a pas d'interaction à distance. La probabilité qu'une particule incidente frappe une des sphères est égale au rapport de la surface obstruée par les sphères sur la surface totale, soit :

$$dP = nSdx \times \pi R^2 / S = \sigma ndx,$$

où σ est la section transverse d'une sphère.

4.5.2 Définition

Par analogie, on définit la section efficace d'interaction σ entre des particules incidentes et des particules cibles par la relation :

$$\frac{dN_{int}}{N} = \sigma n dx,$$

où dN_{int}/N est la fraction des particules incidentes qui interagissent avec une des cibles, n la densité de cibles, et dx l'épaisseur traversée.

À la profondeur x , la variation du nombre de particules incidentes $N(x)$ n'ayant pas interagi est donc donné par : $dN = -dN_{int} = -N\sigma n dx$. Ainsi :

$$N(x) = N(0) \exp(-\sigma n x) = N(0) \exp(-x/\lambda).$$

La dernière égalité définit la longueur d'interaction, ou encore le libre parcours moyen :

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma}.$$

Par définition, la probabilité d'une interaction sur la distance dx est donc égale à dx/λ . La quantité λ est bien un libre parcours moyen, car si l'on calcule la valeur moyenne de la longueur parcourue par une particule incidente, on obtient λ , la démonstration étant analogue à la démonstration donnant le temps moyen de désintégration d'un système instable :

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} x \exp(-x/\lambda) \frac{dx}{\lambda} = \lambda.$$

Lorsque la particule incidente disparaît (par exemple absorption de rayons γ dans la matière), on parle de longueur d'absorption, et de section efficace d'absorption :

$$\lambda_{\text{absorption}} = \frac{1}{n\sigma_{\text{absorption}}}.$$

Donnons pour illustrer cette notion l'exemple des rayons X (photons de quelques dizaines de keV) utilisés pour la radiographie. Leur longueur d'absorption (à 70 keV) dans les poumons est d'environ 16 cm et dans les os de seulement 2 cm. L'absorption des photons à cette énergie est principalement due à l'effet photoélectrique et à la diffusion Compton. Les particules cibles sont donc les électrons des atomes. La raison de la grande différence de longueur d'absorption est que les os sont essentiellement faits de calcium ($Z = 20$, $A = 40$), de densité $\rho = 1,8 \text{ g/cm}^3$, alors que la densité dans les poumons (Z moyen = 7, A moyen = 13) est de $0,3 \text{ g/cm}^3$. Le nombre de cibles est proportionnel à $\rho Z/A$, et, au vu des autres différences non prises en compte (énergie de liaison des électrons), le rapport observé (8) n'est pas excessivement éloigné de ce que l'on peut estimer grossièrement (5,6).

4.5.2.1 Section efficace partielle

Dans la plupart des situations, plusieurs réactions sont possibles, et la section efficace totale est la somme des sections efficaces des différentes réactions, appelées sections efficaces partielles :

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_i \sigma_i.$$

De ce fait, le libre parcours moyen est donné par :

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_i \frac{1}{\lambda_i}.$$

Par, exemple, lors des diffusions de particules, celles-ci peuvent rester inchangées, la diffusion est dite élastique, ou certaines d'entre elles peuvent être excitées ou transformées, on parle alors de diffusion inélastique. Prenons le cas de la diffusion électron proton. À haute énergie, ce dernier peut être dissocié et d'autres particules sont produites. La section efficace peut être vue comme la somme de deux termes :

- section efficace partielle σ_e de diffusion élastique : $e^- + p \rightarrow e^- + p$;
- section efficace partielle σ_i de diffusion inélastique : $e^- + p \rightarrow e^- + \text{autres particules}$.

4.5.2.2 Section efficace différentielle

On rencontrera aussi la notion de section efficace différentielle, lorsque les interactions conduisent à un continuum d'états. Par exemple si, pour la réaction $A + B \rightarrow C + D$, on s'intéresse à la distribution de l'impulsion \vec{p} de la particule C , la section efficace totale pourra s'écrire :

$$\sigma = \int d^3p \frac{d\sigma(\vec{p})}{dp_x dp_y dp_z}$$

où $d\sigma(\vec{p})/dp_x dp_y dp_z$ est la section efficace différentielle d'interaction pour une émission de C avec l'impulsion \vec{p} à d^3p près.

4.5.2.3 Ordres de grandeur

La section efficace d'interaction est d'autant plus grande que l'intensité de l'interaction est plus forte et sa portée plus grande.

Pour l'interaction électromagnétique, reprenons l'exemple du paragraphe 4.5.2. Une longueur d'absorption de 2 cm dans les os correspond à une section efficace sur le calcium (M_N est la masse molaire du nucléon) :

$$\sigma_{\text{absorption}} = \frac{1}{n\lambda} = \frac{AM_N}{N\rho\lambda} = \frac{40 \times 1}{6,02 \times 10^{23} \times 1,8 \times 2} = 1,8 \times 10^{-23} \text{ cm}^2.$$

Il est d'usage d'utiliser le barn (symbole b) pour exprimer les sections efficaces : $1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$. Dans cette unité, la section efficace calculée est de 18 b.

Pour l'interaction forte, la section efficace d'interaction de pions de quelques GeV sur les nucléons dans la matière est d'environ 30 mb, plus petite que la précédente, à cause de la très courte portée de l'interaction, dont l'intensité est pourtant beaucoup plus grande que celle de l'interaction électromagnétique.

L'exemple des neutrinos (paragraphe 9.5 page 167) nous montrera que l'interaction faible induit des sections efficaces d'interaction extrêmement faibles à basse énergie.

À retenir dans le chapitre 4

- tableau des interactions (4.1 page 55);
- tableau des particules élémentaires (4.2 page 57);
- lois de conservation : $E, \vec{p}, m, \vec{J}, Q, B, L$;
- règle d'or de Fermi : $\Gamma = (2\pi/\hbar) |\langle m, E_m = E_n | H_1 | n \rangle|^2 \rho(E_n)$;
- temps de vie, loi de désintégration exponentielle : $N = N_0 \exp(-t/\tau)$;
- section efficace d'interaction : $dN_{\text{int}} = N\sigma n dx$;
- longueur d'interaction ou libre parcours moyen : $\lambda = 1/\sigma n$.

4.6 Exercices

Exercice 4.a – Particules étranges

Dans le Modèle Standard, les quarks sont au nombre de six, répartis en trois familles comprenant chacune deux éléments de charge électrique $+2/3$ et $-1/3$, l'unité de charge électrique étant la charge de l'électron. On rappelle que tous les quarks ont une charge baryonique $+1/3$ et qu'on appelle méson une particule à interaction forte de charge baryonique nulle.

Peu après la découverte du méson π en 1947, de nouvelles particules instables

ont été découvertes dans le rayonnement cosmique. Leur section efficace de production est élevée, mais leur durée de vie est « longue » (10^{-8} à 10^{-10} s). Elles sont donc produites par interaction forte, mais se désintègrent par interaction faible. Ces deux caractéristiques apparemment contradictoires sont à l'origine de leur appellation « particules étranges ».

On introduit alors un nouveau nombre quantique, l'étrangeté S , qui est conservé lors d'une réaction d'interaction forte ou électromagnétique, mais non lors d'une interaction faible.

À la suite d'une réaction d'interaction forte, les particules étranges sont toujours produites par paires, l'une ayant une étrangeté positive, l'autre une étrangeté opposée. Par convention, on attribue l'étrangeté $+1$ au méson neutre K^0 .

On observe que la particule Λ est produite dans un accélérateur avec une section efficace élevée par la réaction : $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$.

1. En déduire ses nombres quantiques (charges électrique et baryonique, étrangeté).
2. Même question pour le K^+ dans : $p + p \rightarrow p + \Lambda + K^+$.
3. L'antiparticule du K^+ est le K^- , celle du K^0 est le \bar{K}^0 . Indiquer leurs nombres quantiques.
4. Les désintégrations suivantes sont-elles possibles ? Justifier.

$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^- ; \Lambda \rightarrow p + \pi^- \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \gamma ; K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu. \end{aligned}$$

5. Le Λ est constitué des trois quarks u , d et s . En déduire la charge électrique du quark s et son étrangeté. Montrer que tous les mésons étranges K^+ , K^- , K^0 et \bar{K}^0 peuvent être formés à partir d'un quark u , d ou s et d'un antiquark.
6. Trouver tous les baryons (particules de charge baryonique $+1$) d'étrangeté -2 et -3 , en écrivant leur composition en trois quarks (la prédiction théorique de l'existence du Ω^- en 1963, suivie de sa découverte expérimentale l'année suivante a été le premier succès du modèle des quarks, la masse et les désintégrations de cette particule ayant été correctement déterminées à l'avance). Les identifier sachant qu'ils sont produits par les réactions suivantes :

$$\begin{aligned} K^- + p &\rightarrow \Xi^+ + K^+ ; \\ K^- + p &\rightarrow \Xi^0 + K^+ + \pi^- ; \\ K^- + p &\rightarrow \Omega^- + K^0 + K^+ . \end{aligned}$$

Exercice 4.b – Lois de conservation

Indiquer si les désintégrations et réactions suivantes peuvent avoir lieu et la nature de l'interaction mise en jeu si c'est le cas :

$$\begin{aligned}
 p &\rightarrow e^+ + \gamma \\
 \gamma &\rightarrow e^+ + e^- \\
 \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \\
 \nu_\mu + n &\rightarrow \mu^- + p \\
 p &\rightarrow n + e^+ + \nu_e \\
 \pi^0 &\rightarrow \gamma \gamma
 \end{aligned}$$

Exercice 4.c – Désintégration à deux corps

Une particule de masse m se désintègre en deux particules de masses m_1 et m_2 . Calculer E_1 et E_2 leur énergie dans le centre de masse (éviter les calculs compliqués). Calculer $|\vec{p}_1|$ et $|\vec{p}_2|$. Utiliser les unités naturelles.

Exercice 4.d – Matérialisation

1. Quelle est l'énergie minimale que doit avoir un photon pour se matérialiser en une paire électron-positron? Montrer cependant que la réaction $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ est impossible dans le vide.
2. On considère un photon se propageant dans le voisinage d'un électron au repos. Calculer l'énergie minimale du photon pour que la matérialisation puisse avoir lieu par la réaction : $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$. On pourrait dire que l'électron joue un rôle catalyseur.
3. Le photon traverse à présent une plaque de plomb, et se trouve en présence des noyaux des atomes (notés N). Calculer l'énergie minimale du photon pour que la matérialisation puisse avoir lieu par la réaction : $\gamma + N \rightarrow N + e^+ + e^-$. Comparer avec le résultat de la première question.
4. La section efficace de la réaction précédente est donnée par la formule de Bethe et Heitler, valable pour un photon d'énergie supérieure à 500 MeV :

$$\sigma = \alpha r_0^2 Z^2 \left[\frac{28}{9} \log \left(183 Z^{-1/3} \right) - \frac{2}{27} \right],$$

où $\alpha = 1/137$ est la constante de structure fine, $r_0 = 2,82$ fm est le rayon classique de l'électron, et Z le numéro atomique du noyau (82 pour le plomb).

- (a) Calculer σ
- (b) Calculer la probabilité Π qu'un photon de 1 GeV se matérialise en traversant une plaque de plomb de $500 \mu\text{m}$ d'épaisseur. La masse atomique du plomb est $A = 207,2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et sa masse volumique $\rho = 11,35 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. À cette énergie, on peut négliger les autres interactions du photon dans le plomb.

Exercice 4.e – Distribution de Dirac

On rappelle les propriétés suivantes de la distribution de Dirac :

— Pour les fonctions f continues à support compact

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

— Si g est une fonction telle que $g(x_i) = 0$ et $g'(x_i) \neq 0$ alors

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|},$$

et par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}.$$

Par ailleurs, deux représentations de δ seront utiles pour le cours :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) dk \quad \text{et} \quad \delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

1. Sachant que $p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2$ calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) dp^0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) dp^0$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) d^4p$

$$\text{où } \theta \text{ est la fonction de Heaviside : } \theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases};$$

2. Calculer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{\sin^2(\Delta E t / 2\hbar)}{(\Delta E / 2\hbar)^2}.$$

Exercice 4.f – Section efficace

La section efficace d'absorption des rayons gamma de 1 MeV par les atomes de plomb est de 10 b.

1. Quelle est la longueur d'absorption λ correspondante? Le numéro atomique du plomb est 82, sa masse atomique 207, et sa masse volumique $11 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.
2. Quelle fraction f de rayons gamma traverse 10 cm de plomb?

Exercice 4.g – Catastrophe au LHC

Le LHC est composé de deux anneaux circulaires de rayon R dans lesquels circulent deux faisceaux de protons en sens inverse et qui se croisent une fois par tour. Dans les deux faisceaux du LHC, les protons sont regroupés en paquets, et l'on suppose qu'il y a un seul paquet par faisceau pour simplifier. Chaque paquet est un cylindre de section S et de longueur L , dans lesquels les protons sont répartis uniformément. L'énergie cinétique nominale des protons est $T = 7 \text{ TeV}$ ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$).

1. Montrer que leur vitesse est pratiquement égale à la vitesse de la lumière dans le vide c .
2. Soient N_1 et N_2 le nombre des protons dans les deux paquets. Exprimer en fonction de la section efficace de collision σ le nombre x de collisions par croisement. On admettra que ce nombre est très petit devant N_1 et N_2 .
3. On donne $\sigma = 30 \text{ mb}$. Justifier l'ordre de grandeur de cette valeur.
4. On donne $N_1 = N_2 = 10^{14}$, $R = 4,5 \text{ km}$ et $S = 0,5 \text{ mm}^2$. Calculer le nombre τ de collisions par seconde.
5. Quelle est la masse M de la particule la plus lourde qui peut être produite lors d'une collision?
6. Quelle énergie minimale E un proton cosmique entrant en collision avec un proton au repos de l'atmosphère doit-il avoir pour produire une particule de masse M ?
7. La densité de flux de protons cosmiques d'énergie supérieure à 10^{17} eV est $\Phi = 1000 \text{ protons par km}^2 \text{ et par an}$. Combien d'années N le LHC devrait-il fonctionner pour égaler le nombre de collisions déjà produites par les protons cosmiques depuis que la Terre existe, soit depuis environ 4,5 milliards d'années? On donne le rayon de la Terre : $R_T = 6400 \text{ km}$.

8. Commenter alors sur le danger potentiel de la création d'une particule dangereuse (mini trou noir par exemple) au LHC.

Version
préliminaire

Chapitre 5

Un soupçon de théorie quantique des champs

La théorie quantique des champs est un formalisme théorique qui a notamment permis de rendre compte de l'apparition et de la disparition de particules, phénomènes naturels observés dans les désintégrations des noyaux radioactifs, les interactions des rayons cosmiques dans l'atmosphère, puis dans les collisions de particules provoquées au moyen des accélérateurs de plus en plus puissants. Les équations de Schrödinger, Dirac ou Klein-Gordon sont impuissantes à décrire ces observations. La théorie quantique des champs est le cadre dans lequel s'inscrit le modèle standard de la physique des particules, mais d'autres domaines, comme la physique de la matière condensée, s'appuient sur ses concepts.

Dans ce chapitre sont introduites les notions élémentaires de théorie quantique des champs, en commençant par les opérateurs de création et d'annihilation et l'espace de Fock. La « seconde quantification » des champs scalaire et de Dirac est détaillée. Nous aurons ainsi les outils pour aborder le chapitre 7 où nous verrons comment le formalisme théorique permet de calculer le temps de vie d'un système instable ou une section efficace d'interaction, tous phénomènes dans lesquels apparaissent ou disparaissent des particules.

5.1 Champ scalaire

5.1.1 Opérateurs de création et d'annihilation

La notion d'opérateurs de création et d'annihilation est rencontrée en mécanique quantique dans le cadre de l'étude de l'oscillateur harmonique. Nous en rappelons ici les principaux résultats.

Le hamiltonien de ce système s'écrit classiquement :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Le principe de correspondance donne sa formulation en mécanique quantique :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Les valeurs propres de \hat{H} sont $(n + 1/2)\hbar\omega$ où n est un entier positif.

Les vecteurs propres sont notés $\varphi_n(x)$ et :

$$\varphi_0(x) = C \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

où C est une constante de normalisation.

On introduit les opérateurs sans dimension :

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} ; \hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Les opérateurs de création a^\dagger et d'annihilation a , adjoints l'un de l'autre, sont définis par :

$$\begin{aligned} \text{opérateur de création } a^\dagger &= \frac{\hat{X} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} : a^\dagger \varphi_n = \sqrt{n+1} \varphi_{n+1} \\ \text{opérateur d'annihilation } a &= \frac{\hat{X} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} : \begin{cases} a \varphi_{n+1} = \sqrt{n+1} \varphi_n \\ a \varphi_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Bien qu'ils soient des opérateurs nous omettrons leurs chapeaux pour alléger les notations.

L'opérateur a^\dagger (resp. a) appliqué à un vecteur propre fait apparaître (resp. disparaître) un quantum d'énergie $\hbar\omega$, ou encore une « excitation », ce qui justifie le vocabulaire.

On a les relations importantes :

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= Id \quad ; \quad \hat{H} = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega ; \\ a^\dagger a &= \hat{N} \text{ avec : } \hat{N} \varphi_n = n \varphi_n. \end{aligned}$$

On voit que l'on peut exprimer les différents opérateurs décrivant un oscillateur harmonique (position, impulsion, hamiltonien...) uniquement en terme des opérateurs a^\dagger et a . On note que $a^\dagger a$ est un opérateur qui compte le nombre d'excitations pour un vecteur propre du système.

5.1.2 Seconde quantification

Supposons qu'un système soit décrit par une fonction d'onde **réelle** ou « champ » vérifiant l'équation de K-G :

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Delta \psi + m^2 \psi.$$

Remarque. le champ ψ est dit scalaire car si l'on fait la transformation de Lorentz : $x \rightarrow x' = \Lambda x$, alors $\psi'(x') = \psi(x)$ est aussi solution de l'équation de K-G.

Les solutions de cette équation peuvent s'écrire comme une superposition d'ondes planes :

$$\psi = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E} [a_{\vec{p}} \exp(-ip_\mu x^\mu) + a_{\vec{p}}^* \exp(ip_\mu x^\mu)]$$

avec $x^\mu = (t, \vec{r})^\top$, $p^\mu = (E, \vec{p})^\top$ et $E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

◇ **Notation.** Dans la suite, pour simplifier les notations, nous écrirons p^0 à la place de E ; il faut se souvenir qu'alors p^0 est positif.

On notera également que l'élément d'intégration :

$$\frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E}$$

est invariant par transformation de Lorentz (exercice 2.e). C'est la raison pour laquelle le développement de ψ a été écrit sous cette forme.

La « seconde quantification » consiste alors à promouvoir ψ en **opérateur hermitien** en remplaçant les coefficients $a_{\vec{p}}$ et $a_{\vec{p}}^*$ par les opérateurs $a_{\vec{p}}$ et leurs adjoints $a_{\vec{p}}^\dagger$ vérifiant les relations de commutation :

$$\begin{cases} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}^\dagger] = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) I \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{k}}^\dagger] = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans ces relations, on notera d'une part que I est l'opérateur identité agissant dans le même espace que $a_{\vec{p}}$ et/ou $a_{\vec{p}}^\dagger$, et d'autre part que le terme $\delta^3(\vec{p} - \vec{k})$ est égal au produit de trois distributions de Dirac :

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = \delta(p_x - k_x) \delta(p_y - k_y) \delta(p_z - k_z).$$

Comme on va l'expliciter dans la suite :

- on pourra interpréter $a_{\vec{p}}^\dagger$ (resp. $a_{\vec{p}}$) comme un opérateur de création (resp. d'annihilation) d'une particule d'impulsion \vec{p} ;
- les relations de commutation choisies permettront de retrouver les relations de commutation canoniques entre coordonnées généralisées et leurs conjuguées et de satisfaire au principe de Pauli.

5.2 Espace de Fock

Avant de manipuler des opérateurs, il convient de définir l'espace de Hilbert dans lequel ils agissent !

On suppose dans un premier temps que l'on travaille en volume fini. Alors les impulsions sont quantifiées et l'on peut les numéroter : $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_i \dots$

On postule l'existence d'un état « vide » noté $|0\rangle$ tel que :

$$\forall \vec{p}_i \quad a_{\vec{p}_i} |0\rangle = 0 \quad (\text{et donc } \langle 0| a_{\vec{p}_i}^\dagger = 0).$$

On définit les états notés $|N\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle$ comme les états à n_1 particules d'impulsion \vec{p}_1 , n_2 particules d'impulsion $\vec{p}_2 \dots$, complètement symétriques par échange de deux particules.

On définit alors les opérateurs de création $a_{\vec{p}_j}^\dagger$ et leurs adjoints, opérateurs d'annihilation, $a_{\vec{p}_j}$ par :

$$a_{\vec{p}_i}^\dagger |N\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle \quad (5.2)$$

$$a_{\vec{p}_j} |N\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_j} |n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots\rangle & \text{si } n_j > 0 \\ 0 & \text{si } n_j = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Ainsi, l'état $a_{\vec{p}_j}^\dagger |0\rangle$ représente l'état à une particule d'impulsion \vec{p}_j .

L'état $a_{\vec{p}_k}^\dagger a_{\vec{p}_j}^\dagger |0\rangle$ représente un état symétrique à deux particules. Si on appelle $\psi_1(\vec{p}_j)$ la fonction d'onde de la particule 1 et $\psi_2(\vec{p}_k)$ la fonction d'onde de la particule 2 alors :

$$a_{\vec{p}_k}^\dagger a_{\vec{p}_j}^\dagger |0\rangle = \psi_1(\vec{p}_j) \psi_2(\vec{p}_k) + \psi_2(\vec{p}_j) \psi_1(\vec{p}_k).$$

Les équations (5.2) et (5.3) entraînent les relations de commutation :

$$\left[a_{\vec{p}_i}, a_{\vec{p}_j}^\dagger \right] = \delta_{ij} I. \quad (5.4)$$

Les opérateurs ainsi introduits sont similaires aux opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique. En particulier l'opérateur $a_{\vec{p}_j}^\dagger a_{\vec{p}_j}$ compte le nombre de particules d'impulsion \vec{p}_j :

$$a_{\vec{p}_j}^\dagger a_{\vec{p}_j} |N\rangle = n_j |N\rangle .$$

La représentation matricielle de ces opérateurs pour un \vec{p}_j donné montre qu'ils sont bien adjoints et que l'on peut les écrire sous la forme :

$$a^\dagger : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad a : \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

On montre (exercice 5.c) que $\langle N|M\rangle \neq 0 \Rightarrow N = M$.

L'espace de Hilbert des états, appelé **espace de Fock**, est l'espace engendré par $|0\rangle$ et tous les états $|N\rangle$.

Attention, l'état $|0\rangle$ n'est pas le vecteur nul de cet espace vectoriel car $a^\dagger |0\rangle \neq 0$.

Quand on passe à la limite continue sur les impulsions, c'est-à-dire quand le volume tend vers l'infini, les opérateurs sont renormalisés de façon à avoir la relation de commutation (5.1) énoncée plus haut :

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}^\dagger] = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) I.$$

Les opérateurs $a_{\vec{p}}^\dagger$ et $a_{\vec{p}}$ s'interprètent comme les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule d'impulsion \vec{p} .

Toutes les observables pourront s'exprimer en fonction des $a_{\vec{p}}^\dagger$ et $a_{\vec{p}}$. Enfin, les états $|N\rangle$ étant symétriques par échange de particules par construction, on a :

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{k}}^\dagger] = 0.$$

Le principe de symétrisation de Pauli est ainsi satisfait.

5.3 Principe de moindre action généralisé

5.3.1 Rappel du théorème de Noether

Le théorème de Noether joue un rôle central dans la construction des modèles théoriques. Nous rappelons quelques résultats de théorie des champs classiques avant de généraliser au formalisme de la théorie quantique des champs.

Nous savons que les équations de Lagrange, équations du mouvement, peuvent s'obtenir à partir du principe de moindre action. Si le système possède ℓ degrés de liberté, il est décrit par les coordonnées généralisées $q_{i=1, \dots, \ell}$ et les vitesses généralisées $\dot{q}_{i=1, \dots, \ell}$. L'action est définie par l'intégrale du lagrangien $L(t, q_i, \dot{q}_i)$:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i) dt.$$

Les équations obtenues s'écrivent :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

L'exemple élémentaire est celui d'une particule non relativiste de masse m dans un potentiel V pour laquelle on peut écrire :

$$L(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m v^2 - V(\vec{x}) \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} \Leftrightarrow \frac{d(m\vec{v})}{dt} = -\vec{\nabla} V,$$

avec ici : $\vec{x} = \vec{x}(q_1, \dots, q_\ell)$.

Le théorème de Noether démontré en théorie des champs classiques stipule qu'à toute invariance du lagrangien par un groupe de symétrie à un paramètre réel correspond une quantité conservée au cours du mouvement.

Par exemple, un système dont le lagrangien est indépendant du temps (invariance par translation temporelle) voit son énergie conservée.

On peut le vérifier sur un système isolé de N particules dont le lagrangien $L = L(\vec{x}_i, \vec{v}_i)$ et pour lequel :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} \frac{d\vec{x}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right).$$

Le premier terme du membre de droite est nul par hypothèse et les équations de Lagrange permettent alors d'écrire que :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot \vec{v}_i \right)$$

Alors, en introduisant les vecteurs $\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$, on montre que la quantité :

$$H = \sum_{i=1}^N (\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i - L)$$

est constante, ce n'est autre que le hamiltonien du système, dont la valeur est son énergie conservée.

5.3.2 Équations de Lagrange généralisées

On généralise le lagrangien quantique dans l'espace-temps relativiste. Afin de symétriser le rôle des coordonnées d'espace et de temps, on considère une **densité** de lagrangien fonction d'un champ ψ et de ses dérivées du premier ordre :

lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow$ densité de lagrangien $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$.

Si ψ est un champ scalaire, on peut construire son gradient $\partial_\mu \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}$ pour toutes les valeurs de $\mu = 0, 1, 2, 3$. Dans ce formalisme les quantités ψ et $\partial_\mu \psi$, sont considérées comme indépendantes. L'action s'écrit :

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L} d^4x \quad (5.5)$$

où x_1 et x_2 sont des points dans l'espace-temps. Le principe de moindre action donne les équations de Lagrange généralisées :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0, \quad (5.6)$$

où on applique la convention de sommation de l'indice μ répété ($\mu = 0$ à 3).

Démontrons que les équations (5.6) correspondent à un extremum de l'action (5.5).

Supposons que l'extremum de l'action existe et soit obtenu pour un certain $\psi = \tilde{\psi}$. Posons : $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) + \eta(x)d\varepsilon$ et donc : $\partial_\mu \psi(x) = \partial_\mu \tilde{\psi}(x) + \partial_\mu \eta(x)d\varepsilon$ avec $\eta(x) = 0$ partout à la frontière du domaine d'intégration. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\varepsilon} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\mu \eta \right) d^4x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \eta - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) \eta \right) d^4x + \int_{x_1}^{x_2} \partial_\mu \left(\eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) d^4x \end{aligned}$$

Le deuxième terme de la somme du membre de droite est nul car $\eta(x)$ est nul à la frontière d'intégration par hypothèse.

Si l'on souhaite que $\tilde{\psi}$ soit un extremum, i.e $\frac{dS}{d\varepsilon} = 0$ pour toute fonction $\eta(x)$, on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0 \text{ CQFD.}$$

En généralisant l'expression classique du hamiltonien on construit la densité de hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \pi(x) \partial_0 \psi - \mathcal{L}$$

où

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)}$$

est la variable conjuguée de la « coordonnée » généralisée ψ . Le hamiltonien est l'intégrale de \mathcal{H} sur tout l'espace. Il est invariant au cours du mouvement. En effet, en utilisant la dérivée d'une fonction composée et les équations de Lagrange (5.6) on trouve successivement :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \frac{d(\partial_\mu \psi)}{dt} \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \frac{d(\partial_\mu \psi)}{dt} \end{aligned}$$

puis en commutant les dérivées ∂_μ et $\frac{d}{dt}$ il vient :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \frac{d\psi}{dt} \right).$$

On intègre sur tout l'espace et l'on applique le théorème de la divergence :

$$\int d^3x \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \int d^3x \sum_{j=1}^3 \partial_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \psi)} \frac{d\psi}{dt} \right) + \int d^3x \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \frac{d\psi}{dt} \right).$$

Comme on intègre sur tout l'espace, le premier terme du deuxième membre est nul. Il vient alors, puisque les coordonnées d'espace-temps sont des variables indépendantes :

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \int d^3x \pi(x) \partial_0 \psi.$$

On obtient donc que la densité de hamiltonien intégrée sur tout l'espace est constante dans le temps, comme attendu.

5.3.3 Relations de commutation à temps égaux

Revenons à l'équation de Klein-Gordon. Elle découle du principe de moindre action appliqué au lagrangien :

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2. \quad (5.7)$$

C'est assez facile à voir : on a simplement

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial \psi} = -m^2 \psi,$$

et pour le second morceau des équations de Lagrange on écrit tout d'abord que

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \psi,$$

puis on dérive par rapport à $\partial_\mu \psi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial (\partial_\mu \psi)} &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \eta^{\mu\nu} \frac{\partial_\nu \psi}{\partial_\mu \psi} \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \eta^{\mu\nu} \delta_\nu^\mu = \partial^\mu \psi. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \partial_\mu \partial^\mu \psi = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \Delta \psi.$$

Les équations de Lagrange (5.6) s'écrivent donc :

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Delta \psi + m^2 \psi,$$

qui est bien la forme explicite de l'équation de Klein-Gordon (équation (2.8) page 25) CQFD.

Le moment conjugué de la coordonnée généralisée ψ est :

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial (\partial_0 \psi)} = \partial^0 \psi.$$

Il permet de calculer le commutateur **à temps égaux** en deux positions \vec{x} et \vec{y} de l'espace :

$$[\psi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Afin de fluidifier la lecture du texte, le calcul très instructif de ce commutateur est renvoyé à l'annexe de calcul ?? page ??.

On obtient ainsi les relations canoniques pour les variables conjuguées, ce qui justifie *a posteriori* les expressions des commutateurs des opérateurs de création et d'annihilation :

- mécanique classique : $\{q_i, p_j\} = 1$;
- mécanique quantique : $[\hat{q}, \hat{p}] = i$;
- théorie quantique des champs : $[\psi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$.

Ces correspondances assurent que l'on retrouve les équations classiques à la limite $\hbar \rightarrow 0$, même si, avec le choix d'utiliser les unités naturelles pour alléger l'écriture, cela n'apparaît pas explicitement dans les équations !

5.4 Hamiltonien de Klein-Gordon

Appliquons le formalisme pour calculer l'énergie d'un état particulier.

La densité de hamiltonien de Klein-Gordon s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L}_{KG} = \partial_0 \psi \partial^0 \psi - \mathcal{L}_{KG} \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial_0 \psi \partial^0 \psi + (\vec{\nabla} \psi)^2 + m^2 \psi^2 \right). \end{aligned}$$

Le hamiltonien correspondant s'obtient par intégration sur tout l'espace, le détail du calcul est renvoyé à l'annexe ?? page ??, on trouve :

$$H = \int d^3 \vec{p} p_0 \left[\frac{a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}}{(2\pi)^3 2p_0} + \frac{1}{2} \delta^3(\vec{0}) \right].$$

Appliquons par exemple H à l'état $a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$, il vient :

$$H a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \int d^3 \vec{k} k_0 \frac{a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}}{(2\pi)^3 2k_0} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle + \int d^3 \vec{k} k_0 \frac{1}{2} \delta^3(\vec{0}) a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle. \quad (5.8)$$

On utilise alors les relations de commutation (5.1) pour avoir :

$$H a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \int d^3 \vec{k} a_{\vec{k}}^\dagger p_0 \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) |0\rangle + \frac{1}{2} \int d^3 \vec{k} k_0 \delta^3(\vec{0}) a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \quad (5.9)$$

$$= \left[p_0 + \frac{1}{2} \int d^3 \vec{k} k_0 \delta^3(\vec{0}) \right] a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle. \quad (5.10)$$

Dans le crochet ci-dessus, on trouve l'énergie de la particule (p_0c) plus un terme infini ($\delta^3(\vec{0}) = V/(2\pi^3)$). Ce terme est aussi égal à l'énergie de l'état vide $|0\rangle$. Comme on ne peut mesurer les énergies que par rapport à cet état, il est possible d'ignorer ce problème.

Remarque. On peut éviter l'apparition de ce terme en ordonnant différemment les opérateurs dans la définition de la densité de lagrangien et de hamiltonien, mais ces développements sortent du cadre de cette introduction.

5.5 Champ de Dirac

Nous abordons maintenant la seconde quantification du champ de Dirac, qui représente des particules de spin 1/2 et leurs antiparticules.

Le principe d'exclusion de Pauli, que l'expérience impose, induit des différences majeures sur les propriétés des opérateurs de création et d'annihilation par rapport au champ scalaire.

5.5.1 Relations d'anticommution

On a vu au chapitre 3 que les solutions en onde plane de l'équation de Dirac sont des combinaisons linéaires des quatre solutions $\psi_{1,2,3,4}(x^\mu)$ suivantes :

$$\psi_{1,2}(x^\mu) = \begin{pmatrix} \chi_{1,2} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m} \chi_{1,2} \end{pmatrix} \exp(-ip_\mu x^\mu)$$

$$\psi_{3,4}(x^\mu) = \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m} \chi_{2,1} \\ \chi_{2,1} \end{pmatrix} \exp(-ip_\mu x^\mu),$$

où : $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On remarquera l'inversion de l'ordre des indices sur χ pour la formule donnant $\psi_{3,4}(x^\mu)$. Ce choix est motivé par le fait que le spin de la particule qui sera associée à ψ_3 après seconde quantification est alors le même que celui de la particule qui sera associée à ψ_1 . Et pareillement pour le spin des particules qui seront associées à ψ_4 et ψ_2 . Nous le préciserons plus loin dans ce paragraphe.

Nous procédons maintenant à un changement de notations qui facilitera la formulation de la seconde quantification. On pose :

$$u^{1,2}(\vec{p}) = \sqrt{p^0 + m} \begin{pmatrix} \chi_{1,2} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m} \chi_{1,2} \end{pmatrix}$$

et

$$v^{1,2}(\vec{p}) = \sqrt{p^0 + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\varepsilon + m} \chi_{2,1} \\ \chi_{2,1} \end{pmatrix}$$

On notera le changement de signe sur \vec{p} dans les expressions de $v^{1,2}$ par rapport aux expressions de $\psi_{3,4}(x^\mu)$.

Le facteur additionnel de normalisation $\sqrt{p^0 + m}$ a été introduit pour avoir les identités (dites relations d'orthogonalité sur les spineurs) :

$$\begin{cases} u^{i\dagger}(\vec{p}) u^j(\vec{p}) = v^{i\dagger}(\vec{p}) v^j(\vec{p}) = 2p^0 \delta_{ij} \\ u^{i\dagger}(\vec{p}) v^j(-\vec{p}) = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Avec ces notations, la fonction d'onde :

$$\psi(x^\mu) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{j=1}^2 [b_{\vec{p},j} u^j(\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + d_{\vec{p},j}^* v^j(\vec{p}) e^{ip_\mu x^\mu}] \quad (5.12)$$

est solution de l'équation de Dirac avec : $p^0 = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$, et, par définition de $u^{1,2}(\vec{p})$ et $v^{1,2}(\vec{p})$:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u^{1,2}(\vec{p}) = 0 \quad (5.13)$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) v^{1,2}(\vec{p}) = 0 \quad (5.14)$$

Le signe + de l'équation (5.14) provient du changement $-p_\mu$ en p_μ dans l'exponentielle associée à v^i dans l'équation (5.12).

La construction de l'espace de Fock du champ de Dirac ne peut être identique à celle du champ de K-G, car les fermions obéissent au principe de Pauli : on ne peut avoir plus d'une particule dans un état d'impulsion et de spin donné.

Comme pour le champ de K-G, on promeut les coefficients $b_{\vec{p},i}$ et $d_{\vec{p},i}^*$ en opérateurs, mais on impose à ces opérateurs de création et d'annihilation des relations d'anticommuation.

On définit l'anticommutateur de deux opérateurs A et B par la relation :

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

On impose alors les relations :

$$\{b_{\vec{p},i}, b_{\vec{k},j}^\dagger\} = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ij} I \quad (5.15)$$

$$\{b_{\vec{p},i}, b_{\vec{k},j}\} = \{b_{\vec{p},i}^\dagger, b_{\vec{k},j}^\dagger\} = 0 \quad (5.16)$$

pour les opérateurs $b_{\vec{p},i}$ et de même pour les $d_{\vec{p},i}$

$$\left\{ d_{\vec{p},i}, d_{\vec{k},j}^\dagger \right\} = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ij} I \quad (5.17)$$

$$\left\{ d_{\vec{p},i}, d_{\vec{k},j} \right\} = \left\{ d_{\vec{p},i}^\dagger, d_{\vec{k},j}^\dagger \right\} = 0 \quad (5.18)$$

Ces relations empêchent l'existence d'états à plus d'une particule d'impulsion et de spin donnés. En effet, par exemple, si l'on essaie de créer deux particules de type b dans le même état, d'après (5.16) on a :

$$b_{\vec{p},j}^\dagger b_{\vec{p},j}^\dagger |0\rangle = -b_{\vec{p},j}^\dagger b_{\vec{p},j}^\dagger |0\rangle ,$$

d'où l'on déduit que $b_{\vec{p},j}^\dagger b_{\vec{p},j}^\dagger |0\rangle = 0$ et de même pour les opérateurs $d_{\vec{p},j}^\dagger$.

On va interpréter les opérateurs $b_{\vec{p},j}^\dagger$, respectivement $d_{\vec{p},j}^\dagger$, comme des opérateurs de création d'un fermion, respectivement d'un antifermion. Avec les conventions choisies, les indices 1,2 repèrent l'état de spin (voir exercice 5.h) : la projection du spin sur l'axe z pour les particules ou antiparticules créées vaut $1/2$ pour $j = 1$ et $-1/2$ pour $j = 2$.

Remarque. La construction de l'espace de Fock \mathcal{F} est alors plus subtile qu'avec les bosons. Pour une impulsion \vec{p}_n et un spin donné j , l'espace de Fock $\mathcal{F}_{n,j}$ est à deux dimensions : les vecteurs de base peuvent être pris comme l'état vide et l'état à une particule d'impulsion \vec{p}_n et de spin j . Alors, les opérateurs représentés par les matrices :

$$\hat{\alpha}_{n,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{\alpha}_{n,j}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

possèdent les propriétés requises des opérateurs de création et d'annihilation.

Cependant, l'espace de Fock global est le produit tensoriel des espaces $\mathcal{F}_{n,j}$. Les opérateurs $\hat{\alpha}_{n,j}$ et $\hat{\alpha}_{m,k}$ commutent pour $(n,j) \neq (m,k)$, ce qui est interdit par le principe de Pauli. Pour respecter le principe de Pauli, les opérateurs de création et d'annihilation ne peuvent être les $\hat{\alpha}_{n,j}^\dagger$ et $\hat{\alpha}_{n,j}$. Leur action dans \mathcal{F} dépend de l'état d'occupation des autres états, afin que le nouvel état reste totalement antisymétrique par échange de deux particules. Nous ne développons pas cette construction qui sort du cadre de cette courte introduction à la seconde quantification.

5.6 Hamiltonien de Dirac

On vérifie facilement que la densité de lagrangien :

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (5.19)$$

conduit par le principe de moindre action à l'équation de Dirac. On peut par ailleurs remarquer que ce lagrangien n'est pas hermitique.

Cependant $\mathcal{L}^\dagger - \mathcal{L} = -i\partial_\mu (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)$ est une divergence pure et ne contribue donc pas à l'action. Ainsi, les équations du mouvement restent correctes.

La densité d'hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \Pi(\psi)\partial_0\psi + \Pi(\psi^\dagger)\partial_0\psi^\dagger - \mathcal{L} = i\psi^\dagger\partial_0\psi$$

car \mathcal{L} s'annule si ψ vérifie l'équation de Dirac !

On peut à présent calculer le hamiltonien qui vaut :

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H} = i \int d^3\vec{x} \psi^\dagger\partial_0\psi.$$

Tous calculs faits (voir l'annexe de calcul ?? page ??) on trouve :

$$H = \sum_{i=1}^2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} p_0 \left(b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} - d_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},i} \right).$$

Grâce aux relations d'anticommutation, il vient :

$$H = \sum_{i=1}^2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} p_0 \left(b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} + d_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},i} \right) - 2 \int d^3\vec{p} p_0 \delta^3(\vec{0}).$$

Remarque. Dans le premier terme de droite, il est utile de garder au dénominateur le facteur $(2\pi)^3 2p_0$ sans faire la simplification avec le facteur p_0 du numérateur : d'une part, il préserve l'invariance de Lorentz de l'élément d'intégration, d'autre part il est simplifié par l'application des relations d'anticommutation des opérateurs de création et d'annihilation si l'on applique H à un état à une particule, de façon similaire à ce que nous avons vu pour le hamiltonien de Klein-Gordon, équations (5.8) à (5.10).

Les antiparticules sont créées par les opérateurs $d_{\vec{p},i}^\dagger$. Elles ont dans ce formalisme une contribution positive à l'énergie, comme il se doit. Sans la relation d'anticommutation, il n'en serait pas ainsi. **La relation entre le spin et la statistique apparaît ainsi comme une nécessité.**

On trouve, comme pour le hamiltonien de K-G, un terme infini qui donne une énergie infinie (ici négative) à l'état vide, et que l'on ignorera. . .

Version
préliminaire

À retenir dans le chapitre 5

— équations de Lagrange généralisées :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0 ;$$

— opérateurs de création et d'annihilation :

- relations de commutation pour un champ scalaire (boson) :

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}^\dagger] = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) I$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{k}}^\dagger] = 0,$$

- relations d'anticommutation pour un fermion :

$$\{b_{\vec{p},i}, b_{\vec{k},j}^\dagger\} = (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ij} I$$

$$\{b_{\vec{p},i}, b_{\vec{k},j}\} = \{b_{\vec{p},i}^\dagger, b_{\vec{k},j}^\dagger\} = 0;$$

— champ de Dirac :

$$\psi(x^\mu) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \sum_{j=1}^2 [b_{\vec{p},j} u^j(\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + d_{\vec{p},j}^\dagger v^j(\vec{p}) e^{ip_\mu x^\mu}]$$

— équations sur les spineurs et relations d'orthogonalité :

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u^{1,2}(\vec{p}) = 0$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) v^{1,2}(\vec{p}) = 0$$

— relations d'orthogonalité sur les spineurs :

$$u^{i\dagger}(\vec{p}) u^j(\vec{p}) = v^{i\dagger}(\vec{p}) v^j(\vec{p}) = 2p_0 \delta_{ij}$$

$$u^{i\dagger}(\vec{p}) v^j(-\vec{p}) = 0 ;$$

— hamiltonien de Dirac \leftrightarrow relation spin-statistique :

$$H = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} p_0 \sum_{i=1}^2 (b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} + d_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},i}).$$

5.7 Exercices

Exercice 5.a – Principe de moindre action

Un système est décrit par le lagrangien

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

où \dot{x} désigne la dérivée dx/dt .

1. Écrire les équations de Lagrange pour ce système.
2. Quelle est la quantité conservée au cours du temps ?

Exercice 5.b – Lagrangien de Dirac

Montrer que la densité de lagrangien :

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

conduit à l'équation de Dirac par le principe de moindre action généralisé.

Exercice 5.c – Espace de Fock

En utilisant les notations du paragraphe 5.2 de la page 78 Montrer que :

$$\langle N|M \rangle \neq 0 \Rightarrow N = M$$

Indication : utiliser les propriétés de l'opérateur $a_{\vec{p}_i}^\dagger, a_{\vec{p}_i}$.

Exercice 5.d – Hamiltonien de Klein-Gordon

La densité de lagrangien de Klein-Gordon est donné par :

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2.$$

On rappelle que les solutions de l'équation de K-G sont :

$$\psi = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left(a_{\vec{p}} \exp(-ipx) + a_{\vec{p}}^\dagger \exp(ipx) \right)$$

avec $x = (t, \vec{x})$, $p = (E, \vec{p})$ et $E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

1. Exprimer la densité de hamiltonien \mathcal{H} en fonction de ψ et de ses dérivées.
2. Exprimer le hamiltonien $H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}$ en fonction des opérateurs de création et d'annihilation.
3. Calculer $H a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$.

Exercice 5.e – Hamiltonien de Dirac

La densité de hamiltonien de Dirac est donnée par : $\mathcal{H} = i\psi^\dagger \partial_0 \psi$, et les solutions de l'équation de Dirac par :

$$\psi(x^\mu) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[\sum_{i=1}^2 \left(b_{\vec{p},i} u^i(\vec{p}) \exp(-ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i}^\dagger v^i(\vec{p}) \exp(ip_\mu x^\mu) \right) \right].$$

Exprimer le hamiltonien $H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}$ en fonction des opérateurs de création et d'annihilation.

Exercice 5.f – Tenseur énergie-impulsion

Soit un lagrangien $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$. On considère la variation $\delta\mathcal{L}$ sous une translation d'espace-temps, soit par la transformation $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu$, où ε_μ est infinitésimal.

1. Montrer que :

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon_\mu \partial^\mu \mathcal{L} = \varepsilon_\nu \partial^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial^\nu \psi \right].$$

2. En déduire que le tenseur énergie-impulsion défini par :

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

vérifie : $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

3. En déduire que la quantité $p_\nu = \int d^3\vec{x} T_{0\nu}$ est conservée dans le temps.

Exercice 5.g – Théorème de Noether

On considère une densité de lagrangien $\mathcal{L}(\dots, \psi_i, \partial_\mu \psi_i, \dots)$ dépendant de N

champs ψ_i . On considère par ailleurs un groupe de transformations du système dépendant d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ (groupe de Lie) :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = g(x^\mu, \alpha) ; \psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x') G_i(\psi_j(x), \alpha).$$

On dit que le groupe est un groupe de symétrie du système si pour tout domaine d'intégration Ω , l'action reste invariante sous l'action d'un élément du groupe :

$$\int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\mu \psi_i) = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(\psi'_i, \partial'_\mu \psi'_i).$$

On choisit la paramétrisation des transformations de sorte que pour $\alpha = 0$ la transformation soit l'identité, et l'on considère une transformation infinitésimale. On écrit au premier ordre :

$$x'^\mu = x^\mu - \alpha f^\mu(x) ; \psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x') = \psi_i(x) + \alpha C_i(x).$$

Dans toute la suite, on se limitera au premier ordre en α .

1. Calculer $\partial_\nu x'^\mu$ et $\partial'_\mu x^\nu$.
2. Calculer $\partial'_\mu (\psi'_i(x'))$.
3. Montrer que le jacobien de la transformation $x \rightarrow x'$ vaut :

$$J = 1 - \alpha \partial_\mu f^\mu(x).$$

4. En déduire que la variation de l'action s'écrit :

$$S' - S = \alpha \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \Theta^\mu,$$

avec

$$\Theta^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} [C_i(x) + \partial_\nu \psi_i(x) f^\nu(x)] - f^\mu(x) \mathcal{L}.$$

5. En déduire une quantité conservée au cours du temps, en supposant que les champs s'annulent à l'infini.
6. Application 1 : opérateur quantité de mouvement.
Le lagrangien de Dirac est invariant par translation. En déduire l'opérateur quantité de mouvement.
7. Application 2 : moment cinétique.
Le lagrangien de Dirac est invariant par rotation. On considère une rotation infinitésimale d'angle θ autour de l'axe 3 (Oz).

- (a) Exprimer les transformations

$$x \rightarrow x', \psi \rightarrow \psi' \text{ et } \psi^\dagger \rightarrow \psi'^\dagger$$

au premier ordre en θ .

On rappelle que pour une transformation de Lorentz propre ortho-

chrone Λ on a $\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x)$ avec $S(\Lambda) = \exp \left[-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right]$,

$\omega_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ et $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. On posera : $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$.

- (b) En déduire l'expression des composantes
- z
- du moment cinétique total et du spin.

Exercice 5.h – Spin des solutions de l'équation de Dirac

Le calcul de l'expression de l'opérateur projection du spin sur l'axe des z est proposé à l'exercice 5.g. Le résultat est :

$$S_z = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \psi^\dagger \Sigma_3 \psi.$$

Calculer $S_z |0\rangle$ puis $S_z b_{\vec{p},i}^\dagger |0\rangle$ et $S_z d_{\vec{p},i}^\dagger |0\rangle$ pour chaque valeur de $i = 1, 2$.

Chapitre 6

Interaction électromagnétique

Ce chapitre est consacré à la construction de l'interaction électromagnétique. On a vu au paragraphe 5.3 page 80 que l'on pouvait déduire les équations du mouvement à partir du principe de moindre action. Encore faut-il disposer de la densité de lagrangien pour ce faire. Nous montrons que le lagrangien qui conduit à la force de Lorentz de l'électromagnétisme peut être obtenu par un principe d'invariance par « transformation de jauge locale ».

6.1 Potentiel électromagnétique

On rappelle l'expression des champs électrique et magnétique en fonction du quadripotentiel électromagnétique :

$$A^\mu = (V, \vec{A})^\top ; \quad \begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases} .$$

On peut facilement montrer (exercice 6.a) que le lagrangien :

$$L = -m\sqrt{1 - v^2} + q\vec{v} \cdot \vec{A} - qV$$

conduit à l'équation du mouvement d'une particule de masse m et de charge q :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt} .$$

Nous allons introduire une méthode très générale pour construire ce lagrangien. Cette méthode s'appliquera aux autres interactions du modèle standard, et même à la relativité générale.

Nous procédons en deux étapes. Nous montrons l'existence d'une quantité « charge » conservée au cours du mouvement. Puis nous établissons l'expression

de l'interaction de cette charge avec un champ A^μ qui sera identifié au quadri-potentiel électromagnétique.

6.2 Conservation de la charge électrique

Dans cette section nous allons montrer que la conservation de la charge découle du théorème de Noether pour une densité de lagrangien invariante par changement de phase de la fonction d'onde.

6.2.1 Extension de l'équation de Klein-Gordon

On se propose d'étendre le lagrangien de Klein Gordon donné par l'équation (5.7) page 83 à un champ d'opérateurs non hermitiques ψ . Pour cela, on peut écrire en toute généralité :

$$\psi = \frac{\psi_1 + i\psi_2}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \psi^\dagger = \frac{\psi_1 - i\psi_2}{\sqrt{2}}$$

où ψ_1 et ψ_2 sont deux opérateurs hermitiques indépendants. On forme le lagrangien en additionnant les lagrangiens de Klein-Gordon des deux champs :

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \psi^\dagger, \partial_\mu \psi^\dagger) = \mathcal{L}_{KG}(\psi_1, \partial_\mu \psi_1) + \mathcal{L}_{KG}(\psi_2, \partial_\mu \psi_2).$$

On obtient, en utilisant les champs ψ et ψ^\dagger comme variables indépendantes :

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \psi^\dagger, \partial_\mu \psi^\dagger) = \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi.$$

6.2.2 Invariance de jauge globale

Ce lagrangien est explicitement invariant par changement de phase :

$$\psi' = \psi e^{-iq\theta} \quad \text{et donc} \quad \psi'^\dagger = \psi^\dagger e^{+iq\theta}.$$

La quantité q est un nombre réel fixe arbitraire, qui sera identifié plus loin avec une charge électrique. La transformation s'appelle une transformation de jauge. Elle est dite globale car on suppose que θ ne dépend pas des coordonnées d'espace-temps.

Le théorème de Noether nous indique qu'il existe une quantité conservée au cours du mouvement associée à cette invariance de jauge globale. Pour la déterminer, il est plus facile de considérer un changement de phase infinitésimal $d\theta$. Les variations de ψ et ψ^\dagger et de leurs dérivées s'écrivent alors à l'ordre $d\theta$:

$$\delta\psi = -iq \psi d\theta \quad ; \quad \delta\psi^\dagger = +iq \psi^\dagger d\theta \quad ; \quad (6.1)$$

$$\delta \partial_\mu \psi = -iq (\partial_\mu \psi) d\theta \quad ; \quad \delta \partial_\mu \psi^\dagger = +iq (\partial_\mu \psi^\dagger) d\theta. \quad (6.2)$$

6.2.3 Définition de la charge

On écrit l'invariance du lagrangien sous cette transformation :

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\partial_\mu\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\dagger}\delta\psi^\dagger + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^\dagger)}\delta\partial_\mu\psi^\dagger.$$

On injecte les équations de Lagrange généralisées (équations (5.6) page 81) pour remplacer les termes $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}$ et $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\dagger}$ et l'on permute les variations δ et ∂_μ . En utilisant les relations (6.1) et (6.2) il vient :

$$\delta\mathcal{L} = -iq \, d\theta \, \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right) \psi - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^\dagger)} \right) \psi^\dagger \right] = 0.$$

L'expression de la densité de lagrangien donne :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \partial^\mu\psi^\dagger \quad \text{et} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^\dagger)} = \partial^\mu\psi.$$

Si on définit le quadrivecteur j^μ par :

$$j^\mu = -iq \left[(\partial^\mu\psi^\dagger) \psi - (\partial^\mu\psi) \psi^\dagger \right], \quad (6.3)$$

l'invariance de jauge locale du lagrangien $\delta\mathcal{L} = 0$ implique :

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

À cette densité de courant j^μ qui vérifie l'équation de continuité, correspond une charge Q qui est automatiquement conservée au cours du temps :

$$Q = \int j_0 d^3x \quad \text{et} \quad \frac{dQ}{dt} = \int \frac{\partial j_0}{\partial t} d^3x = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x = 0.$$

Montrons à présent que l'opérateur Q donne la charge de l'état sur lequel il est appliqué.

Comme ψ est solution de l'équation de Klein Gordon, on a :

$$\psi = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left[a_{\vec{p}} \exp(-ip_\mu x^\mu) + c_{\vec{p}}^\dagger \exp(ip_\mu x^\mu) \right] \quad (6.4)$$

avec toujours $p^\mu = (E, \vec{p})^\top$ et $E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. On notera que l'introduction de deux types d'opérateurs a et c indépendants est nécessaire puisque ψ n'est pas hermitique.

Par définition $j^0 = -iq [(\partial^0 \psi^\dagger) \psi - (\partial^0 \psi) \psi^\dagger]$, ainsi en utilisant l'expression (6.4) de ψ les produits d'exponentielles se simplifient et l'on trouve :

$$j^0 = q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger - c_{\vec{p}}^\dagger c_{\vec{p}} - c_{\vec{p}} c_{\vec{p}}^\dagger \right)$$

les relations de commutation pour les bosons donnent alors

$$j^0 = q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} - c_{\vec{p}}^\dagger c_{\vec{p}} \right)$$

Cette relation permet de comprendre que l'opérateur j^0 compte, à un facteur de normalisation près, le nombre de particules de type a moins le nombre de particules de type c , le tout multiplié par q .

Remarque. La normalisation absolue n'est pas fixée, elle le sera lors du calcul explicite de processus. On verra au chapitre 7 qu'il faut introduire dans cette expression un facteur $2EV$ pour un comptage exact de particules. Par contre la prise en compte de ce facteur rompt l'invariance de Lorentz de j^0 , c'est une densité de charge qui est en fait obtenue, comme il se doit.

6.2.4 Interprétation

Les particules de type a et c vérifient la même équation de K-G, elles ont la même masse. Si on interprète q comme la charge des particules a , les particules c ont la charge opposée : elles sont leurs antiparticules !

Encore faut-il justifier que la quantité q est bien reliée à la notion de charge. C'est l'objet de la section suivante.

6.3 Invariance de jauge locale

6.3.1 Transformation de jauge locale

Nous avons vu au paragraphe précédent que le changement de phase de la fonction d'onde laisse invariant le lagrangien choisi. En mécanique quantique, il est naturel qu'un tel changement de phase n'affecte pas les prédictions physiques. On parle dans ce cas d'invariance de jauge globale de la densité de lagrangien.

Il s'agit de la même propriété apparaissant en électromagnétisme où le potentiel vecteur \vec{A} et le potentiel électrique V ne sont pas définis de façon univoque : le champ magnétique et le champ électrique ne sont en effet pas modifiés par une transformation (dite de jauge) :

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi \\ V &\rightarrow V' = V - \frac{\partial \phi}{\partial t}, \end{aligned}$$

où ϕ est une fonction dérivable arbitraire. Ceci permet de choisir une jauge adaptée à la résolution d'un problème particulier. Les deux jauges usuelles sont :

- la jauge de Coulomb (physique atomique et moléculaire), pour laquelle on choisit ϕ de telle manière que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$;
- la jauge de Lorentz (théorie des champs relativiste), pour laquelle ϕ est défini de sorte que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial V / \partial t = 0$.

Nous allons à présent montrer que l'on peut obtenir l'expression des interactions électromagnétiques en imposant au lagrangien introduit au paragraphe 6.2 d'être invariant par transformation de jauge locale, c'est-à-dire lorsque le changement de phase dépend des coordonnées d'espace-temps.

On définit donc la transformation de jauge par :

$$\begin{aligned}\psi' &= \psi e^{-iq\theta(x)} ; \psi'^{\dagger} = \psi^{\dagger} e^{+iq\theta(x)} \\ \partial_{\mu}\psi' &= (\partial_{\mu}\psi) e^{-iq\theta(x)} - iq\psi (\partial_{\mu}\theta) e^{-iq\theta(x)} \\ \partial_{\mu}\psi'^{\dagger} &= (\partial_{\mu}\psi^{\dagger}) e^{+iq\theta(x)} + iq\psi^{\dagger} (\partial_{\mu}\theta) e^{+iq\theta(x)}.\end{aligned}$$

Après un calcul élémentaire, on constate alors que, sous cette transformation, la densité de lagrangien a varié de la quantité $\delta\mathcal{L}$ donnée par :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\psi', \partial_{\mu}\psi', \psi', \partial_{\mu}\psi') - \mathcal{L}(\psi, \partial_{\mu}\psi, \psi, \partial_{\mu}\psi) \\ &= q^2 \partial_{\mu}\theta \partial^{\mu}\theta \psi^{\dagger}\psi + \partial_{\mu}\theta j^{\mu} \neq 0\end{aligned}$$

où la densité de courant $j^{\mu} = (-iq) [(\partial^{\mu}\psi^{\dagger})\psi - \psi^{\dagger}(\partial^{\mu}\psi)]$, est définie comme au paragraphe 6.2.

Il n'y a donc plus invariance de jauge !

6.3.2 Dérivée covariante

Pour rétablir l'invariance de jauge, on introduit un opérateur hermitique quadri-vectoriel $A_{\mu}(x)$ dépendant des coordonnées d'espace-temps, et l'on définit la dérivée covariante :

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + iqA_{\mu}.$$

La quantité A_{μ} est la composante d'un champ vectoriel car il se transforme par construction comme un quadri-vecteur sous une transformation de Lorentz.

On modifie la densité de lagrangien en remplaçant les dérivées ∂ par des dérivées covariantes D , il vient :

$$\mathcal{L} = -(D_{\mu}\psi)^{\dagger} D^{\mu}\psi - m^2\psi^{\dagger}\psi.$$

Cette nouvelle densité de lagrangien est maintenant invariante de jauge à condition que l'on complète la transformation de jauge par le changement :

$$A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu \theta.$$

Pour alléger le texte, la démonstration de cette affirmation est reportée dans l'annexe de calcul ?? page ??.

La notion de dérivée covariante que nous venons d'introduire permet de rétablir l'invariance de jauge de la densité de lagrangien. En relativité générale, on est aussi conduit à introduire une dérivée covariante car les dérivées par rapport aux coordonnées ne prennent pas la même forme dans les différents repères : la dérivée partielle simple d'un tenseur n'est pas un tenseur, mais la dérivée covariante l'est. De façon générale, en mathématiques, la notion de dérivée covariante s'introduit en analyse vectorielle sur une variété non euclidienne.

Toutes ces dérivées possèdent deux propriétés : elles sont linéaires ($d(A+B) = dA + dB$), et elles sont définies de manière à vérifier la formule de Leibniz ($d(AB) = (dA)B + A(dB)$). Cette dernière propriété n'est pas apparente immédiatement sur la dérivée covariante que nous venons d'introduire : il faut prendre garde à définir le produit (AB) sur lequel elle s'appliquerait, et son action sur chacun des termes A et B , ce qui sort du cadre de notre propos.

Une différence importante avec la dérivée partielle simple est que, en général, le commutateur de deux opérateurs de dérivée covariante n'est pas nulle : le théorème de Schwarz ne s'applique pas. En relativité générale, c'est ainsi que s'introduit la courbure de l'espace-temps. Dans le cas qui nous occupe, la commutativité est respectée. Ce ne sera plus vrai lorsque nous définirons de nouvelles dérivées covariantes pour les interactions fortes et électrofaibles. C'est ainsi qu'apparaîtront les interactions entre les bosons médiateurs des interactions faibles W et Z , et entre les gluons, introduits au paragraphe 4.1 page 55.

6.3.3 Densité de lagrangien invariante de jauge

Reprenons l'étude de la nouvelle densité de lagrangien obtenue en remplaçant les dérivées partielles par les dérivées covariantes, et explicitons les différents termes :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{i,1} + \mathcal{L}_{i,2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_c = -\partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi \\ \mathcal{L}_m = -m^2 \psi^\dagger \psi \\ \mathcal{L}_{i,1} = -A_\mu j^\mu \\ \mathcal{L}_{i,2} = -e^2 A_\mu A^\mu \psi^\dagger \psi \end{cases}$$

On trouve la somme du lagrangien libre ($\mathcal{L}_\ell = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_m$) et de deux termes d'interaction ($\mathcal{L}_{i,1}$ et $\mathcal{L}_{i,2}$). Nous ne commenterons pas ici le deuxième terme

d'interaction, qui ne concerne pas les particules de matière. En effet, la densité de lagrangien libre dont nous sommes partis concerne les bosons. Pour les fermions, il faut partir de la densité de lagrangien de Dirac, et suivre la même démarche : seul le premier terme d'interaction apparaît (exercices 6.c et 6.d).

On constate que le terme d'interaction $\mathcal{L}_{i,1}$ est exactement celui qu'il faut pour obtenir la force de Lorentz, à condition d'identifier :

- la composante temporelle A_0 au potentiel électrique V ;
- les composante spatiales $A_{1,2,3}$ aux 3 composantes de $-\vec{A}$;
- la composante temporelle j^0 à une densité de charge ρ ;
- les composante spatiales $j^{1,2,3}$ à celles d'une densité de courant \vec{j} .

On retrouve alors en effet une densité de lagrangien identique au lagrangien donné au paragraphe 6.1 page 95, au facteur volumique près : $q \rightarrow \rho$ et $q\vec{v} \rightarrow \vec{j}$.

La transformation de jauge pour A_μ correspond exactement à celle de l'électromagnétisme, et l'on retrouve la relation entre l'impulsion \vec{p} et la quantité de mouvement $m\vec{r}$ en appliquant le principe de correspondance : on doit remplacer $-i\partial_\mu$ par $-i\partial_\mu + qA_\mu$, ce qui montre que $m\vec{r} = \vec{p} - q\vec{A}$.

L'expression de j^μ est exactement celle de la densité de probabilité rencontrée au paragraphe 2.6.3 page 26 au facteur q près. Le problème des densités de probabilité négatives disparaît : le quadrivecteur j^μ est un opérateur qui donne le bilan de densité de charge et de courant des particules et antiparticules présentes, c'est la raison de la présence de deux termes de signes opposés. Ainsi, l'antiparticule possède la même masse que la particule, et la charge opposée.

6.4 Symétries et interactions

Le lagrangien électromagnétique s'obtient donc comme le lagrangien minimal qui permet de compléter les termes du lagrangien libre afin d'obtenir l'invariance de jauge locale par changement de phase des champs d'opérateurs.

Cette démarche se généralise aux autres interactions du modèle standard : les expressions des lagrangiens pour l'interaction forte (chapitre 8) et l'interaction faible (chapitres 9 et 10) et se déduisent de l'invariance du lagrangien pour des transformations appartenant à d'autres groupes de symétrie, agissant sur des degrés de liberté internes des particules (couleur pour l'interaction forte, isospin faible et hypercharge pour l'interaction faible). La théorie des groupes et de leurs représentations est de ce fait un outil essentiel du modèle standard de la physique des particules.

Il apparaît ainsi, comme pour l'interaction électromagnétique, d'autres champs (appelés bosons vecteurs car ce sont des bosons dont le champ se transforme

comme un quadrivecteur par transformation de Lorentz) décrivant les porteurs des interactions :

- trois bosons vecteurs W^+ , W^- et Z^0 pour l'interaction faible ;
- huit gluons g pour les interactions fortes.

6.5 Photons

Puisque le champ d'opérateurs A_μ est identifié au quadripotential électromagnétique, la densité de lagrangien doit être complétée par le terme cinétique décrivant la propagation des ondes électromagnétiques, c'est-à-dire aussi des photons. Ce terme est connu en théorie des champs classiques :

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \text{ où } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Il est immédiat de vérifier que \mathcal{L}_γ est invariant par transformation de jauge locale du champ $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \phi$.

Pour être complet, il faudrait procéder à la seconde quantification de A_μ et définir les opérateurs de création et d'annihilation des photons. Ce développement sort du cadre de ce cours.

6.6 Masse des particules

À ce stade, un point très important est à noter : comme on va le voir ci-dessous, la construction des interactions telle que nous l'avons décrite ne permet pas de donner une masse aux bosons vecteurs des interactions, qui briserait l'invariance recherchée du lagrangien. Or, il se trouve que les bosons vecteurs de l'interaction faible sont massifs.

Un mécanisme de brisure spontanée de symétrie (appelé mécanisme de Brout-Englert-Higgs dans le cadre du modèle standard) doit être introduit, ainsi qu'une nouvelle particule, le boson de Higgs, pour donner une masse aux bosons vecteurs de l'interaction faible. Cerise sur le gâteau, le boson de Higgs permet aussi, de façon similaire, de donner une masse aux particules sans briser l'invariance du lagrangien. C'est l'interaction des particules élémentaires avec le champ de Higgs qui leur donne une masse, et plus l'interaction est forte, plus la masse est élevée. Réciproquement, le boson de Higgs se désintègre préférentiellement vers les particules les plus lourdes, à condition de respecter la conservation de l'énergie, et modulo l'espace de phase accessible. La masse des particules n'apparaît plus comme une propriété intrinsèque, mais plutôt comme le résultat d'une influence extérieure.

Remarque. *Il est cependant bon de noter que la masse d'un système composite n'est pas égale à la somme des masses de ses constituants : en vertu de l'équivalence masse-énergie, il faut prendre en compte l'énergie d'interaction des composants entre eux. Ainsi, comme on le verra au chapitre ??, la masse des noyaux n'est pas la somme des masses des protons et des neutrons qui le forment. De façon plus extrême, la masse des nucléons, protons et neutrons, est presque entièrement due à l'énergie potentielle d'interaction entre les quarks. La masse de la matière ordinaire est donc principalement due aux interactions fortes !*

La découverte d'une particule très lourde (125 GeV environ) qui ressemble au boson de Higgs a été annoncée en juillet 2012 au CERN. C'était la dernière des particules élémentaires du modèle standard qu'il restait à découvrir, et certes pas la moins importante !

À noter enfin que le boson de Higgs est une particule de nature très différente des autres particules élémentaires, leptons et quarks, ainsi que des bosons vecteurs : c'est un boson dit scalaire, sa fonction d'onde est invariante par transformation de Lorentz.

6.6.1 Mécanisme de Brout-Englert-Higgs

Dans ce paragraphe, nous présentons une version simplifiée du mécanisme de Brout-Englert-Higgs (BEH) qui permet de donner une masse aux bosons vecteurs de l'interaction faible ainsi qu'aux particules de matière. Nous reprenons le lagrangien invariant par changement de jauge locale construit au paragraphe 6.3 et qui décrit un boson chargé. Nous montrons qu'il ne permettrait pas d'ajouter un terme de masse au photon décrit par le quadrivecteur A_μ introduit pour assurer l'invariance de jauge. Bien sûr, le photon est de masse nulle, il n'y a donc pas ici nécessité d'introduire une telle masse. Mais, comme le problème apparaît de façon très similaire avec les bosons W^+ , W^- et Z^0 de l'interaction faible, avec cependant un formalisme plus lourd, il est utile de voir comment il peut être résolu dans un cas plus simple.

6.6.1.1 Brisure spontanée de symétrie

Avant de décrire le mécanisme BEH, nous introduisons la notion plus générale de brisure spontanée de symétrie.

Considérons le lagrangien du paragraphe 6.2 :

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \psi^\dagger, \partial_\mu \psi^\dagger) = \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi.$$

Remplaçons le terme de masse $m^2 \psi^\dagger \psi$ par un terme d'énergie potentielle :

$$V(\psi, \psi^\dagger) = \mu \psi^\dagger \psi + \lambda (\psi^\dagger \psi)^2.$$

On remarque que ce potentiel V est une fonction de la seule variable $\rho = \psi^\dagger \psi = |\psi|^2$, sa représentation graphique (voir figure 6.1) fait penser à un chapeau mexicain, c'est le surnom de ce potentiel. Le nouveau lagrangien garde son invariance

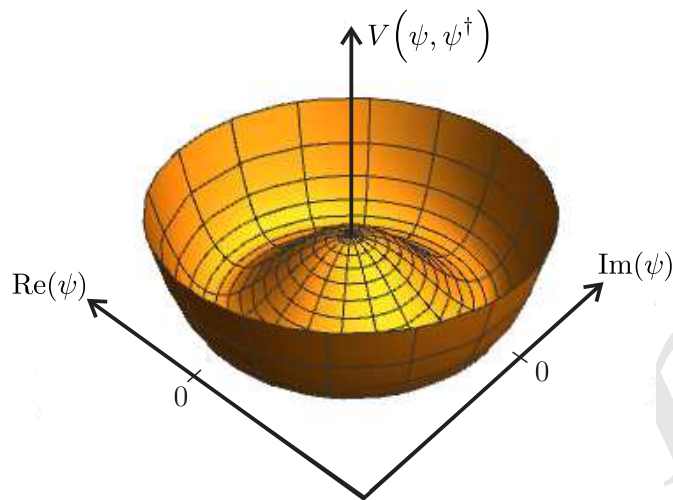


FIGURE 6.1 – Représentation du potentiel $V(\psi, \psi^\dagger)$ en fonction des parties réelles et imaginaires de ψ .

par un changement global de la phase de ψ . L'état fondamental du système décrit par \mathcal{L} est celui pour lequel V est minimal. Un tel minimum existe toujours pour $\lambda > 0$, ce que nous choisissons de prendre par hypothèse. Si μ est positif, le minimum est atteint pour $\rho = 0$. Prenons au contraire $\mu < 0$. Le minimum est alors atteint pour $\rho = |\psi|^2 = -\mu/2\lambda$. Il y a donc une infinité d'états d'énergie minimale, un pour chaque valeur de la phase de ψ . Aucun de ces états ne respecte l'invariance globale du lagrangien, puisqu'il correspond à une phase donnée de ψ . On dit qu'il y a brisure spontanée de symétrie.

Cette situation est très courante :

- un matériau ferromagnétique brise l'invariance par rotation puisque son aimantation définit une direction privilégiée, alors que les lois qui décrivent la physique du système sont invariantes par rotation ;
- une barre verticale qui supporte une masse flambe dans une direction donnée, alors que le système est initialement symétrique autour de l'axe vertical.

Interprété dans le cadre de la théorie quantique des champs, l'état fondamental du système représente par définition le vide, et l'on voit qu'avec un tel lagrangien, le vide correspond à une valeur non nulle des champs d'opérateurs ψ et ψ^\dagger .

Soit ψ_0 la valeur de ψ dans l'état fondamental. On peut poser sans perte de généralité $\psi_0 = v/\sqrt{2}$, avec $v = \sqrt{-\mu/2\lambda}$, en redéfinissant les phases de façon globale. On réécrit $\psi(x)$ sous la forme :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \xi(x) + i\chi(x)].$$

Le lagrangien devient :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \lambda v^2\chi^2 - \lambda v\chi(\chi^2 + \xi^2) - \frac{\lambda}{4}(\chi^2 + \xi^2)^2 + \text{constante}.$$

Il décrit une particule de masse nulle (χ) et une particule de masse $2\lambda v^2$ (les trois premiers termes) en interaction (les deux derniers termes).

6.6.2 Boson de Higgs

Reprenons à présent le lagrangien invariant par transformation de jauge locale dans lequel on a introduit le champ A_μ (paragraphe 6.3) :

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\psi^\dagger\partial^\mu\psi - m^2\psi^\dagger\psi - A_\mu j^\mu - q^2 A_\mu A^\mu \psi^\dagger\psi.$$

Remarque. On omet le terme cinétique pour le champ A_μ car il ne joue aucun rôle dans ce qui suit.

On rappelle que A_μ décrit le quadripotential électromagnétique, soit, en seconde quantification, le photon. On dit que c'est un boson vecteur, car, par construction, il se transforme comme un quadrivecteur par transformation de Lorentz.

Supposons que nous voulions donner une masse m au photon. Il faudrait ajouter le terme $m^2 A_\mu A^\mu / 2$ (c'est la généralisation pour un boson vecteur du terme de masse d'un boson scalaire rencontré au paragraphe 5.3.3 page 83). Ce faisant, on briserait cependant l'invariance de jauge locale du lagrangien, car dans une transformation de jauge $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta$, où θ est une fonction de x quelconque, il est clair que le terme de masse ne reste pas invariant. Il faut donc trouver une autre façon de faire.

Remplaçons comme dans le paragraphe précédent le terme de masse du champ ψ par le terme d'énergie potentielle $V(\psi, \psi^\dagger)$. Ce potentiel, qui n'est fonction que de $|\psi|$, ne brise pas l'invariance de jauge locale.

Si on exprime alors ψ en fonction de v , χ et ξ , on voit facilement que le terme $-q^2 A_\mu A^\mu \psi^\dagger\psi$ va donner un terme $-q^2 v^2 A_\mu A^\mu / 2$, en plus des nombreux termes cinétiques et d'interaction entre les champs χ , ξ et A_μ , et du terme de masse de ξ . Or, on reconnaît là un terme de masse pour la particule décrite par A_μ : la valeur non nulle du champ ψ dans le vide donne une masse au boson vecteur A_μ !

Faisons une dernière manipulation pour simplifier l'expression du lagrangien. Puisqu'il est par construction invariant par changement de jauge locale $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x)e^{-i\theta(x)}$, choisissons la fonction $\theta(x)$ de façon à ce que ψ' soit réelle :

$$\psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x)].$$

Tous les termes dépendant de χ disparaissent, et le lagrangien devient (attention à la transformation de jauge de $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\eta^2 - A'_\mu j'^\mu + \frac{1}{2}(q^2 v^2 A'_\mu A'^\mu) \\ & - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 - \lambda v\eta^3 + \frac{1}{2}q^2 A'_\mu A'^\mu (2v\eta + \eta^2). \end{aligned}$$

Outre des termes de potentiel et d'interaction, on reconnaît un boson vecteur massif A'_μ de masse qv , et une particule η de masse $\sqrt{2\lambda v^2}$, c'est l'équivalent du boson de Higgs des interactions faibles.

En théorie des champs, une particule est une excitation d'un champ d'opérateurs. Le boson de Higgs est une excitation du champ de Higgs. Les particules massives acquièrent leur masse par leur interaction avec le champ de Higgs, parce que celui-ci n'est pas nul dans le vide.

À retenir dans le chapitre 6

- notion d'invariance de jauge globale et locale ;
- construction de l'interaction électromagnétique :
 - Dérivée covariante :

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu ,$$

- Transformation de jauge du champ de jauge :

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta ;$$

- constante de couplage de l'interaction électromagnétique (constante de structure fine) : $\alpha = 1/137$;
- notion de brisure spontanée de symétrie ; principe du mécanisme BEH pour générer la masse des particules tout en préservant l'invariance de jauge du lagrangien.

6.7 Exercices

Exercice 6.a – Force de Lorentz

Montrer que la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}$$

découle du principe de moindre action appliqué au lagrangien :

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + q\vec{v} \cdot \vec{A} - qV,$$

où \vec{A} est le potentiel vecteur : $\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial\vec{A}/\partial t \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases}$.

Déterminer le hamiltonien associé.

Exercice 6.b – Invariance de jauge locale

On définit la densité de lagrangien suivante :

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \psi^\dagger, \partial_\mu \psi^\dagger) = \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi = \mathcal{L}_{KG}(\psi_1) + \mathcal{L}_{KG}(\psi_2),$$

où ψ_1 et ψ_2 sont deux opérateurs hermitiques indépendants tels que $\psi = (\psi_1 + i\psi_2)/\sqrt{2}$, et donc $\psi^\dagger = (\psi_1 - i\psi_2)/\sqrt{2}$.

Montrer que \mathcal{L} est invariant par le changement de phase $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-ie\theta(x)}$ si l'on remplace ∂_μ par $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ et si lors du changement de phase $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta$.

Exercice 6.c – Courant fermionique

1. Montrer que la densité de lagrangien $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ conduit à l'équation de Dirac par le principe de moindre action.
2. Montrer que \mathcal{L} est invariant par changement de phase global sur ψ :

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(-ie\theta)\psi.$$

3. Quel est le courant conservé ?

Exercice 6.d – Interaction électromagnétique des fermions

Montrer que la densité de lagrangien $\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$ est invariante par la transformation de jauge locale $\psi \rightarrow \psi' = \exp(-iq\theta) \psi$, où θ est une fonction des coordonnées d'espace-temps, si l'on remplace ∂_μ par $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ et si la transformation de jauge sur A_μ est donnée par $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta$.

Quelle est le terme d'interaction électromagnétique ?

Version
préliminaire

Chapitre 7

Diagrammes de Feynman

L'objectif de ce chapitre est de montrer sur quelques exemples simples comment on peut passer du formalisme introduit dans les chapitres précédents au calcul concret d'un taux de désintégration d'un système instable et d'une section efficace d'interaction entre particules.

7.1 Représentations d'un système en mécanique quantique

En mécanique quantique l'évolution d'un système peut être représentée de différentes façons suivant le point de vue que l'on adopte sur la variation temporelle des différentes quantités.

Même si ces notions sont supposées connues de nos lecteurs nous préférons faire quelques rappels, ne serait ce que pour préciser les notations.

7.1.1 Représentation de Schrödinger

Dans cette représentation, les opérateurs sont indépendants du temps et c'est la fonction d'onde qui contient l'information temporelle. On repère cette représentation par l'indice S : $\psi_S(t)$ pour la fonction d'onde et A_S ou tout simplement A pour les opérateurs.

L'évolution de la fonction d'onde est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i \frac{d\psi_S}{dt} = H_S \psi_S$$

avec $H_S = H$ hamiltonien du système. Dans cette représentation H est indépendant du temps, on peut intégrer directement cette équation pour trouver :

$$\psi_S(t) = \exp(-iHt)\psi_S(0) = U_S(t, 0)\psi_S(0),$$

où l'on a **défini** l'opérateur d'évolution temporelle qui envoie $\psi_s(0)$ sur $\psi_s(t)$:

$$U_s(t, 0) = \exp(-iHt) .$$

7.1.2 Représentation de Heisenberg

Dans cette représentation ce sont les opérateurs qui portent l'évolution temporelle à partir d'une fonction d'onde constante. On repère cette représentation à l'indice H : $\psi_H(t)$ pour la fonction d'onde et A_H pour les opérateurs.

L'évolution temporelle des opérateurs est donnée par le théorème d'Ehrenfest :

$$i \frac{dA_H}{dt} = i\partial_t A_H + [A_H, H_H]. \quad (7.1)$$

où ici encore $H_H = H$ est le hamiltonien du système, qui peut maintenant dépendre du temps.

Historiquement, c'est cette représentation qui a permis de construire le principe de correspondance entre les crochets de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ de la mécanique classique et le commutateur $i[\cdot, \cdot]$ de la mécanique quantique.

On vérifie facilement que la solution de l'équation (7.1) est :

$$A_H(t) = U_s(t, 0)^\dagger A U_s(t, 0) .$$

Pour la fonction d'onde, on pose $\psi_H = \psi_s(0) = \text{cte}$ et l'on remarque que $\psi_s(0)$ peut être obtenu en faisant agir $U_s(t, 0)^\dagger$, qui n'est autre que l'inverse de $U_s(t, 0)$, sur $\psi_s(t)$:

$$\psi_H = \psi_s(0) = U_s(t, 0)^\dagger \psi_s(t) = \exp(iHt) \psi_s(t)$$

7.1.3 Représentation en interaction

Cette représentation mélange les deux précédentes. On y repère les quantités par l'indice I : $\psi_I(t)$, A_I , etc.

On décompose le Hamiltonien H en la somme d'une partie libre H_0 indépendante du temps et d'une perturbation notée H_1 qui décrit l'interaction et qui peut dépendre du temps.

$$H(t) = H_0 + H_1(t)$$

On définit :

$$\begin{aligned} \psi_I(t) &= \exp(iH_0 t) \psi_s(t) \\ H_{1,I}(t) &= \exp(iH_0 t) H_1 \exp(-iH_0 t). \end{aligned}$$

On a alors, en utilisant l'équation d'évolution de $\psi_S(t)$ et les définitions ci-dessus (en notant que H_0 et $\exp(iH_0t)$ commutent) :

$$\begin{aligned} i\frac{d\psi_I}{dt} &= -H_0\psi_I(t) + \exp(iH_0t) (H_0 + H_1) \psi_S(t) \\ &= -H_0\psi_I(t) + \exp(iH_0t) (H_0 + H_1) \exp(-iH_0t) \psi_I(t) \\ &= -H_0\psi_I + H_0\psi_I(t) + H_{1,I}\psi_I(t) \end{aligned}$$

On obtient finalement l'équation d'évolution :

$$i\frac{d\psi_I(t)}{dt} = H_{1,I}(t)\psi_I(t) ,$$

On pourra noter que si $H_1 = 0$ alors ψ_I est constant et que l'on se retrouve en représentation de Heisenberg.

Plus généralement, pour un opérateur quelconque A , on définit sa représentation en interaction comme :

$$A_I(t) = \exp(iH_0t)A \exp(-iH_0t)$$

de sorte que

$$i\frac{dA_I(t)}{dt} = [A_I(t), H_0].$$

Dans cette représentation, l'évolution des opérateurs est ainsi déterminée par le hamiltonien libre H_0 . On notera enfin que $H_{0,I} = H_0$.

La représentation en interaction est introduite pour permettre de calculer l'évolution d'un système en considérant l'interaction comme une petite perturbation du hamiltonien libre dont on suppose connus les états propres.

C'est dans cette représentation que nous nous placerons.

7.2 Série de Dyson

On cherche un opérateur $U(t, t_0)$ tel que $\psi_I(t) = U(t, t_0)\psi_I(t_0)$. Le fait que :

$$i\frac{d\psi_I}{dt} = H_{1,I}(t)\psi_I(t) \quad (7.2)$$

entraîne que l'opérateur recherché est solution de la même équation différentielle mais cette fois-ci entre opérateurs :

$$i\frac{dU(t, t_0)}{dt} = H_{1,I}(t)U(t, t_0). \quad (7.3)$$

avec comme condition initiale $U(t_0, t_0) = I$, opérateur identité.

Remarque. En mathématiques, cet opérateur $U(t, t_0)$ est appelé résolvante de l'équation différentielle linéaire (7.2). Il envoie sa solution de l'instant t_0 à l'instant t .

Si $H_{1,1}$ ne dépend pas du temps la représentation en interaction est équivalente à celle de Schrödinger : l'opérateur d'évolution temporelle, la résolvante, est explicite et s'écrit $U(t, t_0) = \exp[-i(t - t_0)H_{1,1}]$. Dans le cas général qui nous intéresse, on ne peut que construire l'opérateur d'évolution temporelle sous une forme implicite appelée série de Dyson.

On commence par une première intégration de l'équation (7.3), il vient :

$$U(t, t_0) = I - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{1,1}(t_1) U(t_1, t_0).$$

On peut alors formellement itérer ce processus en injectant cette expression intégrale de $U(t, s)$ dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= I - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{1,1}(t_1) \left[I - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{1,1}(t_2) U(t_2, t_0) \right] \\ &= I - i \int_{t_0}^t dt_1 + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{1,1}(t_1) H_{1,1}(t_2) U(t_2, t_0). \end{aligned}$$

Si elle existe, on peut passer à la limite et écrire :

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{1,1}(t_1) H_{1,1}(t_2) \cdots H_{1,1}(t_n)$$

On souhaite écrire cette expression sous une forme plus compacte. On commence par imposer que toutes les intégrales aient les mêmes bornes t_0 et t , en insérant des fonctions de Heaviside :

$$\theta(t - s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < s \\ 1 & \text{si } t \geq s \end{cases}$$

Détaillons un exemple avec deux intégrales et deux opérateurs :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 A(t_1) A(t_2) &= \frac{1}{2} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \theta(t_1 - t_2) A(t_1) A(t_2) \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \theta(t_1 - t_2) A(t_1) A(t_2) \right] \end{aligned}$$

que l'on peut aussi écrire

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 A(t_1) A(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \left[\theta(t_1 - t_2) A(t_1) A(t_2) + \theta(t_2 - t_1) A(t_2) A(t_1) \right]$$

On définit alors le produit ordonné en temps, ou T -produit par :

$$\begin{aligned} T[A(t_1)A(t_2)] &= \begin{cases} A(t_1)A(t_2) & \text{si } t_1 > t_2 \\ A(t_2)A(t_1) & \text{si } t_2 > t_1 \end{cases} \\ &= \theta(t_1 - t_2)A(t_1)A(t_2) + \theta(t_2 - t_1)A(t_2)A(t_1). \end{aligned}$$

On peut donc simplement écrire :

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{1,I}(t_1)H_{1,I}(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T[H_{1,I}(t_1)H_{1,I}(t_2)].$$

On peut alors se convaincre facilement que (attention au $n!$) :

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T[H_{1,I}(t_1)H_{1,I}(t_2) \cdots H_{1,I}(t_n)].$$

On a ainsi obtenu formellement un développement en série de l'opérateur $U(t, t_0)$ (série de Dyson), dont la convergence dépend des propriétés du hamiltonien d'interaction $H_{1,I}$.

7.3 Matrice S , matrice M

On suppose que :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} H_{1,I}(t) = 0$$

et l'on définit la « matrice » S par :

$$S = \lim_{\substack{s \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} U(s, t).$$

On notera que S commute avec H_0 , l'énergie est donc conservée au cours du processus de diffusion (démonstration au paragraphe 7.3.1). Il en est de même pour l'impulsion.

L'élément de matrice $\langle b | S | a \rangle$ donne l'amplitude de probabilité de transition d'un état initial a vers un état final b .

Pour extraire la partie intéressante de la matrice S , i.e. celle qui décrit l'interaction, on pose : $S = I - iT$ et on explicite la conservation de l'énergie-impulsion en définissant l'élément de matrice de diffusion M_{ba} par :

$$\langle b | iT | a \rangle := i(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) M_{ba}.$$

En introduisant la densité de hamiltonien $\mathcal{H}_{1,I}$ par la relation :

$$H_{1,I} = \int d^3x \mathcal{H}_{1,I},$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n T [\mathcal{H}_{1,I}(t_1) \dots \mathcal{H}_{1,I}(t_n)] \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{S}^{[n]} . \end{aligned}$$

Le terme du premier ordre s'écrit :

$$S_{ba}^{[1]} = \langle b | S^{[1]} | a \rangle = -i \int d^4x_1 \langle b | H_{1,I}(x_1) | a \rangle ,$$

le deuxième ordre :

$$S_{ba}^{[2]} = \langle b | S^{[2]} | a \rangle = (-i)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \theta(t_1 - t_2) \langle b | H_{1,I}(x_1) H_{1,I}(x_2) | a \rangle ,$$

et ainsi de suite.

7.3.1 Commutation de \mathbf{S} avec H_0

Par définition, l'opérateur d'évolution temporelle $U(t, t')$ vérifie :

$$\psi_I(t) = U(t, t_0) \psi_I(t_0) ,$$

On explicite $\psi_I = \exp[iH_0 t] \psi(t)$, et on se livre à quelques réorganisations :

$$\begin{aligned} \exp[iH_0 t] \psi(t) &= U(t, t') \exp[iH_0 t'] \psi(t') \\ \Leftrightarrow \psi(t) &= \exp[-iH_0 t] U(t, t') \exp[iH_0 t'] \psi(t') \\ \Leftrightarrow \exp[-iH_0 t] \psi(t) &= \exp[-iH_0 t] U(t, t') \exp[iH_0 t'] \exp[-iH_0 t'] \psi(t') . \end{aligned}$$

Cette relation est valable pour tout ψ , donc :

$$U(t, t') = \exp[iH_0 t] \exp[-iH_0 t'] \exp[iH_0 t'] \exp[-iH_0 t] .$$

En revenant à la définition de la matrice \mathbf{S} on a donc :

$$\mathbf{S} = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} [\exp(iH_0 t) \exp(-iH(t-t')) \exp(-iH_0 t')] .$$

En renommant les variables $t = t_1 - \tau$ et $t' = t_2 - \tau$ dans l'expression précédente, soit une translation de τ dans le temps qui ne change pas la limite aux deux infinis, on voit alors que :

$$\exp(iH_0 \tau) \mathbf{S} \exp(-iH_0 \tau) = \mathbf{S} .$$

En prenant τ infiniment petit il vient $[H_0, \mathbf{S}] = 0$, CQFD.

7.4 Taux de désintégration

Nous allons exprimer le taux de désintégration d'une particule vers un état final donné en fonction des éléments de la matrice M .

Partons de l'état initial supposé à une particule d'impulsion $\vec{k} : |\vec{k}\rangle := a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle$ à un facteur de normalisation N près, déterminé ci-dessous.

La probabilité de transition vers l'état $|\vec{p}, \vec{q}, \dots\rangle$, orthogonal à $|\vec{k}\rangle$, à l'instant t est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left| \langle \vec{p}, \vec{q}, \dots | \mathcal{S} | \vec{k} \rangle \right|^2 = \left| \langle \vec{p}, \vec{q}, \dots | i\mathcal{T} | \vec{k} \rangle \right|^2 \\ &= (2\pi)^8 \delta^4(p + q + \dots - k) \delta^4(0) |M_{ba}|^2 \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k) \mathcal{VT} |M_{ba}|^2. \end{aligned}$$

où on a utilisé les propriétés :

$$\delta(k)^2 = \delta(k) \delta(0) \text{ et } \delta(0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx = \frac{L}{2\pi}.$$

avec $\mathcal{V} = L^3$. La quantité \mathcal{VT} est le produit du volume par l'intervalle de temps d'intégration.

Compte tenu de la normalisation et des relations de (anti)commutation des opérateurs de création et d'annihilation :

$$\langle 0 | a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\vec{0}) = 2k^0 \mathcal{V}.$$

À l'instant $t = 0$, $\mathcal{S} = I$, et donc $|\langle \vec{k} | \mathcal{S} | \vec{k} \rangle| = 1$. On voit donc qu'il faut introduire un facteur de normalisation $N = \sqrt{1/2E\mathcal{V}}$ par particule.

De plus, les impulsions dans l'état final ne sont pas précisément connues, on s'intéresse à la probabilité de transition vers un élément d'espace des phases $\mathcal{V}d^3\vec{p} \mathcal{V}d^3\vec{q} \dots$ et dans un tel élément il y a :

$$\frac{\mathcal{V}d^3\vec{p} \mathcal{V}d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \dots \text{ états } (\hbar = 1).$$

En effet, dans une boîte cubique d'arête L , l'impulsion dans chaque direction est quantifiée et vaut :

$$p_{x,y,z} = \frac{(2\pi) \hbar}{L} n_{x,y,z}, \quad \text{avec } n_{x,y,z} \in \mathbb{N}.$$

Dans l'intervalle $dp_x dp_y dp_z$ il y a donc un nombre d'états égal à :

$$dn = dn_x dn_y dn_z = \frac{L^3 dp_x dp_y dp_z}{(2\pi)^3 \hbar^3} = \frac{\mathcal{V} d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3}.$$

On obtient finalement :

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{2k^0} (2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k) T \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2q_0} \dots |M_{ba}|^2.$$

Le taux de transition est finalement donnée par $d\mathcal{P}/\mathcal{T}$:

$$d\Gamma = \frac{1}{2k^0} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k) \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2q_0} \dots}_{\text{élément d'espace de phase invariant de Lorentz}} |M_{ba}|^2.$$

7.4.1 Désintégration à deux corps

Nous rencontrerons plusieurs fois dans la suite du cours le cas particulier de l'état final à deux corps. Nous détaillons ici le calcul de l'espace de phase dans ce cas simple.

On suppose que l'état initial est une particule de masse m et d'impulsion \vec{k} , et que l'état final est constitué des particules 1 et 2 de masses m_1 et m_2 et d'impulsions \vec{p} et \vec{q} .

Le taux de transition sur tout l'espace des phases est donné par :

$$\Gamma = \frac{1}{2k^0} \iint (2\pi)^4 \delta^4(p + q - k) \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2q_0} |M_{ba}|^2.$$

La présence du terme $\delta^4(p + q - k)$ sous l'intégrale a pour conséquence qu'il n'y a en fait que deux variables indépendantes, par exemple la direction (θ, φ) du vecteur \vec{p} . On peut intégrer sur \vec{q} , il vient :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2k^0} \frac{1}{(4\pi)^2} \int \delta(p_0 + q_0 - k_0) \frac{d^3 \vec{p}}{p_0 q_0} |M_{ba}|^2 \\ &= \frac{1}{2k^0} \frac{1}{(4\pi)^2} \iint \delta(p_0 + q_0 - k_0) \frac{|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega}{p_0 q_0} |M_{ba}|^2. \end{aligned}$$

où l'on a introduit l'élément d'angle solide $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ autour de \vec{p} . On intègre à présent sur $|\vec{p}|$:

$$\Gamma = \frac{1}{2k^0} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}|^2 \int |M_{ba}|^2 d\Omega}{\left| \frac{d}{d|\vec{p}|} (p_0 + q_0 - k_0) \right|}.$$

Or :

$$p_0^2 = |\vec{p}|^2 + m^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_0}{d|\vec{p}|} = \frac{|\vec{p}|}{p_0}$$

$$q_0 = \sqrt{(\vec{k} - \vec{p})^2 + m_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq_0}{d|\vec{p}|} = \frac{-(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \frac{d\vec{p}}{d|\vec{p}|}}{q_0} = \frac{-(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{p}}{q_0 |\vec{p}|}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2k^0} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}|^2 \int |M_{ba}|^2 d\Omega}{p_0 q_0 \left(\frac{|\vec{p}|}{p_0} + \frac{-(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{p}}{q_0 |\vec{p}|} \right)} \\ &= \frac{1}{2k^0} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}|^3 \int |M_{ba}|^2 d\Omega}{q_0 |\vec{p}|^2 - p_0 \vec{k} \cdot \vec{p} + p_0 |\vec{p}|^2} \\ &= \frac{1}{2k^0} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}|^3 \int |M_{ba}|^2 d\Omega}{k_0 |\vec{p}|^2 - p_0 \vec{k} \cdot \vec{p}}. \end{aligned}$$

Pour simplifier encore l'expression, on se place dans le centre de masse de la particule initiale :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}| \int |M_{ba}|^2 d\Omega}{m^2}.$$

Enfin, en posant :

$$\int |M_{ba}|^2 d\Omega = 4\pi \overline{|M_{ba}|^2},$$

on obtient :

$$\Gamma = \frac{|\vec{p}|}{8\pi m^2} \overline{|M_{ba}|^2}.$$

Dans le cas particulier où la particule 2 est de masse nulle, par exemple dans la désintégration $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$, on obtient :

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi m_\mu} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right) \overline{|M_{ba}|^2}.$$

Remarque. On néglige dans la plupart des calculs la masse des neutrinos dont on ne connaît qu'une limite supérieure de l'ordre de quelques eV.

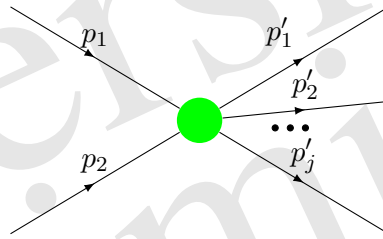
7.5 Section efficace

La formule du taux de transition Γ obtenue dans le paragraphe précédent se généralise sans difficulté lorsqu'il y a plusieurs particules dans l'état initial, il faut simplement prendre en compte les facteurs de normalisation additionnels. On suppose qu'il y a n_i particules dans l'état initial et n_f dans l'état final. Le taux de réactions s'écrit :

$$d\Gamma = \mathcal{V} \times$$

$$\underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p'_1 - p'_2 - \dots)}_{\text{élément d'espace de phase invariant de Lorentz}} \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3\vec{p}'_k}{(2\pi)^3 2E'_k} \times \prod_{k=1}^{n_i} \frac{1}{2E_k \mathcal{V}} |M_{ba}|^2.$$

Nous allons appliquer cette formule pour calculer la section efficace différentielle de la production de n_f particules par l'interaction de deux particules initiales schématisée ci-dessous :



Supposons que N_1 particules 1 de vitesse v_1 soient incidentes sur une densité N_2/\mathcal{V} particules 2 au repos. D'après la définition de la section efficace donnée au paragraphe 4.5 page 66, le nombre d'interactions N_{int} est donné par :

$$N_{\text{int}} = N_1 d\sigma \frac{N_2}{\mathcal{V}} dx.$$

où $d\sigma$ est la section efficace différentielle de l'interaction pour l'élément d'espace des phases considéré et dx la distance parcourue par les particules incidentes. Le taux d'interactions est alors :

$$d\Gamma = \frac{dN_{\text{int}}}{dt} = d\sigma \frac{N_1 N_2}{\mathcal{V}} v_1.$$

Il vient :

$$d\sigma = \frac{\mathcal{V}}{N_1 N_2 v_1} d\Gamma.$$

Par identification avec la formule générale donnant $d\Gamma$ page 118, en prenant $N_1 = N_2 = 1$ et $E_2 = m_2$, on obtient :

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 \dots) \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3 \vec{p}'_k}{(2\pi)^3 2E'_k} \frac{1}{4m_2 E_1 v_1} |M_{ba}|^2.$$

Si on se place dans un référentiel quelconque ($E_1 v_1 = |\vec{p}_1|$) :

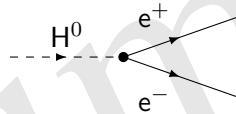
$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 \dots) \times \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3 \vec{p}'_k}{(2\pi)^3 2E'_k} \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}} |M_{ba}|^2.$$

7.6 Exemple de la désintégration du boson de Higgs

7.6.1 Taux de désintégration

Comme on l'a vu au paragraphe 6.6 page 102, c'est l'interaction des particules élémentaires avec le boson de Higgs qui est à l'origine de leur masse, du fait de la valeur non nulle dans le vide du champ de Higgs. Une particule est d'autant plus massive que sa constante de couplage avec le boson de Higgs est grande. De plus, à cause de ce terme d'interaction, le boson de Higgs peut se désintégrer en une paire fermion-antifermion.

Nous nous proposons d'évaluer le taux de la désintégration $H^0 \rightarrow e^- + e^+$:



Pour alléger le texte, on confondra dans le vocabulaire lagrangien et densité de lagrangien, de même pour le hamiltonien.

Le lagrangien permettant de décrire ce processus est ainsi la somme de 3 termes : les lagrangiens du champ de Dirac ψ décrivant le positron et l'électron sans interaction, le lagrangien de Klein-Gordon décrivant la propagation du champ scalaire Φ associé au Higgs, et enfin le lagrangien d'interaction donné par :

$$\mathcal{L}_{1,I} = f\psi^\dagger \gamma_0 \psi \Phi,$$

où f est la constante, dite de couplage, mesurant l'intensité de cette interaction, proportionnelle à la masse du fermion.

Le hamiltonien d'interaction correspondant est :

$$\mathcal{H}_{1,I} = -f\psi^\dagger \gamma_0 \psi \Phi = -f\bar{\psi}\psi \Phi.$$

Remarque. : On notera de façon générale que si un lagrangien \mathcal{L} est de la forme :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$$

et si \mathcal{L}_1 ne contient pas de dérivée, alors :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \text{ avec } \mathcal{H}_1 = -\mathcal{L}_1.$$

Soit $|\alpha\rangle = a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle$ l'état initial et $|\beta\rangle = b_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{q},j}^\dagger |0\rangle$ l'état final.

Les indices i et j valent 1 ou 2 et désignent les états de spin des fermions.

Nous nous sommes placés dans la représentation en interaction car :

- l'état du système avant et après l'interaction est constant ;
- le hamiltonien d'interaction est décrit par des opérateurs qui obéissent aux équations d'évolution libre.

On écrit la matrice \mathcal{S} au premier ordre :

$$\mathcal{S} = I + i \int d^4x f \psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \langle \beta | \mathcal{S} | \alpha \rangle &= \langle 0 | d_{\vec{q},j} b_{\vec{p},i} \left\{ i \int d^4x f \psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi \right\} a_{\vec{k}}^\dagger | 0 \rangle \\ &= i f \int d^4x \langle 0 | d_{\vec{q},j} b_{\vec{p},i} \psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi a_{\vec{k}}^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned}$$

On explicite l'expression des différents champs :

$$\begin{aligned} \langle \beta | \mathcal{S} | \alpha \rangle &= i f \int d^4x \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 2k_3^0} \\ &\quad \left\{ \sum_{n,m=1,2} \langle 0 | d_{\vec{q},j} b_{\vec{p},i} \times \right. \\ &\quad \left[b_{\vec{k}_1,n}^\dagger u_{\vec{k}_1,n}^\dagger \gamma^0 \exp[ik_1x] + d_{\vec{k}_1,n}^\dagger v_{\vec{k}_1,n}^\dagger \gamma^0 \exp[-ik_1x] \right] \times \\ &\quad \left[b_{\vec{k}_2,m}^\dagger u_{\vec{k}_2,m}^\dagger \exp[-ik_2x] + d_{\vec{k}_2,m}^\dagger v_{\vec{k}_2,m}^\dagger \exp[ik_2x] \right] \times \\ &\quad \left[a_{\vec{k}_3}^\dagger \exp[-ik_3x] + a_{\vec{k}_3}^\dagger \exp[ik_3x] \right] \times \\ &\quad \left. a_{\vec{k}}^\dagger | 0 \rangle \right\}. \end{aligned}$$

On utilise la commutation des opérateurs de champs différents et les propriétés de l'état vide pour garder un seul terme :

$$\langle \beta | \mathcal{S} | \alpha \rangle = if \int d^4x \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 2k_3^0} \\ \times \left\{ \sum_{n,m=1,2} e^{i(k_1+k_2-k_3)x} \langle 0 | d_{\vec{q},j}^- b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{k}_1,n}^\dagger u_{\vec{k}_1,n}^\dagger \gamma^0 d_{\vec{k}_2,m}^\dagger v_{\vec{k}_2,m}^- a_{\vec{k}_3}^- a_{\vec{k}}^\dagger | 0 \rangle \right\}.$$

On utilise les relations de commutation des opérateurs avec leurs adjoints :

$$\langle \beta | \mathcal{S} | \alpha \rangle = if \int d^4x \int d^3k_1 \int d^3k_2 \int d^3k_3 \exp [i(k_1 + k_2 - k_3)x] \times \\ \langle 0 | \delta^3(\vec{q} - \vec{k}_2) \delta^3(\vec{p} - \vec{k}_1) u_{\vec{k}_1,i}^\dagger \gamma^0 v_{\vec{k}_2,j}^\dagger \delta^3(\vec{k} - \vec{k}_3) | 0 \rangle.$$

L'intégrale sur x fait apparaître une distribution de Dirac :

$$\langle \beta | \mathcal{S} | \alpha \rangle = if(2\pi)^4 \delta^4(p + q - k) u_i^\dagger \gamma^0 v_j.$$

On obtient donc finalement :

$$M_{\beta\alpha} = -f u_i^\dagger \gamma^0 v_j. \quad (7.4)$$

Le taux de désintégration est alors :

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p + q - k)}{2k^0} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} f^2 u_{\vec{p},i}^\dagger \gamma^0 v_{\vec{q},j} v_{\vec{q},j}^\dagger \gamma^0 u_{\vec{p},i}.$$

On suppose qu'on ne mesure pas le spin des particules sortantes. Pour obtenir le taux de désintégration total, il faut alors sommer sur toutes les configurations possibles ($i, j = 1, 2$). On se met dans le repère du boson de Higgs : $k_0 = m_{\text{H}^0}$. On obtient :

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p + q - k)}{2m_{\text{H}^0}} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} f^2 \sum_{i,j=1,2} u_{\vec{p},i}^\dagger \gamma^0 v_{\vec{p},j} v_{\vec{p},j}^\dagger \gamma^0 u_{\vec{p},i}$$

Pour alléger l'écriture, on généralise la notation introduite pour la fonction d'onde de Dirac à quatre composantes (voir équation (3.12) page 39) : à tout opérateur compatible avec γ^0 on définit : $\overline{A} = A^\dagger \gamma^0$. Puis, en écrivant explicitement les composantes, on démontre la relation (exercice 7.a) :

$$u_{\vec{p},i}^\dagger \gamma^0 v_{\vec{q},j} v_{\vec{q},j}^\dagger \gamma^0 u_{\vec{p},i} = \overline{u_{\vec{p},i}} v_{\vec{q},j} \overline{v_{\vec{q},j}} u_{\vec{p},i} = \text{Tr} (v_{\vec{q},j} \overline{v_{\vec{q},j}} u_{\vec{p},i} \overline{u_{\vec{p},i}}).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1,2} u_{\vec{p},i}^\dagger \gamma^0 v_{\vec{p},j} v_{\vec{p},j}^\dagger \gamma^0 u_{\vec{p},i} &= \sum_{i,j=1,2} \text{Tr} (v_{\vec{q},j} \overline{v_{\vec{q},j}} u_{\vec{p},i} \overline{u_{\vec{p},i}}) \\
 &= \text{Tr} \left(\sum_{j=1,2} v_{\vec{q},j} \overline{v_{\vec{q},j}} \sum_{i=1,2} u_{\vec{p},i} \overline{u_{\vec{p},i}} \right) \\
 &= \text{Tr} [(q - m) (\not{p} + m)] \\
 &= \text{Tr} (p_\mu q_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - m \not{p} + m \not{q} - m^2 I_4) \\
 &= 4p_\mu q^\mu - 4m^2,
 \end{aligned}$$

où l'on a d'une part utilisé les relations de fermeture (exercice 7,b) :

$$\sum_{i=1,2} u_{\vec{p},i} \overline{u_{\vec{p},i}} = (\not{p} + m) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1,2} v_{\vec{q},j} \overline{v_{\vec{q},j}} = (q - m). \quad (7.5)$$

et d'autre part employé la notation du « slash » de Feynmann :

$$\text{Pour tout opérateur } O \text{ compatible avec } \gamma^\mu : \not{O} = O_\mu \gamma^\mu \quad (7.6)$$

On obtient :

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_{H^0}} (2\pi)^4 \underbrace{\delta^4(p + q - k)}_{\text{conservation de l'énergie impulsion}} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} f^2 (4p_\mu q^\mu - 4m^2).$$

À présent, on utilise la relation :

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$$

où les x_i sont les racines réelles de $g(x) = 0$ pour intégrer sur tout l'espace des

phases et obtenir ainsi le taux désintégration du Higgs en électron-positron :

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \int \frac{(2\pi)^4}{2m_{H^0}} \delta(2p^0 - m_{H^0}) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^6 (2p^0)^2} \left(4(p^0)^2 + 4|\vec{p}|^2 - 4m^2\right) f^2 \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{f^2}{2m_{H^0}^3} (2m_{H^0}^2 - 8m^2) \int \delta(2p^0 - m_{H^0}) |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{f^2}{2m_{H^0}^3} \frac{(2m_{H^0}^2 - 8m^2) m_{H^0}}{4\sqrt{m_{H^0}^2/4 - m^2}} \int \delta\left(\sqrt{m_{H^0}^2/4 - m^2} - p\right) |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{f^2}{2m_{H^0}^3} (2m_{H^0}^2 - 8m^2) \frac{m_{H^0}}{4} (m_{H^0}^2/4 - m^2)^{1/2} 4\pi \\
 &= \frac{1}{8\pi} f^2 m_{H^0} \left(1 - 4\frac{m^2}{m_{H^0}^2}\right)^{3/2} \quad \text{OUF!}
 \end{aligned}$$

Application numérique :

- le mécanisme de Brout-Englert-Higgs donne $f = m/v$ où m est la masse de l'électron et v la valeur moyenne du champ de Higgs dans le vide, soit 246 GeV ;
- on rétablit les unités SI, pour obtenir :

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi\hbar} \frac{m^2 c^4 m_{H^0} c^2}{v^2} \left(1 - 4\frac{m^2}{m_{H^0}^2}\right)^{3/2} = 3,26 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}.$$

7.6.1.1 Rapport d'embranchement

Pour un système instable, on définit son rapport d'embranchement vers un mode (ou canal) de désintégration particulier comme la probabilité qu'il emprunte ce mode parmi tous les autres possibles. La somme des rapports d'embranchement de tous les modes de désintégration possibles est donc égale à 1.

Soit une collection de N particules instables a pouvant se désintégrer vers l'état b . On désigne par $N(a \rightarrow b)$ le nombre de particules a se désintégrant en b , et $N(a \rightarrow \cdot) = N$ le nombre total de désintégrations de particules a . On note $BR(a \rightarrow b)$ le rapport d'embranchement de a vers b :

$$BR(a \rightarrow b) = \frac{N(a \rightarrow b)}{N(a \rightarrow \cdot)}.$$

On a :

$$\frac{dN(a \rightarrow b)}{dt} = N(a) \Gamma(a \rightarrow b) \quad \text{et} \quad dN(a \rightarrow \cdot) = N(a) \frac{dt}{\tau}$$

Connaissant la durée de vie $\tau(a)$ de la particule a , on a donc

$$BR(a \rightarrow b) = \Gamma(a \rightarrow b) \times \tau(a).$$

Dans le cas du boson de Higgs, sa durée de vie est estimée théoriquement à la valeur $\tau = 1,56 \times 10^{-22}$ s, et donc le rapport d'embranchement du Higgs en paire électron-positron vaut :

$$BR(H^0 \rightarrow e^+ + e^-) = \tau\Gamma = 5,1 \times 10^{-9}.$$

En changeant la valeur de la masse dans la formule donnant le taux de désintégration, on peut en déduire le rapport d'embranchement vers d'autres canaux (table 7.1). On remarque que la prédiction pour le canal $\tau^-\tau^+$ est en très bon accord avec la mesure, bien que notre calcul ait été limité au premier ordre des perturbations. Pour le canal $b\bar{b}$, l'estimation est très mauvaise. On en comprendra la raison au chapitre 8.

Canal	Estimation	Mesure (2020)
e^+e^-	$5,1 \times 10^{-9}$	-
$\mu^+\mu^-$	$2,2 \times 10^{-4}$	-
$\tau^+\tau^-$	$6,1 \times 10^{-2}$	$6,3 \times 10^{-2}$ (précision d'environ 20 %)
$b\bar{b}$	31×10^{-2}	58×10^{-2} (précision d'environ 20 %)

TABLE 7.1 – Rapport d'embranchement du Higgs vers divers canaux de désintégration. L'estimation est le résultat du calcul que nous avons effectué. Les mesures sont effectuées au LHC (« Large Hadron Collider ») au CERN à Genève. Le nombre de Higgs produits et la difficulté de la détection n'ont pas encore permis la mesure des deux premiers canaux.

7.6.1.2 Propagateur

On introduit dans ce paragraphe la notion de propagateur que nous utiliserons dans la description des diagrammes de Feynman au paragraphe 7.7 page 125.

Au deuxième ordre des perturbations, la matrice S s'écrit :

$$S = I + i \int d^4x f \psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi + (-i)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \theta(t_1 - t_2) f^2 \left[\psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi \right] (x_1) \left[\psi^\dagger \gamma^0 \psi \Phi \right] (x_2).$$

Le terme du deuxième ordre permet d'avoir un élément de matrice non nul entre un état initial e^+e^- et un état final e^+e^- , ce que ne permet pas le terme du premier

ordre.

Écrivons ces états dans le centre de masse :

$$|\alpha\rangle = b_{\vec{p},i}^\dagger d_{-\vec{p},j}^\dagger |0\rangle \text{ et } |\beta\rangle = b_{\vec{q},i}^\dagger d_{-\vec{q},j}^\dagger |0\rangle .$$

Le comptage des opérateurs de création et d'annihilation pour le champ Φ montre que $\langle\beta| \mathbf{S}^{[1]} |\alpha\rangle$ est nul. Le calcul de $\langle\beta| \mathbf{S}^{[2]} |\alpha\rangle$ fait par contre apparaitre un terme :

$$\int d^4x_1 d^4x_2 \theta(t_1 - t_2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'^0} \times \\ \langle 0 | \left[a_{\vec{k}} e^{-ikx_1} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx_1} \right] \left[a_{\vec{k}'} e^{-ik'x_2} + a_{\vec{k}'}^\dagger e^{ik'x_2} \right] | 0 \rangle .$$

Il vaut :

$$\int d^4x_1 d^4x_2 \theta(t_1 - t_2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'^0} \langle 0 | a_{\vec{k}} e^{-ikx_1} a_{\vec{k}'}^\dagger e^{-ik'x_2} | 0 \rangle .$$

En insérant l'identité :

$$I = \sum_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \langle 0| a_{\vec{p}} ,$$

et en utilisant les relations de commutation ce terme devient :

$$\int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} \theta(t_1 - t_2) \exp[-ip(x_2 - x_1)]}_{D(x_2 - x_1)} .$$

La quantité $D(x_2 - x_1)$ s'appelle un propagateur, ici le propagateur du champ Φ , qui représente la création d'un Higgs en x_2 et son absorption en x_1 . En prenant en compte le développement de \mathbf{S} avec le produit ordonné en temps et le facteur 1/2 correspondant, le propagateur est défini par :

$$D_F(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{1}{2} \{ \theta(t) \exp[-ip_\mu x^\mu] + \theta(-t) \exp[ip_\mu x^\mu] \} .$$

7.7 Diagrammes de Feynman

7.7.1 Concept

Malgré la simplicité du processus étudié au paragraphe précédent, les calculs peuvent sembler lourds et complexes, mais ils présentent certaines régularités essentielles d'un processus à l'autre.

Un examen approfondi de la structure de ces calculs a conduit Richard Feynman à élaborer à la fin des années 1940 une représentation graphique permettant de calculer les éléments de la matrice de diffusion par une représentation sous forme de diagrammes codifiés, les « diagrammes de Feynman », des termes de la série de perturbation.

Un diagramme de Feynman est constitué :

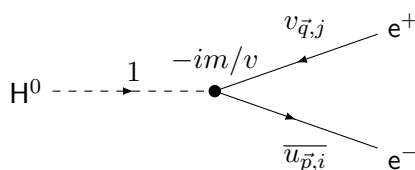
- de lignes externes, représentant les particules entrantes et sortantes ;
- de vertex, croisement de plusieurs lignes externes ou internes, représentant les termes d'interaction. La quadri-impulsion est conservée à chaque vertex ;
- de lignes internes, représentant les propagateurs d'une particule (virtuelle) entre deux vertex ;
- si on choisit d'orienter le temps de la gauche vers la droite, les lignes sont orientées et représentent un flux de charge (leptonique, baryonique, ...)

La forme des lignes dépend conventionnellement du type de la particule représentée. Au graphique sont associées un certain nombre de règles, dites de Feynman, permettant d'écrire le terme représenté par le diagramme par simple lecture. Quelques-unes de ces règles sont données dans la table 7.2. Nous donnons quelques exemples de leur utilisation dans les paragraphes suivants.

Lignes externes		
boson scalaire entrant	1	-----
boson scalaire sortant	1	-----
particule de spin 1/2 entrant	u	----->
particule de spin 1/2 sortant	\bar{u}	----->
antiparticule de spin 1/2 entrant	\bar{v}	-----<
antiparticule de spin 1/2 sortant	v	-----<
photon entrant	ϵ_μ (polarisation)	~~~~~~
photon sortant	ϵ_μ^* (polarisation)	~~~~~~
Propagateurs		
spin 0	$i / (p^2 - m^2 + i\epsilon)$	-----
spin 1/2	$i (\not{p} + m) / (p^2 - m^2 + i\epsilon)$	----->
spin 1	$-i (\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m^2) / (p^2 - m^2 + i\epsilon)$	~~~~~~
photon	$-i\eta^{\mu\nu} / (p^2 + i\epsilon)$	~~~~~~
Vertex		
fermion-antifermion-photon	$-iq\gamma^\mu$	
fermion-antifermion-boson scalaire	$-im/v$	

TABLE 7.2 – Quelques règles de Feynman; m, q, p sont la masse, la charge et la quadri-impulsion de la particule considérée, v est la valeur moyenne dans le vide du champ de Higgs; ϵ est une quantité positive infiniment petite permettant le calcul du propagateur (exercice 7.c).

7.7.2 Exemple 1 : $H^0 \rightarrow e^+ + e^-$



L'expression de iM est obtenue en parcourant les différentes lignes dans le sens inverse des flèches et en rassemblant dans cet ordre les facteurs correspondant

ainsi que les facteurs des vertex rencontrés. Avec ce diagramme on obtient :

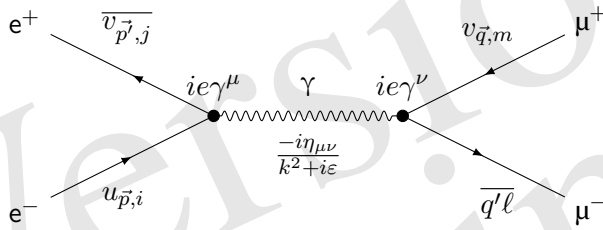
$$iM = -i \frac{m}{v} \overline{u_{\vec{p},i}} v_{\vec{q},j}$$

ce qui permet de retrouver directement le résultat (7.4) sans faire aucun calcul, où on identifie f à m/v : la masse des fermions est proportionnelle à leur couplage avec le boson de Higgs (voir paragraphe 6.6 page 102).

7.7.3 Exemple 2 : $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$

7.7.3.1 Élément de matrice de diffusion

On considère ici uniquement l'interaction électromagnétique, dominante pour une énergie dans le centre de masse très inférieure à 100 GeV. L'annihilation de la paire $e^+ e^-$ procède par création d'un photon, comme on l'a vu au chapitre 6, qui se matérialise ensuite en paire $\mu^+ \mu^-$. Le diagramme de Feynman le plus simple qui décrit ce processus se construit directement à l'aide du tableau 7.2 :



La lecture du diagramme donne directement :

$$iM = \overline{u_{\vec{q},\ell}} i e \gamma^\nu v_{\vec{q},m} \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} v_{\vec{p}',j} i e \gamma^\mu u_{\vec{p},i} ,$$

formule à partir de laquelle on peut calculer la section efficace d'interaction : c'est l'objet de la prochaine section.

7.7.3.2 Section efficace d'interaction

On suppose que l'état initial n'est pas polarisé, c'est-à-dire qu'on ne connaît pas la direction des spins des particules entrantes. Pour obtenir la section efficace, il faut alors faire la moyenne sur les différentes combinaisons de spins possibles : $i, j = 1, 2$. Si on ne mesure pas les spins des particules sortantes, il faut additionner les sections efficaces pour les différentes configurations possibles : $\ell, m = 1, 2$. On définit donc :

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 |M|^2.$$

On écrit :

$$|\overline{M}|^2 = \frac{e^4}{k^4} L^{\mu\nu}(\mu) L_{\mu\nu}(e) \quad (7.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu}(\mu) &= \frac{1}{2} \sum_{m,\ell=1}^2 \left(\overline{u_{\vec{q}',\ell}} \gamma^\mu v_{\vec{q},m} \right)^* \left(\overline{u_{\vec{q}',\ell}} \gamma^\nu v_{\vec{q},m} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,\ell=1}^2 \left(\overline{v_{\vec{q},m}} \gamma^\mu u_{\vec{q}',\ell} \right) \left(\overline{u_{\vec{q}',\ell}} \gamma^\nu v_{\vec{q},m} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \overline{v_{\vec{q},m}} \gamma^\mu \left(\sum_{\ell=1}^2 u_{\vec{q}',\ell} \overline{u_{\vec{q}',\ell}} \right) \gamma^\nu v_{\vec{q},m} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \overline{v_{\vec{q},m}} \gamma^\mu (\not{q}' + m_\mu) \gamma^\nu v_{\vec{q},m}, \end{aligned}$$

où on a utilisé les relations de fermeture (7.5).

Pour terminer le calcul, on explicite les composantes des bispineurs de Dirac et les éléments des matrices γ , qu'on indice par α et β variant de 1 à 4. Afin d'éviter une confusion avec les indices des coordonnées d'espace temps, on n'utilise pas la convention de sommation d'Einstein et tous les indices sont positionnés en haut :

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu}(\mu) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^4 \sum_{m=1}^2 \overline{v_{\vec{q},m}}^\alpha [\gamma^\mu (\not{q}' + m_\mu) \gamma^\nu]^{\alpha\beta} v_{\vec{q},m}^\beta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^4 \sum_{m=1}^2 v_{\vec{q},m}^\beta \overline{v_{\vec{q},m}}^\alpha [\gamma^\mu (\not{q}' + m_\mu) \gamma^\nu]^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

En faisant apparaître la matrice $v_{\vec{q},m} \overline{v_{\vec{q},m}}$, on obtient la trace d'un produit de matrices et, en notant que la trace d'un produit de trois matrices γ est nulle, on a la

suite d'égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 L^{\mu\nu}(\mu) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^4 \sum_{m=1}^2 [v_{\vec{q},m} \overline{v_{\vec{q},m}}]^{\beta\alpha} [\gamma^\mu (\not{q}' + m_\mu) \gamma^\nu]^{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{2} \text{Tr} [(\not{q} - m_\mu) \gamma^\mu (\not{q}' + m_\mu) \gamma^\nu] \\
 &= \frac{1}{2} \left(q_\rho q'_\eta \text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\eta \gamma^\nu] + m_\mu q_\rho \text{Tr} [\cancel{\gamma^\rho \gamma^\mu} \gamma^\nu] \right. \\
 &\quad \left. - m_\mu q_\eta \text{Tr} [\cancel{\gamma^\mu \gamma^\eta} \gamma^\nu] - m_\mu^2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \right) \\
 &= 2[q^\mu q'^\nu + q^\nu q'^\mu - (m_\mu^2 + q_\eta q'^\eta) \eta^{\mu\nu}].
 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
 L_{\mu\nu}(e) &= \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^2 \left(\overline{v_{\vec{p},j}} \gamma_\mu u_{\vec{p},i} \right)^* \left(\overline{v_{\vec{p},j}} \gamma_\nu u_{\vec{p},i} \right) \\
 &= 2[p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - (m_e^2 + p_\eta p'^\eta) \eta_{\mu\nu}].
 \end{aligned}$$

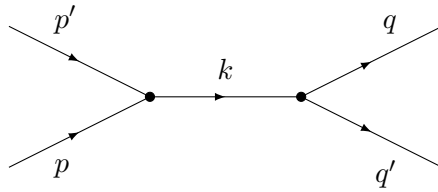
On peut alors rassembler les termes de l'équation (7.7) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}|^2 &= \frac{4e^4}{k^4} [q^\mu q'^\nu + q^\nu q'^\mu - (m_\mu^2 + q_\eta q'^\eta) \eta^{\mu\nu}] \times \\
 &\quad [p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - (m_e^2 + p_\eta p'^\eta) \eta_{\mu\nu}] \\
 &= \frac{8e^4}{k^4} (q_\mu p^\mu q'_\nu p'^\nu + q_\mu p'^\mu q'_\nu p^\nu + m_\mu^2 p_\eta p'^\eta + m_e^2 q_\eta q'^\eta + 2m_\mu^2 m_e^2).
 \end{aligned}$$

Pour simplifier l'expression, on se met dans l'approximation ultra-relativiste ($E \gg m$ pour toutes les particules) :

$$|\overline{M}|^2 = \frac{8e^4}{k^4} (q_\mu p^\mu q'_\nu p'^\nu + q_\mu p'^\mu q'_\nu p^\nu).$$

On introduit les variables de Mandelstam s , t , u , construites à partir des quadri-vecteurs explicités sur le schéma ci-dessous :



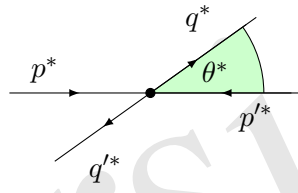
- $s = (p + p')^2 = (q + q')^2 = k^2$: représente le carré de l'énergie dans le centre de masse ;
- $t = (q - p')^2 = (q' - p)^2 \simeq -2p'_\mu q^\mu \simeq -2q'_\mu p^\mu$;
- $u = (p' - q')^2 = (p - q)^2 \simeq -2p'_\mu q'^\mu \simeq -2p_\mu q^\mu$.

On vérifiera facilement que la quantité $s + t + u$ est égale à la somme des carrés des masses des particules entrantes et sortantes.

Avec ces variables :

$$\overline{|M|^2} = \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2).$$

Dans le centre de masse de la réaction on note les variables avec une étoile suivant le schéma ci-dessous :



alors :

$$s = 4p^{*2} \quad ; \quad t = -2p^{*2}(1 + \cos \theta^*) \quad ; \quad u = -2p^{*2}(1 - \cos \theta^*)$$

$$\overline{|M|^2} = e^4 (1 + \cos^2 \theta^*) .$$

On peut à présent calculer la section efficace :

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(q^* + q'^* - p^* - p'^*) \times \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2q_0^*} \frac{d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^3 2q_0'^*} \frac{e^4 (1 + \cos^2 \theta^*)}{4 \sqrt{(p^{*\mu} \cdot p'^*_\mu)^2 - (m_1 m_2)^2}} .$$

L'intégration sur \vec{q}' donne assez vite :

$$d\sigma = \frac{1}{4\pi^2} \delta^4(2q_0^* - p_0^* - p_0'^*) \frac{d^3 \vec{q}}{2q_0^*} \frac{1}{2q_0^*} \frac{e^4 (1 + \cos^2 \theta^*)}{8p^{*2}} .$$

Pour l'intégration sur $|\vec{q}|$ il faut faire le changement de variable $x = 2q$, on peut alors intégrer sur φ et obtenir :

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta^*} = \frac{e^4}{128\pi p^{*2}} (1 + \cos^2 \theta^*) = \frac{e^4}{32\pi s} (1 + \cos^2 \theta^*) .$$

En intégrant sur θ^* il vient finalement :

$$\sigma = \frac{e^4}{48\pi p^{*2}} = \frac{e^4}{12\pi s}.$$

Pour faire l'application numérique, on rétablit tout d'abord les unités en introduisant la constante de structure fine sans dimension :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{e^4}{12\pi} = \frac{(\hbar c)^2}{12\pi} \frac{e^4}{(\epsilon_0\hbar c)^2} = \frac{4\pi}{3} (\hbar c)^2 \alpha^2 \\ &= \frac{4\pi}{3} \times 0,389 \times 10^6 \times \frac{1}{137^2} \text{ GeV}^2 \cdot \text{nb} = 86,8 \text{ GeV}^2 \cdot \text{nb}. \end{aligned}$$

Cette valeur est en accord avec les mesures au pour cent près tant que la production de la paire $\mu^+\mu^-$ par interaction faible reste négligeable, c'est-à-dire pour une énergie dans le centre de masse \sqrt{s} très inférieure à 100 GeV.

7.8 Renormalisation

7.8.1 Diagramme à boucles

Nous nous sommes limités jusqu'ici au premier ordre des perturbations pour le calcul des taux de désintégration et de sections efficaces. Les ordres plus élevés font apparaître des boucles dans les diagrammes de Feynman.

Prenons l'exemple de la diffusion $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$. Les deux diagrammes de la figure 7.1 correspondent à différents termes de la série de perturbation.

Même la simple propagation d'une particule est en fait un processus complexe. Par exemple, le diagramme de la figure 7.2, où f désigne un fermion massif quelconque, est une contribution à la propagation d'un Higgs dans le vide.

La quadri-impulsion des particules virtuelles apparaissant dans la boucle n'est pas contrainte, donc l'amplitude iM est la somme sur toutes les valeurs de k possibles. En appliquant les règles de Feynman dans le référentiel du Higgs, on obtient dans le référentiel du Higgs (le facteur (-1) supplémentaire a pour origine la présence de la boucle de fermions f et \bar{f}) :

$$\begin{aligned} iM &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \left[(-if) \frac{i(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2 + i\epsilon} (-if) \frac{i(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2 + i\epsilon} \right] \\ &= -4f^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 - m_f^2} + \frac{2m_f^2}{(k^2 - m_f^2)^2} \right]. \end{aligned}$$

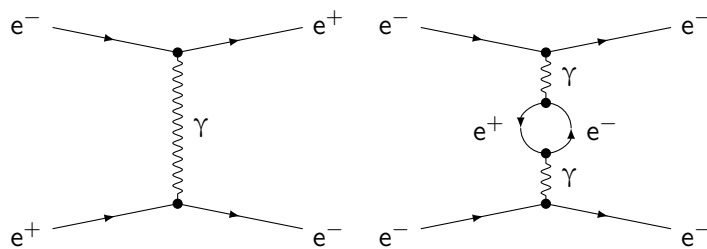


FIGURE 7.1 – Deux diagrammes représentant des termes d’ordre différent dans la série de perturbation pour la diffusion $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$: à gauche, terme du premier ordre en α , à droite un des termes du deuxième ordre en α .

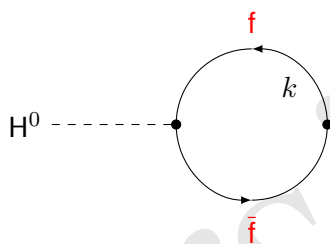


FIGURE 7.2 – Un diagramme contribuant à la propagation d’un Higgs

Si $|k| \rightarrow \infty$, le premier terme de l’intégrande décroît comme $|k|^{-2}$ et l’intégrale diverge, ici comme Λ^2 quand $\Lambda \rightarrow \infty$, si on appelle Λ la borne d’intégration en E et $|\vec{p}|$. Quand on calcule le propagateur, on obtient un résultat dépendant de Λ . La masse d’une particule pouvant être définie comme le pôle de son propagateur, on obtient une correction à la masse du Higgs :

$$\delta m_{H^0}^2 = \frac{\lambda_f^2}{8\pi^2} \left(-\Lambda^2 + 6m_f^2 \ln \frac{\Lambda}{m_f} \right).$$

Comment définir alors cette masse ?

La divergence des diagrammes avec boucles est une propriété générale, qui affecte donc le calcul de toutes les quantités physiques ! L’usage de la méthode des perturbations exige donc que l’on puisse éliminer ces termes infinis. C’est tout l’objet de la technique dite de renormalisation.

7.8.2 Idée générale

Le texte de ce paragraphe est largement emprunté à la présentation de J. Zinn-Justin au colloque de la Société Française de Physique du 21/10/1999 à Paris.

- On commence avec une théorie appelée nue qui dépend de paramètres comme la masse nue m_0 et la charge nue q_0 de l'électron (masse et charge en l'absence d'interactions);
- on définit une échelle de coupure des grandes impulsions Λ ;
- on calcule alors les valeurs physiques, dites renormalisées, des mêmes quantités (charge observée e et masse physique m) en fonction des paramètres nus et de Λ ;
- on inverse ces relations, exprimant maintenant les quantités nues en fonction des quantités renormalisées :

$$e_0 = e + \frac{1}{2}\beta_2 e^3 \ln(\Lambda/m) + \dots ; m_0 = m + \gamma_1 m e^2 \ln(\Lambda/m) + \dots$$

- on exprime ensuite toute autre observable, initialement calculée en termes des paramètres nus, en terme de ces quantités physiques ou renormalisées;
- de façon très surprenante, quand on prend la limite $\Lambda \rightarrow \infty$, toutes les observables physiques ont alors une limite finie.

7.8.3 Processus de renormalisation

Nous illustrons ici de façon très simplifiée le processus de renormalisation.

Supposons que l'on calcule une quantité physique (amplitude de diffusion, ...) dépendant d'un paramètre x (énergie dans le centre de masse d'une réaction, ...) par la méthode des perturbations, et que l'on développe la série en puissances d'une quantité g_0 , qui peut par exemple être une constante de couplage comme α . En absorbant les facteurs nécessaires, on peut écrire cette quantité physique sous la forme :

$$F(x) = g_0 + g_0^2 F_1(x) + g_0^3 F_2(x) + \dots$$

On suppose que les fonctions $F_i(x)$ sont en fait des quantités mal définies comme les intégrales divergentes rencontrées au paragraphe 7.8.1.

Donnons un exemple très simple (extrait de l'article "A hint of renormalization, B. Delamotte, Am. J. Phys. 72 (2) 2004) d'une telle fonction :

$$F_1(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t+x}.$$

Le processus de renormalisation va permettre de se débarrasser des quantités infinies en redéfinissant les paramètres de la théorie et en modifiant la série de perturbation.

On suppose qu'on a mesuré F pour $x = \mu$: $F(\mu) = g_R$.

On régularise la série à l'aide d'un paramètre Λ (limite de l'intégration dans l'exemple ci-dessus) qui permet d'avoir un développement en quantités toutes finies :

$$F(x) \rightarrow F_\Lambda(x, g_0, \Lambda) = g_0 + g_0^2 F_{1,\Lambda}(x) + g_0^3 F_{2,\Lambda}(x) + \dots$$

Le paramètre Λ sera éliminé à la fin de la procédure : on prendra $\Lambda \rightarrow \infty$. On cherche à écrire $F_\Lambda(x, g_0, \Lambda)$ en fonction de g_R et μ (changement de variable) :

$$F_\Lambda(x, g_0, \Lambda) = F_\Lambda(x, g_R, \mu).$$

On utilise une méthode récursive en incrémentant l'ordre de la série de perturbation :

— ordre g_0 :

$$g_0 = g_R ; F_\Lambda(x) = g_R;$$

— ordre g_0^2 :

$$g_0 = g_R + \underbrace{\delta_2 g}_{O(g_R^2)} ; F_\Lambda(x) = g_R + \delta_2 g + g_R^2 F_{1,\Lambda}(x).$$

On impose $F_\Lambda(\mu) = g_R$, il vient $\delta_2 g = -g_R^2 F_{1,\Lambda}(\mu)$ et :

$$F_\Lambda(x) = g_R + g_R^2 (F_{1,\Lambda}(x) - F_{1,\Lambda}(\mu)).$$

Quand on élimine Λ (i.e. $\Lambda \rightarrow \infty$), les divergences de $F_{1,\Lambda}(x)$ et $F_{1,\Lambda}(\mu)$ doivent se compenser pour obtenir la quantité physique $F(x)$.

Avec la fonction prise comme exemple :

$$\begin{aligned} F_{1,\Lambda}(x) &= \alpha \ln \frac{\Lambda + x}{x} \\ \delta_2 g &= -\alpha g_R^2 \ln \frac{\Lambda + \mu}{\mu} \\ F_\Lambda(x) &= g_R + \alpha g_R^2 \ln \left(\frac{\Lambda + x}{\Lambda + \mu} \times \frac{\mu}{x} \right) \\ F(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} F_\Lambda(x) = g_R + \alpha g_R^2 \ln \left(\frac{\mu}{x} \right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi $F(x)$ en fonction des paramètres mesurés g_R et μ au deuxième ordre en g_R . On note que g_0 est en fait une quantité infinie ($\delta_2 g \rightarrow \infty$ quand $\Lambda \rightarrow \infty$);

— ordre g_0^3 :

$$g_0 = g_R + \delta_2 g + \underbrace{\delta_3 g}_{O(g_R^3)}$$

$$F_\Lambda(x) = g_R + \delta_2 g + \delta_3 g + (g_R^2 + 2g_R \delta_2 g) F_{1,\Lambda}(x) + g_R^3 F_{2,\Lambda}(x).$$

Comme précédemment, on impose $F_\Lambda(\mu) = g_R$, il vient :

$$\delta_3 g = 2g_R^3 F_{1,\Lambda}(\mu)^2 - g_R^3 F_{2,\Lambda}(\mu)$$

et :

$$F_\Lambda(x) = g_R + g_R^2 (F_{1,\Lambda}(x) - F_{1,\Lambda}(\mu)) + g_R^3 (F_{2,\Lambda}(x) - F_{2,\Lambda}(\mu) - 2F_{1,\Lambda}(\mu) (F_{1,\Lambda}(x) - F_{1,\Lambda}(\mu))).$$

Le processus de renormalisation fonctionne si les divergences du facteur de g_R^3 se compensent encore sans avoir à introduire une nouvelle constante de régularisation, et ainsi de suite à tous les ordres.

On dit alors que la théorie est renormalisable.

7.8.4 Groupe de renormalisation

La quantité $F(x)$ obtenue ne doit pas dépendre du point de référence choisi μ :

$$F(x) = F(x, g_R, \mu) = F(x, g_R', \mu') = F(x, g_R'', \mu'') = \dots$$

On doit aussi pouvoir passer de la paramétrisation (g_R, μ) à la paramétrisation (g_R'', μ'') soit directement soit en passant par (g_R', μ') .

L'ensemble des transformations de la paramétrisation de la théorie $(g_R, \mu) \rightarrow (g_R', \mu')$ forme ainsi un groupe, dit groupe de renormalisation.

Dans notre exemple simple :

$$\begin{aligned} F(x) &= g_R + \alpha g_R^2 \ln \frac{\mu}{x} \\ F(x) &= g_R' + \alpha g_R'^2 \ln \frac{\mu'}{x} \\ \Rightarrow g_R &= g_R' + \alpha g_R'^2 \ln \frac{\mu'}{\mu}. \end{aligned}$$

On peut aussi écrire, toujours au deuxième ordre en g_R ou g_R' :

$$g_R' = \frac{g_R}{1 - \alpha g_R \ln \frac{\mu'}{\mu}}.$$

On peut vérifier que cet ensemble de transformations vérifie les propriétés d'un groupe, comme souhaité. Nous retrouverons cette relation très générale pour les constantes de couplage des interactions fondamentales.

Le groupe de renormalisation est un élément essentiel de la théorie : la prédictivité de la théorie repose sur le passage d'une mesure à une certaine échelle à une autre mesure à une autre échelle pas trop éloignée, sans avoir besoin d'invoquer les propriétés physiques à une échelle hors de portée.

Remarque.

- *le processus de régularisation peut être vu comme un artifice mathématique. Il peut aussi avoir une signification plus profonde : les propriétés d'un système à une certaine échelle ne dépendent pas du détail des processus à très courte distance (ou de façon équivalente à très haute énergie). Par exemple, il est inutile de connaître le détail de la physique microscopique pour étudier les propriétés d'un gaz parfait !*
- *il a été démontré (G. 'tHooft, M. Veltman, 1971 ; prix Nobel 1999) que le modèle standard de la physique des particules est une théorie renormalisable : la redéfinition d'un nombre réduit des paramètres de la théorie permet le calcul perturbatif de nombreux processus physiques.*

7.8.5 « Running coupling constant »

Une conséquence importante du processus de renormalisation est que les valeurs des paramètres de la théorie dépendent de l'échelle d'énergie μ à laquelle ils sont mesurés. C'est en particulier le cas des constantes de couplage, comme pour g_R dans le paragraphe précédent. Les évolutions de α et de α_S avec l'énergie sont présentées figure 7.3 page 138). On parle de « running coupling constants » (constantes de couplage variables). À l'ordre le plus bas :

$$\text{QED} : \alpha(\mu) = \frac{\alpha(m_e)}{1 - \frac{2\alpha(m_e)}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu}{m_e}\right)} \quad \alpha \text{ croît avec l'énergie ;}$$

$$\text{QCD} : \alpha_S(\mu) = \frac{\alpha_S(\mu')}{1 + \alpha_S(\mu') \frac{(33-2N_f)}{6\pi} \ln\frac{\mu}{\mu'}} \quad \alpha_S \text{ décroît avec l'énergie.}$$

Dans la formule pour QED, on a pris la masse de l'électron comme énergie de référence, à laquelle $\alpha = 1/137$.

Pour QCD :

- la formule donne $\alpha_S(\mu)$ la constante de couplage à l'échelle d'énergie μ en fonction de sa valeur à une autre échelle d'énergie μ' ;

u	d	s	c	b	t
2	5	95	1275	4200	172500

TABLE 7.3 – Masse des quarks en MeV/c^2 .

- N_f est le nombre de saveurs de quarks de masse petite devant l'échelle d'énergie considérée. On donne la masse des différents quarks dans la table 7.3;
- à 1 GeV, α_S vaut environ 0,5. On voit alors qu'on peut trouver une échelle $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200\text{--}400$ MeV pour laquelle la formule donne l'infini. En utilisant cette échelle, on obtient :

$$\alpha_S(\mu) = \frac{6\pi}{(33 - 2N_f) \ln \frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}} ;$$

- ces formules sont valables pour $\mu > \Lambda_{\text{QCD}}$, échelle en dessous de laquelle le développement perturbatif n'a plus de sens.

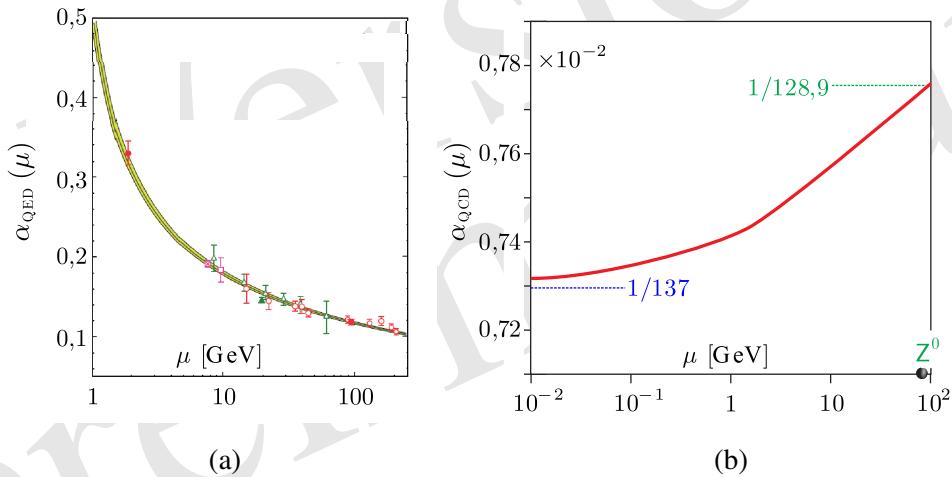


FIGURE 7.3 – Variation des constantes de couplage forte (a) et électromagnétique (b) avec l'énergie. *Crédit : (a) Document server CERN® ; (b) figure reproduite par Jérôme Pérez d'après l'article « Quantum Field Theory », CERN Courrier, septembre 2001.*

7.8.6 Particules virtuelles

Dans le développement perturbatif de la matrice de diffusion, dont les différents termes sont représentés par les diagrammes de Feynman, nous avons indiqué au

paragraphe 7.7 page 125 que la quadri-impulsion est conservée à chaque vertex des diagrammes. Si on considère le diagramme calculé à la section 7.7.3 page 128, en se plaçant par exemple dans le centre de masse de la paire e^+e^- , on a, $k_0 = \sqrt{s}$ et $\vec{k} = \vec{0}$, soit $k^2 = s^2$: le photon échangé a une masse invariante non nulle ! On dit qu'il est virtuel.

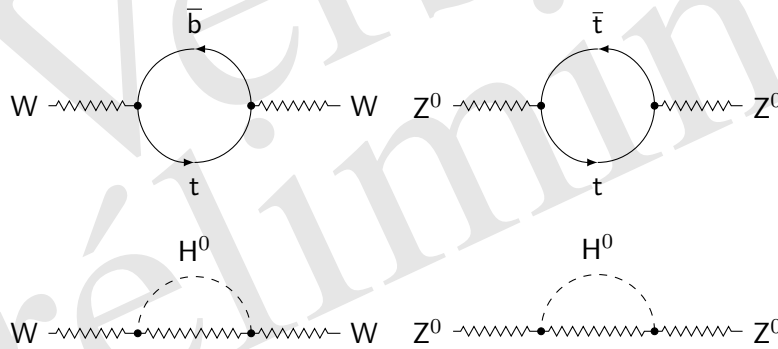
De façon générale, les particules correspondant aux lignes internes des diagrammes de Feynman sont virtuelles, on dit aussi qu'elles ne sont pas sur leur couche de masse. Il faut se souvenir que ces diagrammes sont des intermédiaires de calcul, et ne pas s'attacher outre mesure au vocabulaire utilisé.

De ce fait, les particules échangées peuvent être très massives : leur masse peut excéder l'énergie dans le centre de masse. La section efficace de l'interaction est alors sensible à la masse de ces particules, même si elles ne sont pas effectivement produites, car leur propagateur, qui entre dans le calcul du diagramme, en dépend.

Illustrons notre propos. Comme on le verra au chapitre 10, les masses (nues) des bosons W et Z^0 sont reliées par la relation :

$$M_W^2 = (1 - \sin^2\theta_W)M_{Z^0}^2$$

où $\sin^2\theta_W$ est une fonction des constantes de couplage (nues) des interactions électromagnétique et faible. Cette relation est modifiée par le processus de renormalisation, à cause par exemple des diagrammes ci-dessous :



Les corrections, appelées corrections radiatives, dépendent principalement, à l'ordre le plus bas, des masses du quark t et du Higgs :

$$M_W^2 = (1 - \sin^2\theta_W)M_{Z^0}^2 (1 + \Delta\rho_{\text{quarks}} + \Delta\rho_{\text{Higgs}})$$

$$\Delta\rho_{\text{quarks}} \propto m_t^2$$

$$\Delta\rho_{\text{Higgs}} \propto \ln m_{H^0}.$$

Ainsi, la mesure précise des masses du Z^0 , du W et du quark t a permis d'estimer la valeur de la masse du Higgs bien avant sa découverte au Large Hadron Collider du CERN.

Aujourd'hui, de la même façon, les tests précis des prédictions du modèle standard effectués auprès des accélérateurs permettent la recherche de nouvelles particules de masse trop grande pour être produites à travers l'effet indirect qu'elles peuvent avoir dans les processus observés.

À retenir dans le chapitre 7

- représentation en interaction ;
- matrice S :

$$S = I - iM ;$$

$$\langle b | iM | a \rangle := i(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) M_{ba}$$

- taux de désintégration :

$$d\Gamma = \frac{1}{2k^0} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p + q + \dots - k)}_{\text{espace de phase invariant de Lorentz}} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q_0} \dots |M_{ba}|^2$$

- section efficace de diffusion de deux particules :

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 \dots) \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3\vec{p}'_k}{(2\pi)^3 2E'_k} \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}} |M_{ba}|^2 ;$$

- diagrammes de Feynman : savoir utiliser les règles de Feynman ;
- notion de « running coupling constants », particules virtuelles, corrections radiatives.

7.9 Exercices

Exercice 7.a – Traces et spineurs

Montrer la relation :

$$u_{\vec{p},i}^\dagger \gamma^0 v_{\vec{q},j} v_{\vec{q},j}^\dagger \gamma^0 u_{\vec{p},i} = \text{Tr} (v_{\vec{q},j} \overline{v_{\vec{q},j}} u_{\vec{p},i} \overline{u_{\vec{p},i}}).$$

Exercice 7.b – Relations de fermeture

Montrer les relations :

$$\sum_{i=1}^2 u_{\vec{p},i} \overline{u_{\vec{p},i}} = (\not{p} + m)$$

et

$$\sum_{j=1}^2 v_{\vec{q},j} \overline{v_{\vec{q},j}} = (\not{q} - m)$$

Exercice 7.c – Propagateur

Le propagateur d'un boson de spin 0 et de masse m est défini par :

$$D_F(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} (\theta(t) \exp[-ip_\mu x^\mu] + \theta(-t) \exp[ip_\mu x^\mu]).$$

Montrer que la transformée de Fourier $f(p)$ de $D_F(x)$ définie par :

$$D_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(p) \exp[-ip_\mu x^\mu]$$

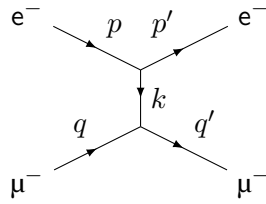
vaut :

$$f(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

où ε est une quantité positive infiniment petite (nécessaire pour définir la valeur de l'intégrale par application du théorème des résidus).

Exercice 7.d – Diffusion électron muon

On considère la diffusion $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$. La quadri-impulsion de l'électron entrant est p , celle du muon q et la quadri-impulsion transférée est $k = p - p'$, où p' est la quadri-impulsion de l'électron diffusé.



On suppose l'état initial (noté i) non polarisé et on ne mesure pas la direction des spins des particules sortantes dans leur état final (noté f). Montrer que :

$$|M_{fi}|^2 = \frac{8e^4}{k^4} \times [(q \cdot p) (q' \cdot p') + (q \cdot p') (q' \cdot p) - m_\mu^2 (p \cdot p') - m_e^2 (q \cdot q') + 2m_\mu^2 m_e^2].$$

Dans l'approximation ultra-relativiste (toutes les impulsions très grandes devant les masses, montrer que :

$$|\bar{M}|^2 = \frac{8e^4}{k^4} (q \cdot p q' \cdot p' + q \cdot p' q' \cdot p) = \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2),$$

où on a défini les variables de Mandelstam :

- $s = (q + p)^2 = (q' + p')^2 \simeq 2q \cdot p \simeq 2q' \cdot p'$ carré de l'énergie dans le centre de masse ;
- $t = (p - p')^2 = (q' - q)^2 = k^2$ carré de la quadri-impulsion transférée ;
- $u = (p - q')^2 = (p' - q)^2 \simeq -2p \cdot q' \simeq -2p' \cdot q$;
- $s + t + u =$ somme des carrés des masses des particules entrantes et sortantes.

On démontrera aussi la dernière relation, qui prouve qu'il n'y a en fait que deux variables indépendantes.

Chapitre 8

Interaction forte

Après l'introduction du nombre baryonique et de la couleur, nous construisons le lagrangien des interactions fortes. Nous présentons ensuite quelques-unes des propriétés de la théorie ainsi obtenue, la chromodynamique quantique. Nous décrivons ensuite les notions de base de la physique nucléaire et de quelques-unes de ses applications, notamment la production d'énergie nucléaire.

8.1 Nombre baryonique et modèle des quarks

Dès la fin des années 40, le développement des techniques expérimentales et des accélérateurs a conduit à la découverte de très nombreuses particules instables (voir table 1.1 page 4). Un nombre quantique additif nouveau, le nombre ou la charge baryonique¹, a été introduit pour expliquer la conservation des particules lourdes dans les réactions de production et de désintégration. Par exemple la désintégration $\Lambda \rightarrow p + \pi$ est observée mais pas celle du Λ en deux pions.

La grande multiplicité des particules, les relations entre leurs masses, leur groupement en familles de propriétés similaires, les expériences de diffusion d'électrons sur les nucléons à haute énergie, ont permis la découverte des quarks. Le modèle avec les trois quarks u, d, s proposé en 1964 par Gell-Mann et Zweig a été complété par la suite avec les autres quarks c, b, t. Tous les hadrons, baryons et mésons, sont composés de quarks et d'antiquarks. La table 8.1 page 144 donne quelques exemples de baryons. La prédiction de l'existence du Ω^- , découvert en 1964, à la bonne masse a été un succès important de ce modèle.

1. « lourd » se dit *βαρύς* en grec, « moyen » *μέσος* et « menu » *λεπτός*

p	n	Δ^{++}	Δ^{-}	Λ^+	Λ^0	Λ^{-}	Ξ^0	Ξ^{-}	Ω^{-}
uud	udd	uuu	ddd	uus	uds	dds	uss	dss	sss

TABLE 8.1 – Quelques baryons composés des quarks u, d et s. Les cases jaunes indiquent les hadrons composés de trois quarks identiques dont l'existence a conduit à l'invention de la couleur.

8.2 Nécessité de la couleur

Le Δ^{++} , le Δ^{-} et le Ω^{-} sont composés de trois quarks identiques. L'expérience montre qu'ils ont un moment cinétique total de $3/2$ et un moment orbital nul. Ils ont donc une fonction d'onde totalement symétrique et ne peuvent pas respecter le principe de Pauli si les quarks ne portent pas un nombre quantique supplémentaire. Ce nombre quantique a été appelé la « couleur », mais n'a aucune relation avec la notion de couleur liée à la vision. Le concept moderne de couleur a été introduit par Bardeen, Fritzsch et Gell-Mann. Ce nouveau nombre quantique peut prendre trois valeurs, notées traditionnellement r (de l'anglais red), g (green), b (blue). La fonction d'onde de couleur décrivant les trois quarks identiques 1, 2, 3 est totalement antisymétrique, elle peut s'écrire sous forme d'un déterminant :

$$\psi_c = N \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

où N est une constante de normalisation. Par la suite, de nombreuses autres mesures ont confirmé l'existence de la couleur. Donnons un exemple. La section efficace de production d'une paire quark-antiquark par interaction électromagnétique s'écrit :

$$\sigma(e^+ + e^- \rightarrow q_i + \bar{q}_i) = \frac{4\pi\alpha^2(Q_i/e)^2}{3s}.$$

où Q_i est la charge du quark q_i et s la variable de Mandelstam représentant le carré de l'énergie dans le centre de masse. Cette formule est l'analogue de celle que nous avons calculée au paragraphe (7.7.3) page 128 :

$$\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}.$$

Pour une énergie dans le centre de masse de 2 à 3 GeV, les quarks pouvant être produits sont les quarks u, d et s et l'on obtient l'expression du rapport $R(s)$ des sections efficaces, pour des quarks sans couleur :

$$R(s) = \frac{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \{q\bar{q}\})}{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^+ + \mu^-)} = \sum_i^{m_i \leq \frac{\sqrt{s}}{2}} \frac{Q_i^2}{e^2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

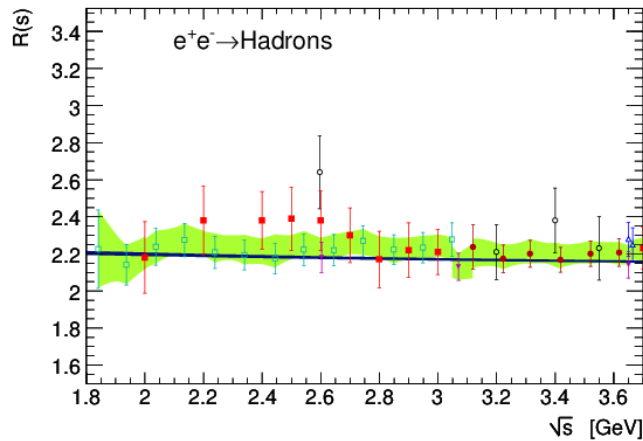


FIGURE 8.1 – R (voir texte) en fonction de l'énergie dans le centre de masse. Les points avec barres d'erreurs correspondent à différentes mesures. La zone en vert représente la combinaison des mesures, la ligne est la prédiction théorique. Document server CERN[®].

où $\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \{q\bar{q}\})$ désigne la section efficace de production de toutes les paires quark antiquark possibles.

La mesure (figure 8.1) de ce rapport donne une valeur légèrement supérieure à 2 ! Il manque un facteur 3, sauf à considérer que chaque saveur de quark apparaît sous trois couleurs distinctes.

Remarque. Comme on le verra plus loin, les quarks isolés ne sont pas observés, on mesure en fait la section efficace de production de hadrons formés par les paires quark antiquark.

8.3 Chromodynamique quantique

8.3.1 Lagrangien d'interaction

Le lagrangien de l'interaction forte s'obtient comme le lagrangien de l'interaction électromagnétique en imposant une invariance de jauge locale au lagrangien décrivant les quarks libres :

- pour l'interaction électromagnétique, on impose l'invariance par changement de phase du champ d'opérateurs ;
- pour l'interaction forte, on impose l'invariance par certaines transformations unitaires dans l'espace des couleurs.

La théorie obtenue est la chromodynamique quantique (QCD : « Quantum Chromo Dynamics »).

8.3.1.1 Lagrangien libre

L'espace des couleurs est un espace à trois dimensions. Sa base peut être identifiée à la base canonique de \mathbb{R}^3 :

$$|r\rangle = (1, 0, 0)^\top ; |g\rangle = (0, 1, 0)^\top ; |b\rangle = (0, 0, 1)^\top ; \dots$$

Le champ d'opérateurs d'un quark de saveur f (« flavor ») est la superposition de trois champs dégénérés en masse :

$$q = f_1 |r\rangle + f_2 |g\rangle + f_3 |b\rangle = (f_1, f_2, f_3)^\top .$$

chaque f_i étant un champ fermionique.

Le lagrangien libre s'écrit alors (cf. le lagrangien de Dirac pour les fermions : équation 5.19 page 87) :

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i\not{\partial} - m) q = \sum_{i=1}^3 \bar{f}_i (i\not{\partial} - m) f_i .$$

Ce lagrangien est invariant par transformation globale spéciale unitaire dans l'espace des couleurs :

$$q \rightarrow q' = Uq$$

avec $U \in SU(3)$, groupe des matrices unitaires 3×3 de déterminant 1.

8.3.1.2 Groupe de jauge

En reprenant la démarche utilisée pour l'interaction électromagnétique, on veut l'invariance par transformation de jauge locale :

$$q \rightarrow q' = U(x) q. \quad (8.1)$$

Remarque. Le groupe de transformations $U(3)$ aurait été plus naturel car le lagrangien est invariant par une transformation globale de ce groupe. Cette invariance globale donne d'ailleurs la conservation du nombre baryonique, de la même façon que l'on a obtenu la conservation de la charge électrique.

Cependant, demander l'invariance par transformation locale conduirait à la prédiction de l'existence d'un boson vecteur sans masse et sans couleur induisant une interaction à longue portée entre les hadrons semblable à l'interaction électromagnétique, ce qui est exclu expérimentalement.

En effet, toute transformation de $U(3)$ est le produit d'une transformation de $SU(3)$ par une transformation de $U(1)$:

$$U(3) = U(1) \times SU(3) \leftrightarrow U \text{ unitaire} = \exp(i\alpha) \times SU \text{ spéciale unitaire.}$$

L'invariance par multiplication par une phase est exactement ce qui conduit à une interaction similaire à l'interaction électromagnétique.

Un calcul rapide montre que sous la transformation de jauge locale (8.1) avec $U \in SU(3)$, le lagrangien devient :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \bar{q}i\gamma^\mu \left(U^\dagger(x) \partial_\mu U(x) \right) q. \quad (8.2)$$

Remarque. Les états à une particule ou une antiparticule sont donnés par (attention les indices α et β varient de 1 à 3 et sont des indices de couleur, et on omet dans la notation l'impulsion et l'état de spin pour alléger l'écriture) :

$$|q_\alpha\rangle = b_\alpha^\dagger |0\rangle \text{ et } |\bar{q}_\alpha\rangle = d_\alpha^\dagger |0\rangle$$

Or le champ d'opérateurs décrivant les quarks comprend à la fois des termes b_α^\dagger et d_α . Ces opérateurs doivent donc se transformer de la même façon. En conséquence les états à une antiparticule doivent se transformer suivant :

$$d_\alpha' = \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} d_j \Rightarrow d_\alpha^{\dagger'} = \sum_{\beta=1}^3 U^*_{\alpha\beta} d_\beta^\dagger \Rightarrow |\bar{q}_\alpha'\rangle = \sum_{\beta=1}^3 U^*_{\alpha\beta} |\bar{q}_\beta\rangle.$$

8.3.1.3 Matrices de Gell-Mann

En suivant la méthode initiée dans le chapitre 6 pour l'interaction électromagnétique, on fait disparaître le terme additionnel apparaissant dans la transformation (8.2) en remplaçant les dérivées simples par des dérivées covariantes. À cette fin nous devons tout d'abord introduire de nouveaux champs.

Une matrice U de $SU(3)$ présente :

- 9 éléments complexes soit 18 réels ;
- 9 contraintes pour l'unitarité : $U^\dagger U = I_3$;
- 1 relation pour le déterminant égal à 1.

Il reste donc 8 paramètres réels indépendants, on dit que $SU(3)$ est un groupe à 8 paramètres. On peut représenter les éléments de ce groupe de Lie par des matrices carrées d'ordre 3. Toutes les matrices U de $SU(3)$ sont engendrées par 8 « générateurs » T_a :

$$\forall U \in SU(3), \exists \beta \in \mathbb{R}^8, U = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \beta^a T_a \right). \quad (8.3)$$

Les matrices T_a sont hermitiennes et de trace nulle. On utilise traditionnellement les matrices de Gell-Mann $\lambda_a = 2T_a$, pour représenter les générateurs de $SU(3)$. Leur normalisation est choisie pour avoir :

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}.$$

Elles sont données par :

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ces générateurs sont reliés à travers les relations de structures de $SU(3)$: comme pour tous les groupes de Lie, leurs commutateurs engendrent la famille tout entière (on se souviendra par exemple du cas simple du groupe des rotations $SO(3)$ engendré par les composantes du moment cinétique vérifiant les relations de commutation bien connues (voir équation (2.5) page 21). Ici, nous avons :

$$\left[\frac{1}{2}\lambda_a, \frac{1}{2}\lambda_b \right] = \frac{i}{2} f_{abc} \lambda_c.$$

où les constantes de structure du groupe f_{abc} ont :

- la propriété d'antisymétrie par échange de deux indices et d'invariance par permutation circulaire des indices :

$$f_{abc} = f_{cab} = f_{bca} = -f_{bac} = -f_{acb} ;$$

- des valeurs non nulles particulières :

$$f_{123} = 1$$

$$f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2$$

$$f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2.$$

Les valeurs de f_{abc} non définies par ces relations sont nulles.

Remarque. Pour les antiquarks, ce sont les matrices U^* et donc $-T_a^*$ qui interviennent (elles ont les mêmes relations de commutation), leurs charges de couleur sont « opposées ».

Historiquement on comprend bien maintenant comment la physique s'est construite au XX^{ème} siècle sur la base des idées de Lagrange qui au début du XIX^{ème} siècle avait introduit les crochets de Poisson [6]. En cherchant à comprendre la structure des équations de la mécanique quantique, et sur la base des idées formulées par Bohr en 1923, Dirac proposa en 1927 le fructueux principe de correspondance $\{\cdot, \cdot\} \rightarrow -i[\cdot, \cdot]$ qui conduit à l'introduction d'un opérateur hamiltonien. Les relations de commutation canoniques permettent alors de construire des opérateurs x et p . Les contraintes expérimentales et/ou théoriques conduisent à la théorie quantique des champs pour la formulation relativiste de l'électromagnétisme, puis, après les succès immenses de l'électrodynamique quantique, à la construction, sur le même moule, de nouvelles théories de jauge, comme QCD.

8.3.1.4 Terme d'interaction QCD

Nous sommes à présent en mesure de réécrire le terme supplémentaire apparu dans la transformation de jauge du lagrangien (équation 8.2) sous la forme :

$$\bar{q}i\gamma^\mu \left(U^\dagger(x) \partial_\mu U(x) \right) q = \bar{q}i\gamma^\mu \left(U^\dagger(x) \left(-ig_s \partial_\mu \alpha^a(x) \frac{\lambda_a}{2} \right) U(x) \right) q$$

où on a posé $\beta^a = g_s \alpha^a$. La constante g_s va jouer pour QCD le rôle de e pour QED : elle détermine l'intensité de l'interaction.

Le caractère local $U(x)$ ou global U de la transformation est transmis dans la relation (8.3) par les β^a . En effet, ces derniers, en tant que champ scalaire sur l'espace temps, peuvent avoir une valeur réelle invariable en chaque point x de l'espace temps et donc globale, ou bien une valeur réelle qui varie au gré de l'espace et du temps et devient donc locale : $\beta^a = \beta^a(x)$. Ce caractère se retrouve alors naturellement transmis aux $\alpha^a = \beta^a/g_s$.

On introduit :

- la dérivée covariante contenant 8 nouveaux champs G^a qui déterminent chacun $a = 1, \dots, 8$ gluons :

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2} g_s \lambda_a G^a_\mu ;$$

où, dans cette écriture, $\lambda_a G^a_\mu$ est sommé sur l'indice a et désigne la combinaison linéaire des matrices de Gell-Mann par les composantes μ des 8 gluons chacun représenté par son champ $G^a : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

- et la transformation des champs de gluons par transformation de jauge locale pour rétablir l'invariance du lagrangien :

$$G^a_\mu = G^a_\mu + g_s \alpha^b(x) f_{abc} G^c_\mu + \partial_\mu \alpha^a(x) .$$

Le lagrangien prend la forme (attention q a trois composantes de couleur !) :

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i\gamma^\mu D_\mu - m) q = \underbrace{\bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q}_{\text{termes cinétiques}} - \underbrace{g_s \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q G^a_\mu}_{\text{termes d'interaction}} .$$

On vérifiera (exercice 8.b) que ce lagrangien est invariant par transformation de jauge locale pour le groupe $SU(3)$.

8.3.2 Comparaison avec QED

8.3.2.1 Constante de couplage

L'intensité des interactions fortes se traduit par la valeur de la constante g_s , ou, de façon équivalente, de la constante $\alpha_S = g_s^2/4\pi$, qu'on peut comparer à la constante de structure fine $\alpha = e^2/4\pi$. À basse énergie (pour l'éclaircissement de cette restriction, voir paragraphe 8.5 page 153) :

$$\alpha_S \simeq 0,5 \quad \text{alors que} \quad \alpha = 1/137.$$

C'est la raison pour laquelle cette interaction est qualifiée de forte.

8.3.2.2 Potentiel d'interaction

Le terme d'interaction électromagnétique pour un fermion de charge Q s'écrit :

$$Q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.$$

De façon similaire, le terme d'interaction forte s'écrit :

$$g_s\bar{q}\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}qG^a_\mu = \sum_{\alpha,\beta} g_s\bar{q}_\alpha\gamma^\mu\frac{(\lambda_a)_{\alpha\beta}}{2}q_\beta G^a_\mu.$$

Dans cette écriture, on précise encore une fois que :

- les indices α et β sont les indices de couleur, ils varient de 1 à 3 ;
- l'indice des gluons a , présent en haut et en bas dans cette relation est sommé de 1 à 8 ;
- l'indice μ des matrices de Dirac et des composantes de chaque champ de gluon est sommé de 0 à 3.

Prenons l'exemple de la diffusion $u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d}$ illustrée figure 8.2), dans laquelle on a fait explicitement apparaître les impulsions des quarks et leurs indices de spins i, j, ℓ, m qui valent 1 ou 2.

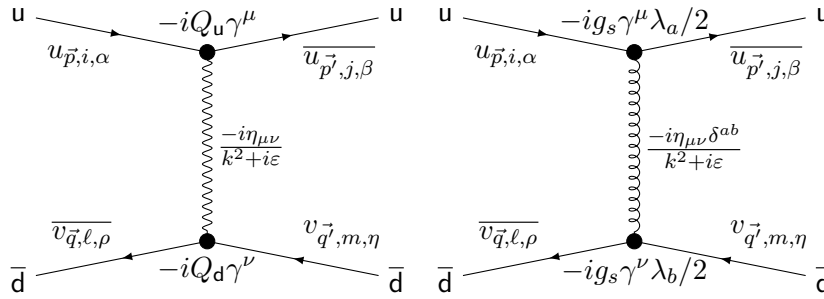
On peut par identification des différents termes obtenir le diagramme de Feynman pour QCD à partir de celui de QED, ainsi que l'expression de l'élément de matrice de diffusion iM (sommation sur tous les indices répétés) :

Pour QED, la lecture du diagramme de gauche sur la figure 8.2 donne :

$$\overline{u_{\vec{p}',j,\beta}}(-iQ_u)\gamma^\mu u_{\vec{p},i,\alpha} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \overline{v_{\vec{q},\ell,\rho}}(-iQ_d)\gamma^\nu v_{\vec{q}',m,\eta}.$$

Pour QCD, la lecture du diagramme de droite sur la même figure donne à présent :

$$\overline{u_{\vec{p}',j,\beta}}(-ig_s)\gamma^\mu\frac{(\lambda_a)^{\beta\alpha}}{2} u_{\vec{p},i,\alpha} \frac{-i\eta_{\nu\mu}\delta^{ab}}{k^2 + i\varepsilon} \overline{v_{\vec{q},\ell,\rho}}(-ig_s)\gamma^\nu\frac{(\lambda_b)^{\rho\eta}}{2} v_{\vec{q}',m,\eta}.$$

FIGURE 8.2 – Diffusion $u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d}$.

Pour comparer la diffusion électromagnétique et la diffusion par interaction forte, on considère des quarks et antiquarks entrants et sortants d'une couleur donnée.

En comparant les deux expressions de iM , on voit que l'amplitude de diffusion (au premier ordre des perturbations) QCD s'obtient en remplaçant le facteur $Q_u Q_d$ par le facteur $C g_s^2$ avec :

$$C = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 (\lambda_a)^{\rho\eta} (\lambda_a)^{\beta\alpha}.$$

Le potentiel répulsif d'interaction électrostatique entre ces deux quarks :

$$V_{QED} = -\frac{Q_u Q_d e^2}{e^2} \frac{1}{4\pi r} = \frac{2}{9} \alpha \frac{1}{r}$$

pourrait ainsi être extrapolé par analogie au potentiel d'interaction forte entre ces deux mêmes particules :

$$V_{QCD} \stackrel{?}{=} -C \frac{g_s^2}{4\pi r} = -C \alpha_S \frac{1}{r}$$

Le signe de C , positif ou négatif, détermine si le potentiel est attractif ou répulsif. Il faut toutefois prendre garde que la constante de couplage QCD est beaucoup plus grande que celle de QED, et le développement perturbatif du premier ordre est très insuffisant, ce qui est signalé par le point d'interrogation sur l'égalité précédente.

Par exemple, pour la diffusion $u_r + \bar{d}_g \rightarrow u_r + \bar{d}_g$ on obtient :

$$C = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 (\lambda_a)^{22} (\lambda_a)^{11} = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{6},$$

le potentiel est répulsif. Mais si on considère maintenant $u_r + \bar{d}_r \rightarrow u_r + \bar{d}_r$ on obtient :

$$C = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 (\lambda_a)^{11} (\lambda_a)^{11} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3},$$

et le potentiel devient attractif ! Si on prend en compte les autres processus possibles :

$$u_r + \bar{d}_r \rightarrow u_g + \bar{d}_g \quad \text{et} \quad u_r + \bar{d}_r \rightarrow u_b + \bar{d}_b$$

on obtient $C = 4/3$ (exercice 8.c).

Le possible appariement des quarks pour former des états liés (des hadrons) dépend ainsi de leur couleur. Nous précisons cela au paragraphe 8.5.

8.4 Lagrangien pour les gluons

De même que pour le lagrangien QED, le lagrangien QCD doit être complété pour inclure un terme cinétique pour les gluons.

Pour QED, le terme cinétique invariant de jauge pour les photons s'écrit :

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Le terme analogue pour QCD s'écrit maintenant :

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu}$$

avec sommation sur l'indice a pour inclure tous les gluons. Par contre $\mathcal{G}_{\mu\nu}^a$ ne doit pas être écrit simplement comme $\partial_\mu G_{\nu}^a - \partial_\nu G_{\mu}^a$ qui ne serait pas invariant de jauge. Pour obtenir cette invariance, il faut utiliser la dérivée covariante et l'on obtient :

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_{\nu}^a - \partial_\nu G_{\mu}^a - g_s f_{abc} G_{\mu}^b G_{\nu}^c.$$

Le terme supplémentaire a pour origine la non-commutativité du groupe de jauge :

$$\exists \{a, b, c\} \quad \text{tels que} \quad f_{abc} \neq 0.$$

Une première conséquence est l'universalité de la constante de couplage forte : à la différence de QED où les particules peuvent porter des charges différentes, les charges de couleur sont les mêmes pour toutes les saveurs de quarks.

En explicitant le « produit scalaire » de deux \mathcal{G}^a (techniquement il s'agit de la trace du tenseur \mathcal{G}^a), le lagrangien des gluons s'écrit finalement (il y a sommation

sur tous les indices répétés) :

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} \left\{ \underbrace{(\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu)(\partial^\mu G^{a\nu} - \partial^\nu G^{a\mu})}_{\text{terme cinétique}} \right. \\ \left. - g_s f_{abc} \underbrace{[(\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu) G^{b\mu} G^{c\nu} + (\partial^\mu G^{a\nu} - \partial^\nu G^{a\mu}) G^b_\mu G^c_\nu]}_{\text{vertex à trois gluons}} \right. \\ \left. + g_s^2 \underbrace{f_{abc} f_{ade} G^b_\mu G^c_\nu G^{d\mu} G^{e\nu}}_{\text{vertex à quatre gluons}} \right\}.$$

La non commutativité du groupe de jauge a pour conséquence l'apparition de termes d'interactions entre les gluons : les gluons portent des charges de couleur (une couleur et une anticouleur).

C'est une deuxième nouveauté par rapport à QED où le photon n'est pas chargé.

8.5 Constante de couplage, liberté asymptotique

8.5.1 Confinement de la couleur

Des calculs similaires à ceux effectués précédemment montrent que les états d'énergie minimale sont les états dits singlets de couleur, c'est-à-dire ceux qui sont invariants par transformation de $SU(3)$.

Les expériences n'ont jamais permis l'observation de quarks ou de gluons isolés. Les états liés de quarks (que l'on appelle des hadrons) connus sont :

- les baryons, composés de 3 quarks ;
- les mésons, composés de paires quark-antiquark ;
- depuis le milieu des années 2010, des états liés mal nommés tetraquarks (en fait deux quarks et deux antiquarks) et pentaquarks (quatre quarks et un antiquark) ont aussi été mis en évidence.

Tous ces états peuvent être singlets de couleur. On dit que les quarks et les gluons sont confinés. Il n'y a cependant à ce jour aucune démonstration théorique que la propriété de confinement est obligatoire dans le cadre de QCD. Les calculs perturbatifs autorisent aussi des états liés non singlets, mais, contrairement à QED, le développement perturbatif est inadapté pour deux raisons :

- la constante de couplage forte est très grande devant la constante de couplage électromagnétique (paragraphe 8.3.2 page 150) ;
- les gluons interagissent entre eux, au contraire des photons.

Pour des distances pas trop petites, l'énergie potentielle d'interaction entre un quark et son anti-quark peut être grossièrement approchée par :

$$V(r) \simeq -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S}{r} + k r, \text{ avec } k \simeq 0,85 \text{ GeV} \cdot \text{fm}^{-1}.$$

Ce potentiel conduit à une taille de l'état lié de l'ordre du fermi. Si on essaie de séparer les constituants, l'énergie fournie entraîne la création de paires particules-antiparticules, qui se recombinent pour former des mésons et des baryons. C'est le processus dit d'hadronisation, illustré par la figure 8.3.

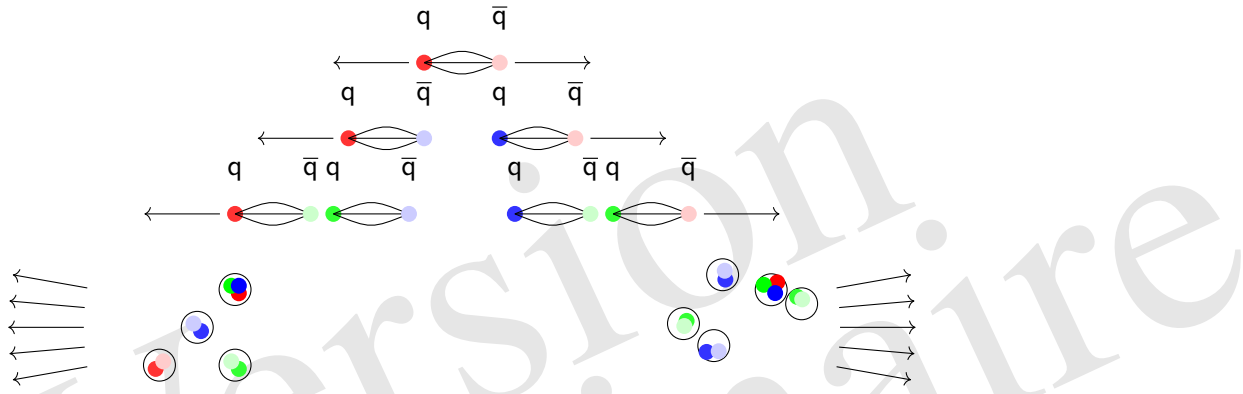


FIGURE 8.3 – Processus d'hadronisation : production de paires quark antiquark et appariement en singlets de couleurs.

Ce processus conduit à la production de jets de particules lors de collisions à haute énergie (figure 8.4). Ainsi, une collision $e^- + e^+$ peut former deux jets de particules à partir de la paire quark-antiquark formée. Si l'un des quarks émet lui aussi un gluon de haute énergie, on peut alors aussi observer trois jets. Cette observation a été une preuve expérimentale de l'existence des gluons, en 1979, auprès de l'accélérateur PETRA (Positron-Elektron-Tandem-Ring-Anlage : système d'anneaux en tandem positron-électron) à DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron : synchrotron allemand à électrons à Hambourg).

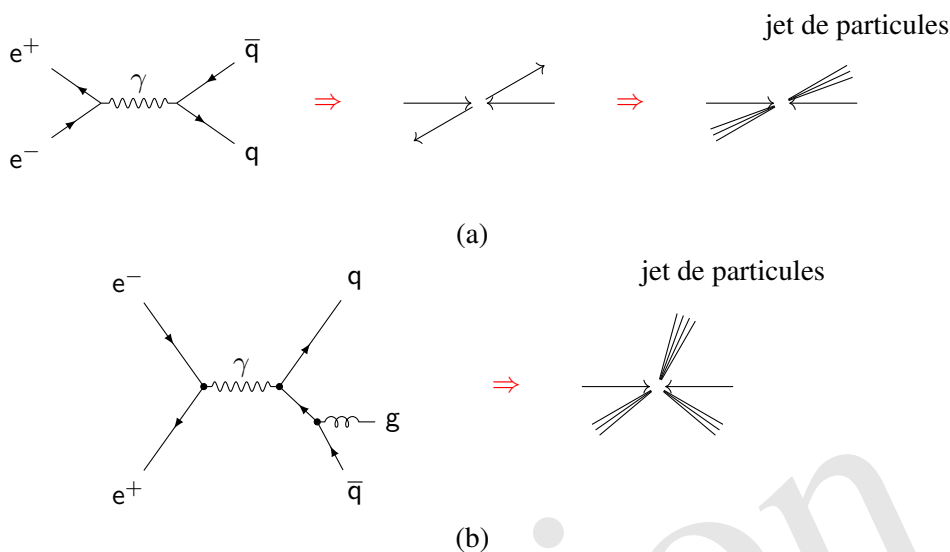


FIGURE 8.4 – Production de deux (a) ou trois (b) jets de particules par une collision $e^- + e^+$ à haute énergie.

8.5.2 Portée

Contrairement à l'interaction électromagnétique l'interaction forte est à très courte portée :

- à cause de l'interaction des gluons entre eux, la couleur est confinée dans un volume de quelques fm^3 ;
- le potentiel n'est attractif que jusqu'à une distance de quelques fermis.

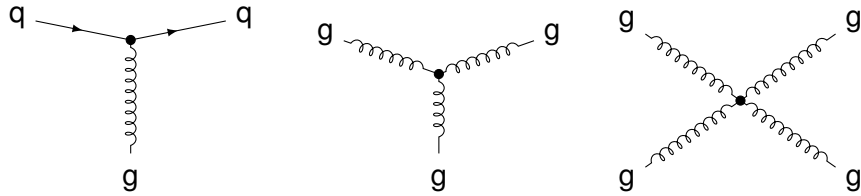
8.5.3 Liberté asymptotique

On a vu au paragraphe 7.8.5 page 137 que la valeur des constantes de couplage des interactions dépend de l'échelle d'énergie à laquelle elles sont mesurées. Pour QED, α croît avec l'énergie, pour QCD, α_S décroît avec l'échelle d'énergie Q de la mesure (voir figure 7.3 page 138).

Ainsi, à très haute énergie (ou très courte distance), α_S devient suffisamment petit pour que le calcul perturbatif des amplitudes de diffusion donne des résultats précis. Cette propriété est appelée « liberté asymptotique ». À très courte distance, les quarks se comportent comme des particules libres.

8.5.4 Diagrammes de Feynman pour QCD

Le lagrangien d'interaction QCD et le lagrangien pour les gluons conduisent à des vertex quark-gluon et gluons-gluons, à trois ou quatre gluons. Ils sont dessinés figure 8.5. Pour alléger la présentation, nous ne donnons pas les règles de Feynman correspondantes.



Interaction quark-gluon. Interaction à 3 gluons. Interaction à 4 gluons.

FIGURE 8.5 – Diagrammes de Feynman de QCD.

À retenir dans le chapitre 8

- nombre quantique de couleur;
- groupe de jauge $SU(3)_C$;
- 8 bosons vecteurs « colorés » sans masse (gluons);
- matrices de Gell-Mann, facteur de couleur;
- les états liés sont des hadrons : baryons et mésons;
- propriétés de l'interaction forte : confinement, courte portée;
- constante de couplage α_S :
 - grande à basse énergie,
 - décroît avec l'énergie : liberté asymptotique;
- processus d'hadronisation.

8.6 Exercices

Exercice 8.a – Moment magnétique des nucléons

1. Fonction d'onde de couleur des baryons.

Le baryon Δ^{++} est constitué de trois quarks u et possède un spin 3/2. Sa masse est $1,23 \text{ GeV}/c^2$, proche de celle des nucléons. Les quarks sont donc

dans l'état d'énergie minimale et la fonction d'onde spatiale $\psi_s(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ correspond à un moment cinétique orbitale nul. Elle est alors symétrique par l'échange de deux quarks.

Montrer que la fonction d'onde de spin est aussi symétrique par échange de deux quarks.

Indication : exprimer l'état $|s = 3/2, m_s = 3/2\rangle$ en fonction des états de spin 1/2 des 3 quarks et utiliser l'opérateur S^- pour calculer les autres états. On rappelle que de façon générale :

$$J^- |j, m\rangle = \begin{cases} \hbar\sqrt{(j(j+1) - m(m-1))} |j, m-1\rangle & \text{pour } m > -j \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction d'onde globale devant être antisymétrique d'après le principe de Pauli, ce fut historiquement un argument pour introduire un nombre quantique supplémentaire, la couleur, pour pouvoir rendre la fonction d'onde du Δ^{++} antisymétrique. Avec trois couleurs, pour un quark on a :

$$|\psi_c\rangle = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix} = \psi_r |r\rangle + \psi_g |g\rangle + \psi_b |b\rangle.$$

La fonction d'onde de couleur totalement antisymétrique pour trois quarks s'obtient simplement avec le déterminant :

$$\psi_c = \begin{vmatrix} \psi_{r1} & \psi_{r2} & \psi_{r3} \\ \psi_{g1} & \psi_{g2} & \psi_{g3} \\ \psi_{b1} & \psi_{b2} & \psi_{b3} \end{vmatrix} / \sqrt{6}.$$

Les interactions fortes étant indépendantes de la saveur des quarks, la fonction d'onde de couleur est la même pour tous les baryons, et elle est antisymétrique.

2. Fonction d'onde de spin des nucléons.

En déduire la fonction d'onde de spin des nucléons, sachant que le proton et le neutron ont un spin 1/2.

Indication : exprimer la fonction d'onde du proton comme la combinaison linéaire d'une fonction d'onde ψ_1 avec les spins des quarks u antiparallèles et d'une fonction d'onde ψ_2 avec les spins parallèles : $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$, imposer que le spin global soit 1/2 par $S^+\psi = 0$, et normaliser ψ . Pour le neutron, inverser les rôles des quarks u et d.

3. Moment magnétique des nucléons.

On rappelle que le moment magnétique d'un fermion élémentaire s'exprime : $\vec{\mu} = \frac{q}{m}\vec{S}$.

Montrer que le moment magnétique du proton vaut : $\mu_p = (4\mu_u - \mu_d) / 3$. Calculer le rapport du moment magnétique du proton au moment magnétique du neutron μ_p / μ_n , en supposant que les quarks u et d ont la même masse m .

Application numérique : calculer μ_p / μ_0 , et μ_n / μ_0 où μ_0 est le magnéton nucléaire : $\mu_0 = e\hbar / 2M_p$, où M_p est la masse du proton.

On donne : $M_p = 938 \text{ MeV}/c^2$; $m = 333 \text{ MeV}/c^2$. Les valeurs mesurées sont respectivement 2,79 et $-1,91$. On utilisera la fonction d'onde du proton calculée précédemment et l'expression :

$$\mu_p = \langle \psi_p(m_s = +1/2) | \hat{\mu}_z | \psi_p(m_s = +1/2) \rangle .$$

où l'axe z est l'axe sur lequel on mesure le spin.

Exercice 8.b – Invariance de jauge du lagrangien d'interaction QCD
Vérifier que le lagrangien d'interaction QCD :

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i\gamma^\mu D_\mu - m) q = \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q - g_s \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q G^a_\mu$$

est invariant sous la transformation de jauge infinitésimale définie par (attention à la sommation sur les indices répétés, les notations sont parfois ambiguës) :

$$q \rightarrow q' = \left(1 - \frac{i}{2} g_s d\alpha^a \lambda_a \right) q$$

$$G^a_\mu \rightarrow G'^a_\mu = G^a_\mu + g_s d\alpha^b f_{abc} G^c_\mu + \partial_\mu d\alpha^a .$$

Exercice 8.c – Facteur de couleur

On veut montrer que si le méson π^+ (qui est un état lié $u\bar{d}$) est dans un état singlet de couleur, c'est-à-dire invariant par transformation $SU(3)$, alors le potentiel QCD est attractif.

La fonction d'onde du π^+ s'écrit : $\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_r \bar{d}_r + u_g \bar{d}_g + u_b \bar{d}_b)$ que l'on note pour alléger l'écriture :

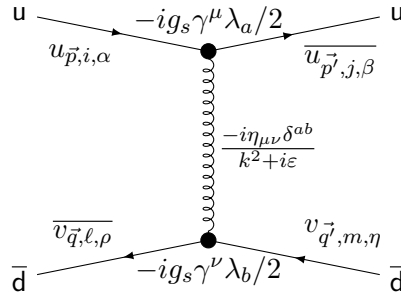
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}) .$$

Montrer que ψ est invariant par la transformation :

$$(r, g, b)^\top \rightarrow (r', g', b')^\top = U(r, g, b)^\top$$

où l'opérateur U est un élément de $SU(3)$.

En utilisant les règles de Feynman indiquées sur la figure ci-dessous et les expressions des matrices de Gell-Mann données dans le cours, montrer que le facteur de couleur de la diffusion $u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d}$ vaut $4/3$.



Indication : on calculera le facteur de diffusion pour une paire couleur anticouleur fixée dans l'état initial vers chaque paire possible de l'état final et l'on obtiendra le facteur de couleur en exprimant l'amplitude de diffusion sous la forme :

$$\langle \bar{\psi} | \mathcal{S} | \psi \rangle = \frac{1}{3} \left(\sum_{c=r,g,b} \langle c\bar{c} | \mathcal{S} | c\bar{c} \rangle + \sum_{c_1, c_2=r,g,b}^{c_1 \neq c_2} \langle c_1 \bar{c}_1 | \mathcal{S} | c_2 \bar{c}_2 \rangle \right).$$

Par analogie avec QED, dire pourquoi le potentiel est attractif.

Exercice 8.d – Lagrangien de propagation des gluons

Montrer que la densité de lagrangien QCD : $-\frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu}$ n'est pas invariante de jauge locale si l'on définit : $\mathcal{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a$.

Indication : On calculera la variation de $\mathcal{G}_{\mu\nu}^a$ sous une transformation de jauge locale est donnée :

$$\begin{cases} q \rightarrow q' = U(x)q & \text{avec } U(x) = \exp \left[-ig_s \sum_{a=1}^8 \alpha^a(x) \lambda_a / 2 \right] \\ G_\mu^a = G_\mu^a + g_s \alpha^b(x) f_{abc} G_\mu^c + \partial_\mu \alpha^a(x) \end{cases}.$$

Version
préliminaire

Chapitre 9

Interaction faible

Historiquement, l'interaction faible s'est d'abord manifestée à travers la désintégration β des noyaux, que nous abordons au chapitre ??, c'est elle aussi qui permet les réactions de fusion de l'hydrogène dans les étoiles.

Dans ce chapitre, nous en donnons les propriétés générales et décrivons les processus élémentaires qu'elle permet, dits à courant chargé ou à courant neutre, suivant le boson vecteur échangé. Nous consacrons une section complète aux neutrinos, leptons neutres qui ne sont sensibles qu'aux interactions faibles, ce qui leur confère un comportement intéressant. La dernière section est dédiée aux trois symétries discrètes que sont la parité (renversement des coordonnées d'espace), la conjugaison de charge (échange particule-antiparticule), et le renversement du temps. Ces symétries ne sont pas respectées par l'interaction faible, alors qu'elles le sont par les autres interactions fondamentales. Les propriétés étonnantes de l'interaction faible rendent difficile la construction du lagrangien correspondant, ce sera l'objet du chapitre 10.

9.1 Caractéristiques de l'interaction faible

Les caractéristiques essentielles de l'interaction faible sont les suivantes :

- toutes les particules élémentaires de matière sont sensibles à l'interaction faible;
- elle est portée par trois bosons vecteurs massifs, qui interagissent entre eux, les W^+ , W^- et Z^0 dont les masses sont :

$$m_W = 80 \text{ GeV}/c^2, m_{Z^0} = 91 \text{ GeV}/c^2 ;$$

- les particules portent des nombres quantiques internes, l'isospin faible et l'hypercharge, et l'interaction faible est construite sur l'invariance de jauge

associée aux transformations unitaires dans l'espace de l'isospin et de l'hypercharge (chapitre 10);

- en réalité, les interactions faible et électromagnétique sont intriquées, et on parle plutôt de l'interaction électrofaible. Les constantes de couplage électromagnétique et faible sont du même ordre de grandeur, et c'est la masse des bosons vecteurs qui explique pourquoi l'interaction faible est si faible à basse énergie, et à très courte portée :

$$R \sim \hbar c / M_{W,Z} c^2 \sim 2 \times 10^{-3} \text{ fm} ;$$

- seule l'interaction faible peut changer la nature des leptons et celle des quarks (appelée aussi saveur) (voir paragraphe 9.2);
- une paire lepton-antilepton peut être créée par interaction faible, de même qu'une paire quark-antiquark;
- c'est l'interaction faible qui est responsable de la désintégration β des noyaux;
- comme les neutrinos sont des leptons neutres, ils ne sont sensibles qu'à l'interaction faible, et cela leur confère des propriétés étonnantes (voir paragraphe 9.5).
- enfin, et contrairement à toutes les autres interactions, les interactions faibles ne respectent aucune des symétries discrètes que sont (voir paragraphe 9.6) :
 - la parité (renversement des coordonnées d'espace),
 - l'échange particule antiparticule,
 - le renversement du temps.

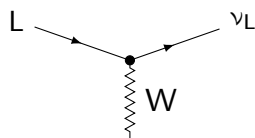
9.2 Courants chargés : bosons W^+ et W^-

9.2.1 Interaction faible et leptons

Par émission ou absorption d'un boson W , un lepton chargé se transforme alors en son neutrino associé (mais pas un autre) ou vice-versa, et de même avec les antiparticules, un antilepton chargé se transforme en son antineutrino associé ou vice-versa.

L'annihilation d'un boson W crée une paire lepton chargé antineutrino associé ou une paire antilepton chargé neutrino associé. Le processus inverse est aussi possible.

Tous ces processus correspondent au vertex de la figure 9.1.

FIGURE 9.1 – Vertex W lepton neutrino associé.

Par exemple, le muon se désintègre par interaction faible en électron, antineutrino électron et neutrino muon selon le processus :

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Le diagramme de Feynman le plus simple correspondant représenté figure 9.2 comporte deux tels vertex.

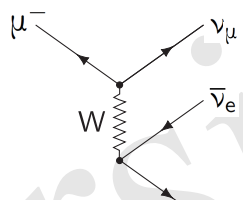


FIGURE 9.2 – Désintégration du muon.

Le taux de désintégration du muon vaut (en unités naturelles et en négligeant $m_e \ll m_\mu$) :

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{\tau_\mu} \simeq \frac{g_W^4}{6144\pi^3} \left(\frac{m_\mu}{M_W} \right)^4 m_\mu \simeq \frac{1}{2,2 \mu s}.$$

La constante g_W est la constante de couplage de l'interaction faible, elle est l'analogue de la charge élémentaire e . Elle sera introduite au chapitre 10. Elle vaut :

$$g_W = \frac{e}{\sin \theta_W},$$

où $\sin \theta_W \simeq 0,481$. La constante de couplage faible est du même ordre de grandeur que celle de l'électromagnétisme. La formule donnant Γ_μ montre clairement que c'est la masse du boson W qui réduit son intensité.

On peut vérifier que dans ce processus, les lois de conservation sont vérifiées entre l'état initial et l'état final. Cependant, on notera que dans la désintégration du muon, le diagramme de Feynman comprend l'échange d'un W , alors que sa masse est bien plus grande que celle du muon. On dit qu'on échange une particule virtuelle (voir paragraphe 7.8.6 page 138). Insistons ici sur le fait que les lois de conservation ne s'appliquent en globalité qu'entre l'état initial et l'état final.

9.2.2 Interaction faible et quarks

L'interaction faible peut changer tout quark de charge $2/3$ en tout quark de charge $-1/3$, et vice-versa, et de même pour les antiquarks. L'échange d'un W mélange donc les familles de quarks. C'est une différence notable par rapport aux leptons : l'interaction faible ne permet pas la transformation d'un lepton en un autre neutrino que son neutrino associé. La raison est que la saveur des quarks a historiquement été définie par leur production par interaction forte. La matrice qui décrit les transitions dues à l'interaction faible entre les quarks de charge $2/3$ et les quarks de charge $-1/3$ n'a aucune raison d'être diagonale pour ces états. Cette matrice de mélange des quarks s'appelle la matrice de Cabibbo, Kobayashi et Maskawa ou matrice CKM. Par contre, les neutrinos observés sont produits par interaction faible à partir des leptons chargés, où ils produisent par interaction faible ces mêmes leptons. Ils diagonalisent par définition la matrice de transition due à l'échange d'un boson W .

Remarque. *Cependant, a contrario, ce ne sont pas les états propres de masse, puisque celle-ci est donnée par l'interaction avec le boson de Higgs. De ce fait, si on produit un neutrino électron, il peut après propagation devenir un mélange des trois types de neutrinos : c'est le phénomène d'oscillation des neutrinos (voir exercice 9.d). Il y a donc aussi une matrice de mélange des neutrinos, dite matrice Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata, ou matrice PMNS.*

Ces vertex d'interaction faible entre quarks sont représentés ci-dessous :

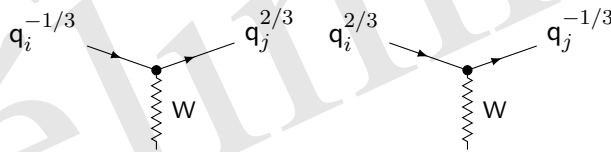


FIGURE 9.3 – Vertex W quarks : i et j sont les numéros des familles de particules (1, 2 ou 3).

En combinant les vertex des leptons et des quarks, on voit que le processus $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$ est possible. La désintégration du neutron correspond à la transformation d'un quark u en quark d au sein du neutron. Elle est schématiquement représentée figure 9.4. Toutes les formes de désintégration β des noyaux peuvent se représenter de façon similaire.

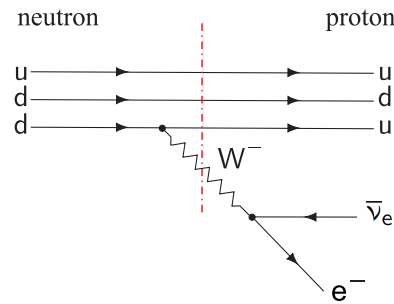


FIGURE 9.4 – Désintégration du neutron.

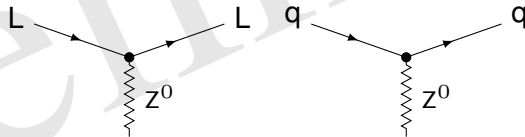
Remarque. Comme on l'a vu au chapitre 7, les vertex correspondent à des termes d'interaction entre des champs d'opérateurs dans le lagrangien; ils peuvent être tournés et inversés pour obtenir les divers processus d'émission ou d'absorption, avec les particules ou les antiparticules, l'orientation des flèches indiquant la direction du flux de charge leptonique ou baryonique.

9.3 Courants neutres : boson Z^0

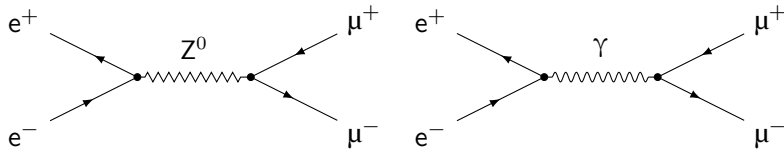
L'interaction dite à courant neutre procède :

- par échange d'un boson Z^0 : dans ce cas, le lepton ou le quark ne change pas de nature; il n'y a pas de mélange des familles par ce processus;
- ou par annihilation/création d'un boson Z^0 et création/annihilation d'une paire lepton-antilepton ou d'une paire quark-antiquark.

Les vertex qui permettent ces processus sont représentés 9.5.

FIGURE 9.5 – Vertex Z^0 leptons et quarks.

La création d'une paire (μ^-, μ^+) par annihilation (e^-, e^+) peut ainsi se faire par échange d'un photon ou par échange d'un Z^0 (figure 9.6). Le processus qui domine dépend de l'énergie dans le centre de masse de la réaction : à basse énergie, c'est l'échange d'un photon, à une énergie proche de l'énergie de masse du Z^0 , c'est l'échange d'un Z^0 . À très haute énergie, les amplitudes des deux processus sont du même ordre de grandeur.

FIGURE 9.6 – Annihilation et création de paire par échange d'un γ ou d'un Z^0 .

9.4 Interactions entre bosons vecteurs

Alors que le photon ne porte pas de charge, les bosons W portent une charge électrique et un isospin faible (de valeur $+1$ pour le W^+ et -1 pour le W^-). De ce fait ils interagissent entre eux, avec les photons et avec le Z^0 . La raison est la même que pour les gluons vue au chapitre 8. Le groupe de jauge de l'interaction électrofaible est non abélien, comme on le verra au chapitre 10. Il y a donc des vertex à trois bosons (figure 9.7) et à quatre bosons (figure 9.8). L'interaction faible et l'interaction électromagnétique sont intriquées, c'est pourquoi les γ sont présents dans ces vertex à plusieurs bosons.



FIGURE 9.7 – Vertex à trois bosons.

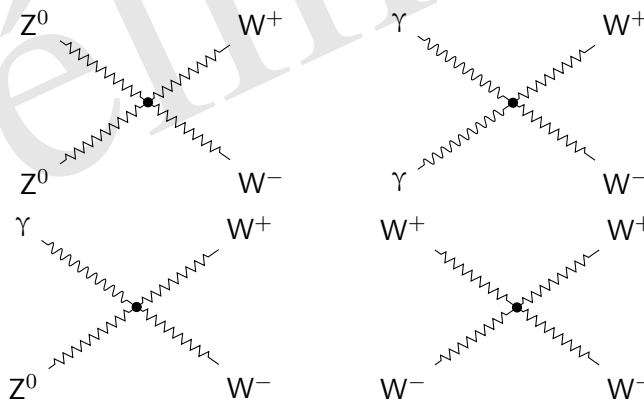


FIGURE 9.8 – Vertex à quatre bosons.

9.5 Neutrinos

9.5.1 La prédiction par Pauli

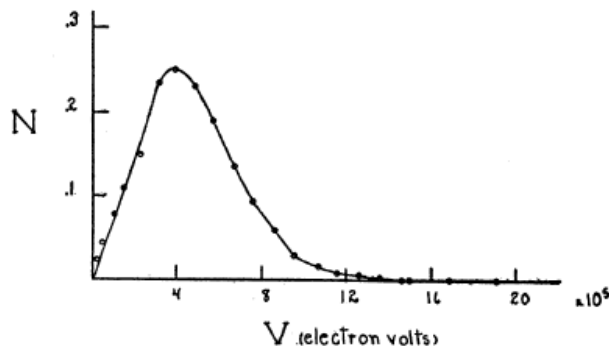


FIGURE 9.9 – Spectre en énergie des rayons β issus de la désintégration du radium E. *Figure extraite de F.A. Scott, Phys. Rev. 48, 391-395, Copyright (1935), reproduction autorisée par American Physical Society.*

Dès 1911, l'étude des désintégrations radioactives pose quelques problèmes d'interprétation : on observe un spectre continu pour l'électron émis dans les désintégrations β , alors que seules deux particules semblent émises. Dans ce cas leur impulsion devrait être complètement déterminée (voir paragraphe 9.5.2.1). De plus, le moment angulaire total ne semble pas non plus conservé. Les mesures, quoique encore très imprécises, semblaient en contradiction avec la conservation de l'énergie impulsion et du moment angulaire !

Ce mystère a perduré très longtemps, et il a fallu attendre 1930 pour que Pauli propose une solution : l'émission d'une particule neutre légère non détectée. Avec ce nouveau degré de liberté, il n'y a plus de problème pour les lois de conservation (paragraphe 9.5.2.2). Fermi appellera cette particule le neutrino en 1933 et l'intégrera à sa théorie des interactions faibles. La proposition de Pauli était d'autant plus audacieuse qu'à l'époque le neutron n'était pas encore découvert, et les seules particules élémentaires connues étaient le proton et l'électron (et le photon). Le neutrino n'a été mis en évidence qu'en 1956 par Reines et Cowan (en fait l'antineutrino électron $\bar{\nu}_e$). La figure 9.9 montre une des premières mesures précises du spectre des rayons β issus de la désintégration du bismuth 210 (appelé radium E à l'époque) en polonium accompagné d'un électron : $\text{Bi} \rightarrow \text{Po} + e^-$.

9.5.2 Désintégrations en deux et trois corps

L'étude des désintégrations radioactives a conduit Pauli à postuler l'existence du neutrino. Nous donnons dans ce paragraphe une caractéristique qui distingue

les désintégrations en deux et trois corps pour comprendre une partie de l'argumentation de Pauli.

9.5.2.1 Désintégration à deux corps

Considérons un noyau i se désintégrant en un noyau f et une particule 1. Dans le repère du noyau i , la conservation de l'énergie impulsion s'écrit :

$$\vec{p}_f = -\vec{p}_1 \Rightarrow m_i c^2 = \sqrt{m_f^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2}.$$

Cette équation a une solution unique pour $p_1 > 0$, si $m_f + m_1 \leq m_i$. Les particules émises sont donc monoénergétiques.

9.5.2.2 Désintégration à trois corps

Considérons à présent un noyau i se désintégrant en un noyau f , une particule 1 et une particule 2. La conservation de \vec{p} entraîne que \vec{p}_f , \vec{p}_1 , et \vec{p}_2 sont coplanaires dans le repère du noyau i . Outre l'orientation globale du système des trois corps (trois angles arbitraires), cinq paramètres caractérisent encore la désintégration (figure 9.10) : $|\vec{p}_f|$, $|\vec{p}_1|$, $|\vec{p}_2|$, θ_1 , θ_2 .

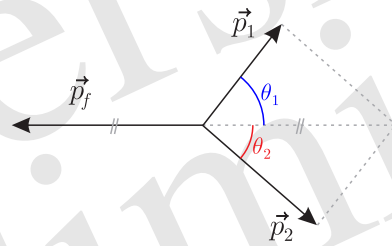


FIGURE 9.10 – Paramètres dans le plan de la désintégration en trois corps.

Or, il reste seulement trois contraintes : conservation de l'énergie et de l'impulsion dans le plan de désintégration. Ces deux degrés de liberté conduisent à un spectre continu en énergie des particules émises.

9.5.3 Propriétés des neutrinos

Les neutrinos étant des leptons sans charge électrique, ils ne sont sensibles qu'à l'interaction faible (et à la gravitation, comme toutes les particules), et c'est pourquoi ils ont si longtemps échappé à la détection.

La section efficace d'interaction des neutrinos dépend fortement de leur énergie. Pour les neutrinos issus d'une centrale nucléaire (qui sont en fait des $\bar{\nu}_e$), la section

efficace d'interaction sur les nucléons est une fraction de 10^{-43} cm^2 , soit une fraction de 10^{-19} b ! Leur libre parcours moyen dans l'eau est donc de l'ordre de :

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{M_N}{N\rho\sigma} \sim \frac{10^{-3}}{6 \times 10^{23} \times 1000 \times 0,5 \times 10^{-43} \times 10^{-4}} \sim 4 \times 10^{17} \text{ m} !$$

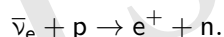
Les neutrinos s'échappent pratiquement tous du réacteur sans interagir. La Terre elle-même leur est quasiment transparente !

9.5.4 Utilisation des neutrinos

Malgré leur faible section efficace d'interaction, il est possible d'en détecter quelques-uns si le flux est très intense, ce qui est le cas près d'un réacteur nucléaire. On verra au chapitre ?? que l'énergie dégagée par la fission d'un noyau d'uranium est d'environ 200 MeV, et que le nombre moyen de neutrinos émis est de 2,5. Ainsi, le flux de neutrinos émis par un réacteur de 100 MW (puissance thermique produite dans le cœur) vaut :

$$\frac{100 \times 10^6 \times 2,5}{200 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}} \sim 8 \times 10^{18} \text{ neutrinos/s} \sim 7 \times 10^{23} \text{ neutrinos/jour.}$$

On peut détecter les interactions de ces antineutrinos dans la matière grâce à la réaction :



Le positron s'annihile rapidement avec un électron et on observe l'émission de deux rayons gamma. De son côté, le neutron peut exciter un noyau qu'il percute. En se désexcitant, ce noyau émet lui aussi un rayonnement détectable.

Si on place un détecteur approprié, de densité 0,8, de dimensions $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, et situé à 10 m du cœur pour fixer les idées, le nombre de neutrinos détectés (on prend une longueur d'interaction dans l'eau de $4 \times 10^{17} \text{ m}$) vaut, pour une efficacité de détection de 30 % :

$$7 \times 10^{23} \times \underbrace{\frac{1 \times 1}{4\pi \times 10^2}}_{\text{acceptance du détecteur}} \times \underbrace{\frac{0,8}{4 \times 10^{17}}}_{\text{probabilité d'interaction}} \times \underbrace{0,3}_{\text{efficacité de détection}} \sim 300 \text{ détections/jour.}$$

Comme le spectre et le flux des neutrinos issus d'un réacteur nucléaire dépendent de sa composition, cette méthode permet de mesurer la teneur en plutonium du cœur. Cette possibilité pourrait être exploitée pour contrôler les flux de plutonium dans les réacteurs nucléaires et éviter son détournement pour un usage militaire.

On peut aussi utiliser les neutrinos pour « radiographier » la Terre : voir l'exercice détaillé ??.

9.6 Violation des symétries discrètes P , C , T

On appelle symétrie discrète une opération de symétrie (transformation qui respecte les distances et les normes des états, on parle d'isométrie en mathématiques) qui ne dépend pas d'un paramètre continu, au contraire par exemple des rotations ou des translations. Ces symétries jouent un rôle important en physique, puisqu'elles imposent des propriétés très générales sur les systèmes et les phénomènes qui les respectent, c'est-à-dire dont l'image transformée par une telle symétrie est aussi un système ou un phénomène observable.

L'interaction faible est la seule interaction qui ne respecte pas les symétries discrètes que nous allons discuter : la parité (symétrie par rapport à un point), la conjugaison de charge (transformation d'une particule en son antiparticule), le renversement du mouvement, improprement appelé renversement du temps.

9.6.1 Parité

9.6.1.1 Définition

Dans la description classique, la transformation d'un système par parité, notée P , est le changement des coordonnées d'espace par leurs opposées (opération de symétrie par rapport à un point pris comme origine des coordonnées) :

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}.$$

Cette transformation est équivalente à une rotation de π autour de l'axe Ox suivie d'une symétrie par rapport au plan $x = 0$, c'est pourquoi on parle souvent de l'opération parité comme de la symétrie miroir.

En mécanique quantique, on postule qu'il existe un opérateur P , unitaire, qui représente l'opération P de l'espace à trois dimensions dans l'espace de Hilbert des états. Il transforme la fonction d'onde d'un système physique en celle de son symétrique par rapport à un point (qu'on prend comme origine des coordonnées) :

$$\psi'(-\vec{r}) = P\psi(\vec{r}).$$

9.6.1.2 Propriétés

Transformation des quantités physiques

Le tableau 9.1 précise l'effet de cette transformation sur diverses quantités physiques importantes. On notera qu'il existe deux sortes de vecteurs :

- les vecteurs polaires dont la définition est intrinsèque et qui se transforment donc en leur opposé sous l'action de P . La position, l'impulsion sont de tels vecteurs ;

- les vecteurs axiaux, ou pseudo vecteurs qui sont inchangés sous l'action de P . L'origine de cette invariance vient du fait qu'ils sont définis comme le produit vectoriel d'un nombre pair de vecteurs polaires. Le spin est par ailleurs nécessairement un vecteur axial, à cause des relations de commutations que l'on peut écrire (attention, le produit vectoriel d'un opérateur par lui-même n'est pas nécessairement nul, au contraire des vecteurs ordinaires) :

$$\hat{\vec{S}} \wedge \hat{\vec{S}} = i\hbar\hat{\vec{S}}.$$

Grandeur	Définition	Effet de P
Quantité de mouvement	$\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$
Énergie	$\mathcal{E} = p^2/2m$ ou $\mathcal{E} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$	$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$
Moment angulaire	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\vec{L} \rightarrow \vec{L}$
Spin	\vec{S}	$\vec{S} \rightarrow \vec{S}$
Champ électrique	$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$	$\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$
Champ magnétique	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r}}{r^3}$	$\vec{B} \rightarrow \vec{B}$

TABLE 9.1 – Action de l'opérateur P sur différentes quantités physiques.

Valeurs propres de l'opérateur P

Par définition, l'opérateur parité est tel que son action répétée un nombre pair de fois donne l'identité. Par exemple $P^2 = I$, on en déduit que :

$$P = P^{-1} = P^\dagger.$$

L'opérateur P est donc unitaire et hermitien : ses valeurs propres sont $+1$ et -1 . On parle de « parité » pour un système si ses états sont des états propres de P .

Parité intrinsèque

On admettra qu'on peut définir la parité intrinsèque d'une particule. Elle est égale à $+1$ ou -1 . Elle est conventionnellement fixée à $+1$ pour les leptons et les quarks, et elle est déterminée expérimentalement pour les autres systèmes. La parité intrinsèque d'un système composite est le produit des parités intrinsèques de ses composantes.

Transformation des fermions de spin 1/2

Soit un fermion représenté par une fonction d'onde de Dirac à quatre composantes $\psi(x)$. Posons $\psi'(x') = P\psi(x)$, on peut facilement déterminer l'action de P sur la densité de courant $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ associée à ce fermion :

$$j'^\mu = \psi^\dagger P^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P \psi. \quad (9.1)$$

On sait par ailleurs que j^μ est un quadrivecteur, et qu'il doit donc se transformer comme suit dans un changement de référentiel (ce qu'est une transformation de parité...):

$$\text{si } j^\mu = (j^0, \vec{j})^\top \text{ alors } j'^\mu = (j^0, -\vec{j})^\top. \quad (9.2)$$

La phase est conventionnelle, on peut concilier les contraintes (9.1) et (9.2) en prenant pour P l'opérateur représenté par la matrice γ^0 .

Appliquons alors $P = \gamma^0$ aux spineurs u et v au repos (voir paragraphe 5.5 page 85) :

$$\gamma^0 u^{1,2} = u^{1,2} \text{ et } \gamma^0 v^{1,2} = -v^{1,2}.$$

Pour une impulsion quelconque \vec{p} et pour $i = 1, 2$ on aura donc :

$$Pu_{\vec{p},i} = u_{-\vec{p},i} \text{ et } Pv_{\vec{p},i} = -v_{-\vec{p},i}.$$

On constate que les fermions et les antifermions ont des parités intrinsèques opposées. Ainsi, un système fermion-antifermion, comme par exemple le pion, a une parité intrinsèque (-1) .

9.6.2 Invariance par parité

Les lois de la mécanique classique et de l'électromagnétisme sont invariantes par l'opération de parité : l'évolution d'un système physique transformé par parité obéit aux-mêmes lois que le système initial.

En mécanique quantique, les lois d'évolution sont invariantes par parité si, pour tout système :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r}, t) \quad \text{et} \quad i\hbar \frac{\partial P\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = HP\psi(\vec{r}, t),$$

Par définition l'opérateur P ne dépend pas explicitement du temps, il commute donc avec ∂_t . L'invariance des lois d'évolution par parité se traduit donc par : $[H, P] = 0$.

En conséquence, si l'état d'un système est un état propre de P , et si les lois d'évolution sont invariantes par parité, alors la parité du système est conservée au cours du temps.

9.6.3 Violation de P dans les interactions faibles

La non conservation (on dit aussi « violation ») de la parité dans les interactions faibles a été postulée en 1956 par Lee et Yang, pour résoudre un puzzle expérimental, le « puzzle $\theta - \tau$ » (1953) : les physiciens observaient des particules de même masse, de même charge, de même spin (nul), et de même durée de vie, mais se désintégrant certaines en un système de deux pions, d'autres en un système de trois pions :

$$\theta^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad ; \quad \tau^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+.$$

Or, la parité intrinsèque des pions, systèmes fermion-antifermion, est -1 . Le système de deux pions a une parité positive, le système de trois pions a une parité négative. Si la désintégration respecte la parité, on est donc en présence de deux particules différentes mais dont les autres propriétés sont les mêmes ! C'est ce qui a conduit Lee et Yang à postuler la non conservation de la parité dans la désintégration : le θ et le τ sont en fait la même particule, appelée aujourd'hui le K^+ , mais la parité n'est pas conservée par la désintégration. La longue durée de vie de ces particules indiquait que la désintégration était due à l'interaction faible, et non à l'interaction forte.

Cette hypothèse a été vérifiée expérimentalement par l'observation de la distribution angulaire des électrons émis lors de la désintégration β^- (transformation d'un neutron en proton avec émission d'un électron et d'un antineutrino électronique) de noyaux de cobalt 60 (Wu et al, 1957) placés dans un champ magnétique :



Dans le champ magnétique, les spins des noyaux s'orientent préférentiellement dans la direction du champ. Si on se place dans le centre de masse du noyau, on observe que les électrons sont émis préférentiellement dans la direction opposée au spin nucléaire. Si on applique l'opération de parité en prenant le noyau comme centre, l'expérience résultante est identique pour le champ magnétique et le spin du noyau, mais les électrons sont cette fois émis préférentiellement dans la direction du champ magnétique, en contradiction avec l'expérience réelle : c'est la preuve que la parité n'est pas conservée dans la transition.

Il est intéressant de remarquer que, de ce fait, on peut définir de manière absolue la droite et la gauche : si on imagine que le champ magnétique est créé par un solénoïde et qu'on place un observateur d'Ampère sur le fil conducteur et regardant vers l'intérieur, alors la droite est le côté vers lequel partent majoritairement les électrons.

Notons enfin qu'aucune violation de parité n'a été observée à ce jour dans les interactions électromagnétique et forte.

9.6.4 Conjugaison de charge

Définition

L'opérateur conjugaison de charge, noté C , est l'opérateur qui transforme une particule en son antiparticule. Il laisse les coordonnées d'espace et de temps inchangées, et agit sur les nombres quantiques internes :

- la charge électrique Q , le nombre leptonique L et le nombre baryonique B , qui sont inversés par la conjugaison de charge :

$$C(Q) = -Q, \quad C(L) = -L, \quad C(B) = -B ;$$

- la couleur ;
- l'isospin faible.

Transformation des fermions de spin 2

Dans la représentation de Dirac, l'opérateur C agit sur les bispineurs selon la définition :

$$C(\psi(x)) = i\gamma^2\psi^*(x).$$

En effet, si $\psi(x)$ représente un fermion de masse m et de charge q dans un champ électromagnétique, il vérifie l'équation de Dirac (voir chapitre 3) :

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) \psi = m\psi.$$

En conjuguant cette équation et en multipliant des deux cotés par $i\gamma^2$ il vient

$$(i\gamma^2) \gamma^{\mu*} (-i\partial_\mu - qA_\mu) \psi^* = (i\gamma^2) m\psi^*.$$

On vérifie alors sans peine que $(i\gamma^2) \gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu (i\gamma^2)$ et qu'ainsi

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu + qA_\mu) (i\gamma^2) \psi^* = m (i\gamma^2) \psi^*,$$

ce qui montre que $i\gamma^2\psi^*(x)$ représente un fermion de même masse et de charge $-q$, c'est l'antifermion associé : le conjugué de charge de celui représenté par $\psi(x)$ comme annoncé.

On notera que l'opérateur C est antiunitaire : $C(\lambda\psi) = \lambda^*C(\psi)$.

9.6.5 Violation de C dans les interactions faibles

Encore une fois, l'interaction faible, au contraire des autres interactions, viole la symétrie C . Cette violation est flagrante dans la désintégration des π^+ et des π^- : on constate expérimentalement que le spin du μ^- émis par la désintégration du π^- est dans la direction de sa quantité de mouvement, alors que le spin du μ^+ émis par la désintégration du π^+ est opposé à sa quantité de mouvement. Si on applique l'opération C sur l'une ou l'autre de ces désintégrations, on obtient un phénomène qui n'est pas conforme à l'expérience (voir figure 9.11).

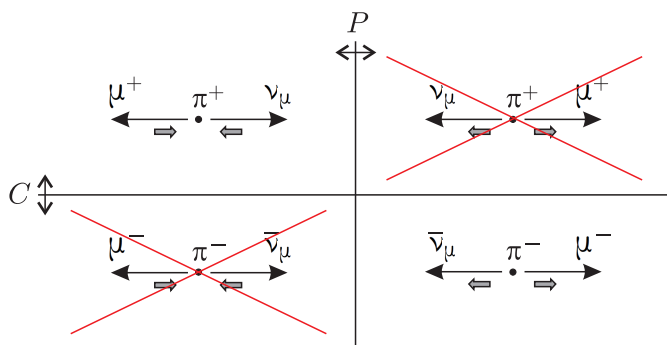


FIGURE 9.11 – Désintégration des pions chargés. La direction des spins des particules est indiquée par une double flèche courte, celle des quantités de mouvement par une simple flèche. Les transitions qui ne sont jamais observées sont barrées. Elles peuvent être obtenues par les opérations P ou C sur les transitions observées, ce qui démontre que ni C ni P ne sont conservées dans ces processus dus à l'interaction faible.

9.6.6 Transformation CP

Cependant, si on applique les deux transformations C et P , on constate que l'on retombe sur une situation physiquement observable. Jusqu'en 1964, on a cru que les interactions faibles respectaient la symétrie par la transformation produit CP . Cette année là, Christenson, Cronin, Fitch et Turlay ont montré que même cette symétrie combinée (CP) était (faiblement) violée dans la désintégration des mésons K en deux et trois pions, et ce encore une fois à cause de l'interaction faible.

La violation de CP est une des trois conditions énoncées par Sakharov en 1967 pour expliquer l'asymétrie matière antimatière dans l'Univers. Le modèle standard accommode la violation de CP grâce au processus de mélange des familles dans les interactions faibles et au mécanisme de génération des masses des particules. Mais l'amplitude de cette violation est de nombreux ordres de grandeur trop petite pour expliquer l'asymétrie matière antimatière dans l'Univers, dont l'origine reste une des questions fondamentales de la physique aujourd'hui.

9.6.7 Renversement du temps

Définition

L'opérateur T dit de renversement du temps est plutôt un opérateur qui renverse le mouvement.

Soit un système décrit par le hamiltonien $H(q, p)$ où q sont des coordonnées généralisées et p les impulsions correspondantes. Le système évolue de $t = -t_1$

à $t = t_1$. Le « renversement du temps » consiste à renverser le mouvement à l'instant t_1 : $q(t_1) \rightarrow q'(t_1) = q(t_1)$ et $p(t_1) \rightarrow p'(t_1) = -p(t_1)$, et on définit $t' = -t$.

Micro-réversibilité

Le système est invariant par renversement du temps si à l'instant $t' = t_1$ il retrouve ses coordonnées initiales et ses moments initiaux inversés : $q'(t') = q(-t)$ et $p'(t') = -p(-t)$.

Le mouvement est décrit par le hamiltonien : $H'(q', p') = H(q, -p)$ grâce aux équations de Hamilton :

$$\frac{dq'}{dt'} = + \frac{\partial H'}{\partial p'} \quad \text{et} \quad \frac{dp'}{dt'} = - \frac{\partial H'}{\partial q'}.$$

Le plus souvent H est quadratique en p , alors $H' = H$ et le système est donc invariant par renversement du temps.

C'est le cas pour les systèmes décrits par la mécanique classique. C'est la micro-réversibilité. En présence d'un champ électromagnétique, l'opération de « renversement du temps » change le signe du potentiel vecteur \vec{A} car il a pour origine un mouvement de charges, et laisse le potentiel V inchangé.

En mécanique quantique, l'opérateur T est défini par :

$$\psi'(t', \vec{x}') = T\psi(t, \vec{x}) = \psi^*(-t, \vec{x}).$$

La micro-réversibilité est alors assurée si $H^* = H$:

$$i \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial t} = H\psi(t, \vec{x}) \Leftrightarrow -i \frac{\partial \psi^*(t, \vec{x})}{\partial t} = H^*\psi^*(t, \vec{x}) \Leftrightarrow i \frac{\partial \psi^*(t', \vec{x}')}{\partial t'} = H^*\psi^*(t', \vec{x}').$$

Comme H est une observable, on a nécessairement $H = H^\dagger$, mais l'égalité $H^* = H^\dagger$ n'est pas nécessairement assurée pour un opérateur agissant dans un espace à plusieurs dimensions et donc représenté par une matrice complexe. On notera que T est un opérateur antiunitaire :

$$\langle Ta | Tb \rangle = \langle b | a \rangle \quad \text{et} \quad T|\lambda a\rangle = \lambda^* T|a\rangle.$$

Transformation des quantités physiques

L'action de T sur les différentes quantités physiques est :

- coordonnées d'espace-temps : $t \rightarrow -t$; $\vec{r} \rightarrow \vec{r}$;
- énergie-impulsion : $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$; $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$
- moment cinétique : $\vec{L} \rightarrow -\vec{L}$; $\vec{S} \rightarrow -\vec{S}$;
- champs électrique et magnétique : $V \rightarrow V$; $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$.

Transformation des fermions de spin 1/2

On montre (exercice 9.a) de façon analogue aux paragraphes précédents que l'opérateur reversement du temps agissant sur les fermions comme :

$$T\psi(t, \vec{x}) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, \vec{x})$$

et laisse invariante l'équation de Dirac.

On montre aussi (exercice 9.a) que $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ se transforme comme on s'y attend pour une densité de courant de charge :

$$T(j^0, \vec{j})^\top = (j^0, -\vec{j})^\top.$$

9.6.8 Violation de T dans les interactions faibles

Seules les interactions faibles violent (faiblement) T . Cette violation de symétrie a exactement la même origine que la violation de CP , mélange des familles par les interactions faibles et mécanisme de génération des masses.

9.6.9 Théorème CPT

On peut démontrer que toute théorie des champs locale, invariante par transformation de Lorentz et décrite par un hamiltonien hermitien respecte la symétrie par l'opération CPT , combinaison des trois symétries discrètes C , P et T .

Ainsi il n'est pas surprenant, si le cadre théorique offre une bonne description de la réalité, que l'interaction faible viole T puisqu'elle viole CP et qu'elle doit respecter CPT .

À retenir dans le chapitre 9

- caractéristiques de l'interaction faible :
 - universalité,
 - intensité,
 - transformation des particules;
- isospin faible et hypercharge;
- bosons vecteurs massifs W^+ , W^- , Z^0 ;
- vertex de l'interaction faible;
- propriétés des neutrinos;
- violation des symétries discrètes P , C , T ;
- violation de CP , théorème CPT .

9.7 Exercices

Exercice 9.a – Symétries discrètes

Montrer que l'équation de Dirac est invariante par les transformations de parité, de conjugaison de charge et de renversement du temps.

Exercice 9.b – Renversement du temps

1. Montrer que l'opérateur T de renversement du temps agit sur les fermions en transformant leur fonction d'onde selon la règle : $T\psi(t, \vec{x}) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, \vec{x})$ et qu'il laisse invariante l'équation de Dirac.
2. Montrer que $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ se transforme comme :

$$T(j^0, \vec{j})^\top = (j^0, -\vec{j})^\top$$

Exercice 9.c – Parité intrinsèque

Le π^0 est un méson de spin nul. Il se désintègre par interaction électromagnétique en deux photons. On se place dans le référentiel du π^0 .

1. Montrer que les deux photons ont la même hélicité.

On admet que le photon n'a que deux hélicités possibles (+1 et -1). Les états d'hélicités possibles normalisés des deux photons sont notés $|1, 1\rangle$ et $|-1, -1\rangle$.

2. Montrer que l'opérateur parité P échange ces deux états d'hélicité.

Le π^0 est état propre de P . On cherche à déterminer la valeur propre associée à cet état propre. On la nomme parité intrinsèque du π^0 .

3. Dédurre de la question 2 les deux états finals possibles normalisés pour les deux photons sous forme d'une combinaison linéaire des états $|1, 1\rangle$ et $|-1, -1\rangle$.

On note $|+\rangle$ (resp. $|-\rangle$) l'état correspondant à la valeur propre +1 (resp. -1). Les états d'hélicité définie d'un photon correspondent aux états polarisés circulairement. On peut aussi polariser les photons linéairement suivant les axes x et y perpendiculaires à leur direction de propagation. On note $|x\rangle$ l'état polarisé suivant x et on a : $|x\rangle = (|-1\rangle - |+1\rangle)/\sqrt{2}$. De même : $|y\rangle = i(|-1\rangle + |+1\rangle)/\sqrt{2}$ (les facteurs de phase sont conventionnels).

4. Montrer les relations :

$$\begin{cases} |+\rangle = (|x, x\rangle - |y, y\rangle)/\sqrt{2} \\ |-\rangle = i(|x, y\rangle + |y, x\rangle)/\sqrt{2} \end{cases} .$$

5. On mesure la polarisation linéaire des deux photons et on trouve qu'ils ont des polarisations linéaires différentes. En déduire la parité intrinsèque du π^0 .

Exercice 9.d – Oscillation des neutrinos

Dans cet exercice, sauf mention contraire, on utilise les unités naturelles. On suppose de plus que les neutrinos sont de masse nulle ou très petite (inférieure à quelques eV/c^2).

1. Désintégration du pion chargé

On considère la désintégration d'un pion chargé au repos : $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$.

- (a) Calculer l'énergie E_1 du neutrino émis en fonction des masses m_π et m_μ du pion et du muon. Pour cette question, on négligera la masse du neutrino.

A.N. : On donne : $m_\pi = 139,6 \text{ MeV}/c^2$, et $m_\mu = 105,7 \text{ MeV}/c^2$.

2. Propagation des neutrinos dans le vide

On suppose que le neutrino est émis dans la direction x et on supposera qu'il se propage dans le vide sous la forme d'une onde plane $\psi(t, x) = \exp[i(E_1 t - p_1 x)] |\nu_1\rangle$, où $|\nu_1\rangle$ est la fonction d'onde initiale du neutrino de masse m_1 (on sait que c'est plutôt un paquet d'ondes qui décrit cette propagation, mais la description en onde plane suffit pour le phénomène étudié ici).

En fait, lors de la désintégration du pion, le neutrino émis est un ν_μ , une superposition des états propres de masse m_1 , m_2 et m_3 : $|\nu_\mu\rangle = \alpha |\nu_1\rangle + \beta |\nu_2\rangle + \gamma |\nu_3\rangle$.

Les masses des neutrinos ont pour origine leur interaction avec le champ de Higgs et d'autres effets quantiques, et il n'y a aucune raison pour que l'état produit par interaction faible soit un état propre de masse.

On suppose que l'on peut négliger la contribution d'un des trois états propres, et on écrit : $|\nu_\mu\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle$. On appelle θ l'angle de mélange. Les deux neutrinos ν_1 et ν_2 ont la même énergie.

On notera m_2 la masse du ν_2 .

- (a) Écrire la fonction d'onde décrivant l'évolution du ν_μ dans le vide en fonction de $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$, x , t , de l'angle de mélange, des énergies et des masses.
- (b) Sachant que $\langle \nu_2 | \nu_1 \rangle = 0$, en déduire la probabilité P de mesurer le neutrino dans l'état ν_μ à la distance L de sa création. On supposera que les deux neutrinos se propagent à la vitesse de la lumière ($L = t$). On se limitera à un développement limité à l'ordre 2 sur la masse des neutrinos. On exprimera P en fonction de L , E (énergie des neutrinos), $\sin^2(2\theta)$ et Δm^2 , où $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$. On mettra P sous la

forme :

$$P = 1 - f(\theta) \times g(m_1, m_2, L, E),$$

où $E = E_1 = E_2$ et f et g sont des fonctions réelles. Cette formule justifie le nom d'oscillations donné à l'observation de ce phénomène de disparition apparente des neutrinos produits.

- (c) Rétablir les constantes \hbar et c dans la relation donnant P .
- (d) On exprime la masse des neutrinos en eV/c^2 , leur énergie en GeV, et les distances en km. Écrire P en fonction de $\sin^2(2\theta)$ et de $\sin^2(K \times \Delta m^2 L/E)$, où K est une constante numérique que l'on calculera.
- (e) A.N. : calculer P avec $\theta = 45^\circ$, $\Delta m^2 = 3 \times 10^{-3} (\text{eV}/c^2)^2$ et $E = 1 \text{ GeV}$ pour $L = 15 \text{ km}$ et $L = 13\,000 \text{ km}$.

3. Anomalie des neutrinos atmosphériques

Les rayons cosmiques qui pénètrent dans l'atmosphère (d'épaisseur inférieure à 15 km) produisent des gerbes de particules, et notamment des pions chargés qui se désintègrent eux-mêmes et créent ainsi des ν_μ . Ces neutrinos ont une énergie typique de 1 GeV. Un détecteur à la surface de la Terre détectera une petite fraction de ces neutrinos. La section efficace d'absorption des neutrinos par les nucléons dans la matière est $\sigma \approx 10^{-42} \text{ m}^2$ à cette énergie.

- (a) Quel est le pourcentage des neutrinos en provenance de $\theta = 180^\circ$ absorbés par la Terre (θ est l'angle zénithal, angle entre la direction d'où vient le neutrino et la verticale montante)? On rappelle que la Terre a un rayon d'environ 6400 km. On prendra une masse volumique moyenne pour la Terre de $5,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.
- (b) Le rapport des flux mesurés flux ($\theta = 180^\circ$)/flux ($\theta = 0^\circ$) de ν_μ après correction d'angle solide est d'environ 60 %. C'est ce qui a été appelé l'anomalie des neutrinos atmosphériques. Dans le cadre du modèle de la partie 2 de cet exercice, peut-on en conclure que les neutrinos ont une masse?

C'est une des mesures qui a été récompensée par le prix Nobel de physique 2015.

Chapitre 10

Modèle standard

10.1 Quel groupe de jauge pour les interactions faibles ?

10.1.1 Introduction

Les deux processus élémentaires intervenant dans la désintégration du neutron :

$$d \rightarrow W^- + u \quad \text{et} \quad W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$

sont très analogues aux deux processus forts :

$$q_r \rightarrow \text{gluon} + q_b \quad \text{et} \quad \text{gluon} \rightarrow \bar{q}'_b + \bar{q}'_r$$

où q et q' peuvent être n'importe lesquels des 6 quarks. L'analogie consiste à remplacer les échanges $e^- \leftrightarrow \bar{\nu}_e$ et $d \leftrightarrow u$ via le W^- par les échanges de couleurs entre quarks via les gluons.

Depuis le chapitre 8, nous savons que les échanges de couleurs se font à travers des éléments du groupe $SU(3)$ qui doivent laisser invariant le lagrangien QCD. Si nous poursuivons l'analogie, le lagrangien décrivant l'interaction faible devrait être conservé par une transformation mettant en jeu un élément de $SU(2)$ agissant sur les paires $\{u, d\}$ ou $\{e^-, \nu_e\}$, en supposant d'une part que les quarks u et d ou les leptons e^- et ν_e portent un nombre quantique interne ne pouvant prendre que deux valeurs, comme un spin, et d'autre part que la transformation de jauge agit sur cet espace à deux dimensions. On appelle ce nombre quantique **isospin faible**. Le groupe $SU(2)$ étant un groupe de Lie à trois paramètres réels indépendants, l'invariance de jauge conduit à l'introduction de trois bosons vecteurs, comme c'est observé dans l'interaction faible.

Malheureusement, la violation de la parité (paragraphe 9.6.3 page 173) ne peut pas être expliquée dans ce cadre trop simple. En effet, on observe que seuls les

neutrinos de spin antiparallèles à leur impulsion sont émis, par exemple dans les désintégrations des pions : $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ (bien sûr, expérimentalement c'est la polarisation du μ^+ qui est observée, celle du neutrino s'en déduit par conservation du moment angulaire total, le pion ayant un spin nul). On mesure de plus un rapport des taux de désintégration :

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e)} \approx 10^4,$$

alors que l'espace de phase est défavorable pour le muon (voir paragraphe 7.4.1 page 116 et exercice 10.d) :

$$\left(1 - (m_\mu/m_\pi)^2\right) \simeq 0.43 < \left(1 - (m_e/m_\pi)^2\right) \simeq 1.$$

L'interaction faible doit imposer la polarisation du neutrino et favoriser la production d'un muon. Ces deux effets sont en fait directement corrélés. Les deux paragraphes qui suivent introduisent les notions de chiralité et d'hélicité pour clarifier ce point.

10.1.2 Chiralité

Commençons par introduire une nouvelle matrice hermitienne :

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que : $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$ et $(\gamma^5)^2 = I_4$, les valeurs propres de γ^5 sont donc +1 et -1.

On appelle état chiral droit (resp. gauche) un état propre u_R (resp. u_L) de l'opérateur représenté par γ^5 pour la valeur propre +1 (resp. -1).

Cette propriété est invariante par transformation de Lorentz propre orthochrone, car γ^5 commute avec $S(\Lambda)$ (voir paragraphe 3.1.3 page 38) puisque :

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \Rightarrow [\gamma^5, \gamma^\mu\gamma^\nu] = 0.$$

On définit les projecteurs $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$ et $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$, ils sont tels que :

$$P_R u_R = u_R, \quad P_L u_L = u_L, \quad P_R u_L = 0, \quad P_L u_R = 0.$$

Tout vecteur u de \mathbb{C}^4 peut donc être décomposé comme la somme d'un état chiral droit et d'un état chiral gauche : $u = u_R + u_L$ avec $u_R = P_R u$ et $u_L = P_L u$.

10.1.3 Hélicité

On définit l'hélicité comme la projection du spin sur la quantité de mouvement, c'est-à-dire :

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{\|\vec{p}\|},$$

en utilisant toujours la notation bien pratique avec laquelle $\vec{\sigma}$ désigne le « vecteur » dont les composantes sont les 3 matrices de Pauli. On peut définir l'opérateur spin pour un spineur de Dirac par la relation :

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}/2 & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}/2 \end{pmatrix}.$$

En effet \vec{S} est un moment cinétique (il en vérifie les relations de commutation) et on montre que $\vec{L} + \vec{S}$ commute avec le hamiltonien de Dirac $H_D = \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \gamma^0 m$, comme il se doit par invariance par rotation (exercice 3.f).

Les neutrinos émis dans la désintégration β des noyaux sont ultrarelativistes. Le champ de Dirac qui les représente dans un repère où \vec{p} est dirigé suivant Oz peut s'écrire :

$$u_{\vec{p},i} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi_i \\ \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right) \chi_i \end{pmatrix} \simeq \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_i \\ \sigma_z \chi_i \end{pmatrix}.$$

dont la projection chirale gauche $u_{\vec{p},i,L} = P_L u_{\vec{p},i}$ s'écrit :

$$u_{\vec{p},i,L} = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_{\vec{p},i} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix} u_{\vec{p},i} = \frac{1}{2} \sqrt{E} \begin{pmatrix} (1 - \sigma_z) \chi_i \\ -(1 - \sigma_z) \chi_i \end{pmatrix}.$$

Cet état est un état propre de l'opérateur hélicité (qui vaut ici S_z) pour la valeur propre $-1/2$:

$$\begin{aligned} S_z u_{\vec{p},i,L} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{E} \begin{pmatrix} (1 - \sigma_z) \chi_i \\ -(1 - \sigma_z) \chi_i \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{E} \begin{pmatrix} (1 - \sigma_z) \chi_i \\ -(1 - \sigma_z) \chi_i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} u_{\vec{p},i,L} \end{aligned}$$

On a bien sûr une propriété similaire avec la projection chirale droite. Dans le paragraphe suivant, nous allons nous attacher à séparer l'action du groupe de jauge sur les composantes gauches et droites.

10.1.4 La solution $SU(2)_L$?

On peut facilement vérifier que l'action de l'opérateur parité (représenté par γ^0 , voir paragraphe 9.6.1) sur un état chirale gauche donne un état chirale droit (et réciproquement) :

$$\gamma^0 \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \gamma^0 u,$$

La diagonalisation de l'espace des états mise en évidence au paragraphe précédent permet donc de comprendre que si on restreint le groupe de transformations de jauge à agir sur les états chiraux gauches, on pourra alors expliquer la violation de la parité dans les désintégrations dues à l'interaction faible. On conservera également l'invariance par les transformations de Lorentz orthochrones.

Plus précisément, on doit imposer que le lagrangien soit seulement invariant sous les transformations des fermions chiraux gauches :

$$d_L \leftrightarrow u_L \quad \text{et} \quad e_L \leftrightarrow \nu_L.$$

Le groupe de jauge est noté $SU(2)_L$.

Malheureusement, cela ne peut pas non plus fonctionner, car les termes de masse des fermions des lagrangiens libres ne sont pas invariants de jauge, pour deux raisons :

- d'une part $m \bar{u}u = m (\bar{u}_R + \bar{u}_L) (u_R + u_L) \neq m (\bar{u}_R u_L + \bar{u}_L u_R)$, qui n'est pas invariant par la transformation $u_L \leftrightarrow d_L$;
- et d'autre part les quarks u et d n'ont pas la même masse, de même pour l'électron et le neutrino.

Les termes de masse ne respectent pas les symétries de jauge nécessaires à la construction de l'interaction faible. La solution est de recourir au mécanisme de Brout-Englert-Higgs, illustré au paragraphe 6.6 page 102 sur un cas beaucoup plus simple, qui permet de donner une masse aux particules sans briser l'invariance du lagrangien.

Malheureusement, cela ne marche pas non plus, car ce mécanisme donne la même masse aux trois bosons vecteurs issus de la définition des dérivées covariantes pour le groupe $SU(2)_L$. Or, on rappelle que les masses mesurées des bosons faibles sont :

$$M_W = 80,4 \text{ GeV}/c^2 \quad ; \quad M_Z = 91,2 \text{ GeV}/c^2.$$

En conclusion, le lagrangien des interactions faibles ne peut être construit à partir du groupe $SU(2)_L$.

	Q/e	T	T_3	Y
$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	0	1/2	1/2	-1
e_L, μ_L, τ_L	-1	1/2	-1/2	-1
$\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$	0	0	0	0
e_R, μ_R, τ_R	-1	0	0	-2
u_L, c_L, t_L	2/3	1/2	1/2	1/3
d_L, s_L, b_L	-1/3	1/2	-1/2	1/3
u_R, c_R, t_R	2/3	0	0	4/3
d_R, s_R, b_R	-1/3	0	0	-2/3

TABLE 10.1 – Charge, isospin, troisième composante de l’isospin, hypercharge pour les fermions élémentaires.

10.2 Théorie électrofaible

L’interaction faible et l’interaction électromagnétique sont étroitement intriquées, on parle de l’interaction électrofaible. Sheldon Glashow, Abdus Salam et Steven Weinberg obtiennent le prix Nobel de physique en 1979 pour leurs contributions à la théorie électrofaible dans les années 60.

Pour construire le lagrangien de la théorie, nous suivons la même démarche que pour le lagrangien QCD (paragraphe 8.3 page 145), en partant d’un groupe de jauge différent.

10.2.1 La solution $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Historiquement, le bon groupe de jauge pour l’interaction électrofaible a été introduit dans le but d’unifier l’interaction faible avec l’interaction électromagnétique, et a permis de prédire l’existence des courants neutres faibles et du boson Z^0 .

Les fermions portent un isospin faible, noté T , et un nouveau nombre quantique, l’hypercharge, notée Y . Seuls les fermions gauches ont un isospin faible, pour assurer la violation de la parité, comme vu au paragraphe 10.1.4. La table 10.1 donnent la charge électrique, l’isospin et l’hypercharge des fermions élémentaires.

La troisième composante de l’isospin est la projection de l’isospin dans une base de l’espace interne de l’isospin à deux dimensions, choisie de façon conventionnelle (+1/2 pour les leptons neutres et les quarks de charge 2/3). Avec cette convention, on notera la relation vérifiée par toutes les particules :

$$Q/e = T_3 + Y/2.$$

On en comprendra l'origine au paragraphe 10.2.4.

On remarque que les neutrinos droits ont tous leurs nombres quantiques nuls (même la couleur). Ils ne sont sensibles qu'à la gravitation. Leur existence n'est pas établie. On peut construire une théorie où les neutrinos sont leurs propres antiparticules, ils sont représentés par des spineurs à deux composantes (neutrinos de Majorana), il n'y a alors pas nécessité d'introduire des neutrinos droits dans la théorie.

10.2.2 Construction du lagrangien électrofaible

On part du lagrangien libre pour un fermion de Dirac f :

$$\bar{f}i\not{\partial}f = (\bar{f}_L + \bar{f}_R) i\not{\partial}(f_L + f_R) = \bar{f}_L i\not{\partial}f_L + \bar{f}_R i\not{\partial}f_R,$$

où, on rappelle que la notation $\not{\partial}$ remplace $\gamma^\mu \partial_\mu$.

On considère deux leptons associés d'une même famille, notés L et ν . On pose :

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ L_L \end{pmatrix}.$$

On dit que L est un doublet d'isospin, il ne concerne que les leptons gauches. Le lagrangien libre pour ces deux leptons est la somme des lagrangiens de chaque lepton, et il peut s'écrire :

$$\mathcal{L} = \bar{L}i\not{\partial}L + \bar{\nu}_R i\not{\partial}\nu_R + \bar{L}_R i\not{\partial}L_R.$$

Ce lagrangien est invariant sous une transformation $SU(2)_L$, qui est unitaire par définition :

$$L \rightarrow L' = \exp(-ig_W \vec{\alpha} \cdot \vec{T}) L \quad ; \quad \nu_R \rightarrow \nu_R \quad ; \quad L_R \rightarrow L_R$$

Les composantes de \vec{T} sont les 3 générateurs (voir l'introduction de cette notion au paragraphe 8.3.1 page 145) de $SU(2)_L$: $T_i = \sigma_i/2$ où les σ_i sont les matrices de Pauli, hermitiennes de trace nulle.

Remarque. La notation T_3 désigne ici la matrice troisième composante de l'opérateur isospin et non la valeur de la troisième composante de l'isospin d'un fermion (valeur propre de T_3). Le contexte lève l'ambiguïté de la notation.

On demande l'invariance de jauge locale, i.e. les composantes de $\vec{\alpha}$ dépendent de l'espace et du temps : $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(x)$, en suivant exactement le formalisme développé pour QCD. On introduit la dérivée covariante :

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_W \sum_{a=1}^3 T_a W_\mu^a,$$

où g_W est la constante de couplage faible et $W_\mu^{1,2,3}$ sont trois bosons vecteurs. Il y a trois bosons car $SU(2)$ est un groupe de Lie à trois paramètres réels.

Le terme d'interaction entre les leptons gauches et les bosons vecteurs s'écrit donc :

$$\mathcal{L}_W = -g_W \sum_{a=1,3} \bar{L} \gamma^\mu T_a L W_\mu^a.$$

La transformation de jauge des bosons qui assure l'invariance du lagrangien est donnée au paragraphe 10.2.5.

On impose aussi l'invariance par toute transformation de $U(1)_Y$:

$$\begin{cases} L \rightarrow L' = \exp\left(-ig\beta\frac{Y}{2}\right) L \\ \nu_R \rightarrow \nu'_R = \exp\left(-ig\beta\frac{Y}{2}\right) \nu_R \\ L_R \rightarrow L'_R = \exp\left(-ig\beta\frac{Y}{2}\right) L_R \end{cases}$$

où Y est l'hypercharge du fermion considéré (le facteur $1/2$ est historique).

Noter que les deux fermions d'un même doublet ont la même hypercharge.

Si on demande l'invariance de jauge locale, il faut introduire le terme supplémentaire $ig(Y/2)B_\mu$ dans la dérivée covariante précédente, où g est la constante de couplage pour l'hypercharge (stricte analogue de q pour la charge électrique), et B_μ est un quatrième boson vecteur. Le terme d'interaction additionnel s'écrit :

$$\mathcal{L}_B = -g\bar{L}\gamma^\mu\frac{Y}{2}LB_\mu - g\bar{\nu}_R\gamma^\mu\frac{Y}{2}\nu_RB_\mu - g\bar{L}_R\gamma^\mu\frac{Y}{2}L_RB_\mu. \quad (10.1)$$

Nous avons donc en main quatre bosons vecteurs et deux constantes de couplage. Nous allons voir comment s'obtiennent le photon, les bosons W^\pm et Z^0 , ainsi que les constantes de couplage électromagnétique et faible. Nous allons aussi retrouver l'ensemble des vertex de l'interaction faible introduits au chapitre 9.

La construction que nous avons décrite pour les leptons s'applique de façon semblable aux quarks. Cependant, les doublets d'isospin ne sont pas les couples (u, d) , (c, s) , (t, b) , car les quarks ont été définis historiquement par leur création lors d'interactions fortes. On doit introduire les états d' , s' , b' qui forment un couple d'isospin faible avec les quarks u , c et t respectivement. Ils sont reliés aux états d , s , b par une transformation unitaire :

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}.$$

V_{CKM} est la matrice de Cabbibo, Kobayashi et Maskawa. C'est elle qui conduit au mélange des familles de quarks par les interactions faibles que nous avons évoqué au paragraphe 9.2.2 page 164.

10.2.3 Courants chargés

Nous posons :

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \quad \text{et} \quad W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 + iW_\mu^2),$$

et nous exprimons $\mathcal{L}_W = -g_W \sum_{a=1,3} \bar{L}\gamma^\mu T^a L W_\mu^a$ à l'aide de ces nouveaux champs. Les deux premiers termes de la somme s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \bar{L}\gamma^\mu T_1 L W_\mu^1 + \bar{L}\gamma^\mu T_2 L W_\mu^2 = \\ & \frac{1}{2} \left[(\bar{\nu}_L, \bar{L}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ L_L \end{pmatrix} W_\mu^1 + (\bar{\nu}_L, \bar{L}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ L_L \end{pmatrix} W_\mu^2 \right] \\ & = \frac{1}{2} \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu L_L W_\mu^1 + \bar{L}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^1 - i \bar{\nu}_L \gamma^\mu L_L W_\mu^2 + i \bar{L}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^2 \right] \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu L_L W_\mu^+ + \bar{L}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^- \right]. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\mathcal{L}_W = \underbrace{-\frac{g_W}{\sqrt{2}} \left[W_\mu^+ \bar{\nu}_L \gamma^\mu L_L + W_\mu^- \bar{L}_L \gamma^\mu \nu_L \right]}_{\mathcal{L}_{W12}} \underbrace{-g_W W_\mu^3 \left[\bar{L} \gamma^\mu T_3 L \right]}_{\mathcal{L}_{W3}}. \quad (10.2)$$

La première parenthèse, identifiée comme \mathcal{L}_{W12} , contient exactement les termes qu'il faut pour produire les vertex d'interaction entre les fermions et les bosons W . Il reste cependant à montrer que ces derniers portent bien les charges indiquées. . .

10.2.4 Unification électrofaible

Nous retrouvons dans ce paragraphe l'interaction électromagnétique et les courants neutres faibles.

On construit deux nouveaux champs en posant :

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}$$

où θ_W est appelé angle de Weinberg.

En rapprochant les équations (10.2) et (10.1) on peut calculer la somme $\mathcal{L}_{W_3} + \mathcal{L}_B$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W_3} + \mathcal{L}_B = & -g_W W_\mu^3 [\bar{L}\gamma^\mu T_3 L] - g \left[\bar{L}\gamma^\mu \frac{Y}{2} L B_\mu - \bar{\nu}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} \nu_R B_\mu - \bar{L}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} L_R B_\mu \right] = \\ & -A_\mu \left[\bar{L}\gamma^\mu g_W \sin \theta_W T_3 L + g \cos \theta_W \left(\bar{L}\gamma^\mu \frac{Y}{2} L + \bar{\nu}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} \nu_R + \bar{L}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} L_R \right) \right] \\ & -Z_\mu \left[\bar{L}\gamma^\mu g_W \cos \theta_W T_3 L - g \sin \theta_W \left(\bar{L}\gamma^\mu \frac{Y}{2} L + \bar{\nu}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} \nu_R + \bar{L}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} L_R \right) \right]. \end{aligned}$$

L'angle de Weinberg est un paramètre libre pour le moment, on peut le choisir de manière à pouvoir mélanger ces différents termes. On voit qu'en prenant θ_W , tel que :

$$g_W \sin \theta_W = g \cos \theta_W \quad (10.3)$$

la somme $\mathcal{L}_{W_3} + \mathcal{L}_B$ va se factoriser. C'est ce choix qui va permettre de retrouver l'interaction électromagnétique, comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

Interaction électromagnétique

Avec le choix (10.3), le terme A_μ et son facteur dans la somme $\mathcal{L}_{W_3} + \mathcal{L}_B$ deviennent :

$$-A_\mu g \cos \theta_W \left[\bar{L}\gamma^\mu T^3 L + \bar{L}\gamma^\mu \frac{Y}{2} L + \bar{\nu}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} \nu_R + \bar{L}_R \gamma^\mu \frac{Y}{2} L_R \right]. \quad (10.4)$$

On note que T_3 est nul pour les fermions droits, alors en introduisant la nouvelle quantité $Q = T_3 + Y/2$, le terme (10.4) devient :

$$-A_\mu g \cos \theta_W \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu Q \nu_L + \bar{L}_L \gamma^\mu Q L_L + \bar{\nu}_R \gamma^\mu Q \nu_R + \bar{L}_R \gamma^\mu Q L_R \right].$$

On pose : $e = g \cos \theta_W = g_W \sin \theta_W$ et on regroupe les termes droits et gauches. Il vient :

$$-e A_\mu \left[\bar{\nu} \gamma^\mu Q \nu + \bar{L} \gamma^\mu Q L \right]. \quad (10.5)$$

C'est exactement le terme d'interaction électromagnétique avec les fermions, si on interprète e comme la charge élémentaire, Q comme la charge du fermion considéré en unités de e , et A_μ comme le champ représentant le photon.

On comprend à présent l'origine de la relation universelle $Q = T_3 + Y/2$ remarquée dans la table 10.1 page 185.

La mesure des sections efficaces des processus de diffusion des leptons et des quarks par courant chargé et par courant neutre ainsi, comme on le verra plus loin, que la comparaison de la masse des bosons W et Z^0 permettent de mesurer l'angle de Weinberg. On obtient : $\sin^2 \theta_W \simeq 0,231$: les constantes de couplage faible et électromagnétique sont donc du même ordre de grandeur.

Courants neutres

Toujours en utilisant le choix (10.3) pour l'angle de Weinberg, le terme Z_μ et son facteur dans la somme $\mathcal{L}_{W_3} + \mathcal{L}_B$ deviennent après quelques manipulations :

$$-Z_\mu \frac{g_W}{\cos \theta_W} [\bar{L}_L \gamma^\mu T_3 L_L - \sin^2 \theta_W (\bar{\nu} \gamma^\mu Q \nu + \bar{L} \gamma^\mu Q L)].$$

On trouve la forme des interactions suggérée par les vertex de l'interaction faible décrits au chapitre 9, et notamment le fait que les courants neutres ne changent pas la nature des particules. Les termes d'interactions ne font apparaître que les courants fermioniques simples $\bar{f} \gamma^\mu f$, comme pour l'interaction électromagnétique, puisque la matrice qui représente l'opérateur T_3 est par construction diagonale dans la base des états choisie :

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

10.2.5 Charge des bosons

Tout comme SU(3), le groupe SU(2) est non abélien, et l'invariance de jauge locale du lagrangien exige l'introduction de termes d'interactions entre les bosons vecteurs sous la forme :

$$\mathcal{L}_J = -\frac{1}{4} \mathcal{W}_{\mu\nu}^a \mathcal{W}_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{B}_{\mu\nu} \mathcal{B}^{\mu\nu}$$

où de façon tout à fait similaire avec ce que nous avons fait pour l'interaction forte on définit :

$$\mathcal{W}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_W \varepsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c$$

et

$$\mathcal{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu.$$

Les constantes de structure du groupe, ε_{abc} , sont les symboles de Levi-Civita qu'on retrouve dans les commutateurs des matrices de Pauli :

$$\left[\frac{\sigma_a}{2}, \frac{\sigma_b}{2} \right] = i \varepsilon_{abc} \frac{\sigma_c}{2}.$$

Les bosons de jauge sont transformés par changement de jauge comme :

$$\begin{aligned} W_\mu^a &\rightarrow W'^a_\mu = W_\mu^a + \partial_\mu \alpha^a(x) + g_W \varepsilon_{abc} \alpha^b(x) W_\mu^c \\ B_\mu &\rightarrow B'_\mu = B_\mu + \partial_\mu \beta(x) \end{aligned}$$

Le calcul donne alors le couplage entre les bosons W et A :

$$\mathcal{L}_{\gamma W^+ W^-} = -ie [A^\mu \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W^{+\nu} - A^\mu \mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W^{-\nu} + A_\mu A_\nu W^{+\mu} W^{-\nu}],$$

où : $\mathcal{W}_{\mu\nu}^{\pm} = \partial_{\mu}W_{\nu}^{\pm} - \partial_{\nu}W_{\mu}^{\pm}$.

La construction que nous venons de décrire a permis d'interpréter A comme le champ représentant le photon γ grâce à l'équation (10.5) qui explicite le couplage entre A et les fermions.

On vient de montrer que les champs W^{\pm} sont aussi couplés au champ électromagnétique comme attendu : ils portent les charges $\pm e$, ils représentent bien les bosons W .

Au contraire, le champ Z n'est pas couplé à A , il représente le boson vecteur neutre Z^0 .

Nous laissons au lecteur le soin de déterminer tous les couplages à 3 et 4 bosons vecteurs et de retrouver les vertex et diagrammes de Feynman du paragraphe 9.4 page 166.

10.2.6 Bilan électrofaible

Il est temps de faire le point sur la construction de la théorie électrofaible décrite dans ce paragraphe 10.2 et de faire un bilan des symétries et des champs que nous avons introduits.

Le lagrangien des interactions électrofaibles est basé sur l'invariance de jauge locale pour le groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Les leptons et les quarks portent des nombres quantiques internes appelés isospin faible et hypercharge qui caractérisent leurs transformations sous les éléments respectivement de $SU(2)_L$ et de $U(1)_Y$. Seules les projections chirales gauches des fermions sont affectées par les éléments de $SU(2)_L$.

L'invariance de jauge locale exige l'introduction de nouvelles dérivées covariantes et de leurs champs vectoriels associés, trois pour $SU(2)_L$, les champs $W_{\mu}^{1,2,3}$, et un pour $U(1)_Y$, le champ B_{μ} .

Les champs W_{μ}^{\pm} qui représentent les bosons W^{\pm} sont construits à partir des champs W_{μ}^1 et W_{μ}^2 .

Les champs A_{μ} et Z_{μ} qui représentent respectivement le photon γ et le boson Z^0 sont construits à partir des champs W_{μ}^3 et B_{μ} à travers un angle de mélange θ_W appelé angle de Weinberg.

Les interactions électromagnétiques et faibles sont ainsi intriquées, et leurs constantes de couplage sont du même ordre de grandeur.

Le lagrangien obtenu viole les symétries discrètes P et C , voir l'exercice 10.c.

On rappelle aussi (voir paragraphe 9.6) que le lagrangien électrofaible incluant l'ensemble des leptons et des quarks viole aussi la symétrie T et la symétrie pro-

duit CP : l'origine de ces violations est le mélange des familles de particules, et nous admettons ce point.

Le lagrangien construit jusqu'ici ne contient aucun terme de masse, ni pour les bosons, ni pour les leptons, il n'est donc pas encore satisfaisant ! C'est l'objet du paragraphe suivant.

10.3 Masse des particules

La masse des bosons W^\pm et Z^0 ainsi que de tous les fermions est donnée par la brisure spontanée de la symétrie du lagrangien par l'ajout d'un doublet de champs complexes d'isospin 1/2 et d'hypercharge 1, dont une composante (le Higgs) a une valeur non nulle dans le vide. Les autres particules de ce doublet fournissent les degrés de liberté supplémentaires aux bosons vecteurs lorsqu'ils acquièrent une masse.

Nous ne détaillons pas ce mécanisme, appelé mécanisme de Brout Englert Higgs (BEH), mais une version très simplifiée en a été présentée au paragraphe 6.6 page 102.

10.3.1 Masse du Higgs et des bosons vecteurs

Nous rappelons le potentiel de Higgs vu au paragraphe 6.6.1 :

$$V(\Phi) = \mu \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (\lambda > 0, \mu < 0).$$

Le champ de Higgs appartient à un doublet d'isospin, avec un choix de jauge approprié il s'exprime :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \quad \text{avec } v = \sqrt{-\mu/\lambda}.$$

Le champ $h(x)$ permet de séparer la moyenne de Φ de sa partie fluctuante. Cette valeur moyenne dans le vide (minimum de V) est : $\langle 0 | \Phi^\dagger \Phi | 0 \rangle = v^2/2$. Sa masse vaut : $m_{H^0} = \sqrt{2\lambda}v = 125 \text{ GeV}/c^2$.

Le mécanisme BEH impose la masse des bosons faibles :

$$m_W = \frac{g_W v}{2} ; m_Z = \frac{g_W v}{2 \cos \theta_W} = \frac{m_W}{\cos \theta_W}.$$

Les mesures de la masse des W et Z donnent alors $v = 246 \text{ GeV}$.

10.3.2 Masse des fermions

Les masses des fermions f sont obtenues en ajoutant des termes d'interaction du Higgs avec chaque fermion, et les constantes de couplage sont reliées aux masses :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{fH} &= -g_L \bar{L} \Phi L_R - g_L \bar{L}_R \Phi^\dagger L - g_\nu \bar{L} \Phi^c \nu_R - g_\nu \bar{\nu}_R \Phi^c L \\ &= -m_L \bar{L} L - \frac{m_L}{v} \bar{L} L h - m_\nu \bar{\nu} \nu - \frac{m_\nu}{v} \bar{\nu} \nu h\end{aligned}$$

avec $m_{L,\nu} = \frac{g_{L,\nu} v}{\sqrt{2}}$ et $\Phi^c = i\sigma_2 \Phi$.

Le modèle accommode les masses des fermions, mais ne fait aucune prédiction sur leurs valeurs, puisqu'il faut introduire une constante de couplage adéquate pour chaque fermion.

10.4 Le modèle standard

Ingrédients

Le modèle standard repose sur :

- les principes de la mécanique quantique et de la relativité restreinte ;
- l'invariance de jauge locale de la somme des lagrangiens libres des particules élémentaires de matière, six leptons et six quarks ($\times 3$ couleurs) ;
- le mécanisme BEH de brisure spontanée de symétrie par le Higgs ;
- le groupe de jauge est le produit $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$;
- 25 paramètres libres (nombre qu'on peut considérer comme petit si on considère la puissance prédictive du modèle, mais grand pour une théorie fondamentale) :
 - 12 couplages au Higgs pour donner les masses aux quarks et leptons,
 - 3 constantes de couplage pour les groupes de jauge,
 - 4 constantes pour décrire le mélange des quarks,
 - 4 constantes pour décrire le mélange des leptons,
 - 2 constantes pour le potentiel de Higgs.

Succès

Le modèle standard de la physique des particules est un accomplissement majeur de la physique théorique :

- La théorie est renormalisable, et permet ainsi des calculs perturbatifs précis ce qui lui donne une très grande puissance prédictive ;

- une extrême variété de phénomènes microscopiques sont décrits avec précision et sur des échelles d'énergie allant de 10^{-12} à 10^{13} eV ;
- aucune observation expérimentale confirmée ne le met en défaut aujourd'hui (2021).

Insuffisances

Malgré ces succès, de nombreuses questions restent sans réponse et quelques problèmes persistent au sein du modèle :

- pourquoi observe-t-on trois familles de particules similaires aux valeurs des masses près ? Cela suggère l'existence d'une sous-structure, qui n'apparaît pourtant pas jusqu'à une échelle de $\sim 10^{-19}$ m ;
- même si le modèle peut s'accommoder de particules massives grâce au mécanisme de Brout-Englert-Higgs, on ne sait pas prédire la valeur de ces masses ; comment expliquer des masses de neutrino en-dessous de quelques micro-électron-volts et une masse du quark top égale à plus de 170 fois la masse du proton, soit des valeurs qui s'étalent sur plus de dix ordres de grandeurs (table 4.3 page 58) ;
- quelle est l'origine de l'asymétrie matière-antimatière dans l'Univers ? On n'observe pas d'étoiles, de galaxies, d'amas de galaxies faits d'antimatière. Pourtant, en cosmologie, on fait l'hypothèse d'un état initial très dense et très chaud (le Big-Bang) où il y a autant de particules que d'antiparticules. Lors de l'expansion et du refroidissement de l'Univers, toute la matière et l'antimatière auraient dû disparaître sous forme de rayonnement. Or, il reste un reliquat de matière, et on ne sait pas expliquer ce déséquilibre ;
- même si la violation de CP est comprise dans les interactions faibles, a contrario, on ne comprend pour quoi cette symétrie n'est pas violée par les interactions fortes ;
- peut-on unifier les interactions fondamentales au-delà du modèle standard, et par exemple réduire le nombre de constantes de couplage à une seule au lieu de trois ?
- la théorie des champs a résolu beaucoup de problèmes, mais elle a apporté ses propres difficultés : apparition de quantités infinies, instabilité de certains paramètres de la théorie, théorie des perturbations insuffisante. De ce point de vue, le modèle standard n'est pas une théorie aboutie. Il est plutôt vu aujourd'hui comme une théorie effective à basse énergie par rapport à l'énergie de Planck (paragraphe ??) d'une théorie plus vaste qui reste à élaborer.

Rappelons aussi que le modèle standard est incomplet : il n'intègre pas la gravitation, car on n'a pas aujourd'hui de théorie quantique établie de la gravitation.

Enfin, on verra au paragraphe ?? que les observations astrophysiques conduisent, dans le cadre d'une cosmologie basée sur la relativité générale, à l'introduction

d'une matière supplémentaire, la matière noire, et à un contenu énergétique du vide, l'énergie noire, dont la nature est inconnue, l'ensemble constituant 95 % du contenu de l'Univers !

En conclusion, nous sommes bien loin d'avoir une description même élémentaire de l'univers qui nous entoure !

À retenir dans le chapitre 10

- notion de chiralité ;
- définition de l'hélicité ;
- charge, isospin faible, hypercharge ;
- Unification électrofaible :
 - groupe de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$,
 - angle de Weinberg θ_W ,
 - constantes de couplage : g_W, g, e ,
 - masse des particules et boson de Higgs ;
- modèle standard :
 - groupe de jauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$,
 - 25 paramètres,
 - forces, faiblesses, questions.

10.5 Exercices

Exercice 10.a – Chiralité

Démontrer que pour un spineur de Dirac à quatre composantes u : $m\bar{u}u = m(\bar{u}_R u_L + \bar{u}_L u_R)$.

On précisera soigneusement la signification des notations.

Exercice 10.b – Hélicité

On définit l'hélicité comme la projection du spin sur l'impulsion de la particule :

$$\hat{h} = \frac{\hat{\vec{S}} \cdot \vec{p}}{\|\vec{p}\|} \text{ où on rappelle : } \hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Les composantes de \vec{p} en coordonnées sphériques sont $(\|\vec{p}\|, \theta, \varphi)$.

1. Exprimer \hat{h} en fonction de θ et φ .
2. En déduire que le spineur ψ défini ci-dessous est vecteur propre de \hat{h} :

$$\psi = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \exp(i\varphi) \sin(\theta/2) \\ \frac{\|\vec{p}\|}{E+m} \cos(\theta/2) \\ \frac{\|\vec{p}\|}{E+m} \exp(i\varphi) \sin(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.c – Violation des symétries discrètes

1. Montrer que le terme d'interaction $\mathcal{L}_{W12} = W_\mu^+ \bar{\nu}_L \gamma^\mu L_L + W_\mu^- \bar{L}_L \gamma^\mu \nu_L$ n'est pas invariant par transformation P ou C , mais l'est par la transformation produit CP .
2. Montrer que \mathcal{L}_{W12} est invariant par renversement du temps. On prendra garde que l'opérateur T est antiunitaire.

Exercice 10.d – Désintégration du pion chargé

On considère le pion chargé π^+ ou π^- .

1. Quelle est sa parité intrinsèque ?
2. Quelle est l'interaction responsable de sa désintégration ?
3. Dessiner le diagramme de Feynman le plus simple correspondant.
4. En déduire l'amplitude de la désintégration à l'ordre le plus bas des perturbations.

On donne le facteur au vertex de l'interaction fermion-boson W :

$$-i \frac{g_W}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} c$$

où c est une constante qui vaut 1 pour les leptons et qui dépend de la paire quark-antiquarks.

On se place dans le référentiel du centre de masse du pion. On admettra que, dans l'expression de l'amplitude, la partie concernant les quarks se réduit à un terme de la forme $f_\pi p_\mu$, où f_π est une constante et p_μ le quadrivecteur énergie impulsion du pion, soit $f_\pi m_\pi$ dans le référentiel du centre de masse.

5. Pouvez-vous justifier ?

6. Le propagateur du W se réduit à $i\eta^{\mu\nu}/M_W^2$. Justifier.
On donne $M_W = 80,4 \text{ GeV}/c^2$.
7. On néglige la masse des neutrinos. Donner l'expression du spineur de l'antineutrino v_ν pour chaque valeur possible de son hélicité. On définit l'axe z suivant l'impulsion de l'antineutrino $\vec{p} = p_z \vec{e}_z$ avec $p_z > 0$.
8. Montrer que seule une hélicité contribue à cause du facteur $(1 - \gamma^5)$.
9. En déduire l'expression de l'amplitude.
10. En déduire le rapport des taux de désintégration $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ et $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Comparer à la valeur expérimentale $1,23 \times 10^{-4}$.
On donne $M_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ et $M_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$.

Exercice 10.e – Énergie du vide

Dans les années 1990, l'accélération de l'expansion de l'Univers a été découverte en comparant le décalage vers le rouge des supernovæ et leur distance de luminosité. Une interprétation dans le cadre du modèle de concordance de la cosmologie est l'existence d'une énergie noire emplissant l'Univers.

1. On pourrait imaginer estimer la densité de cette énergie noire à partir du potentiel de Higgs. Avec les valeurs données dans le cours, calculer la densité d'énergie potentielle de Higgs au minimum (donc dans le vide).
Les mesures donnent : $0,35 \times 10^{-5} \text{ GeV}/\text{cm}^3$. Comparer.
On exprimera les densités en GeV^4 .

Une autre hypothèse serait la contribution des énergies de point 0 des champs de particules, avec une contribution de :

$$\rho = \pm \int d^3 p \frac{p^0}{2}$$

par composante, le signe dépendant de la nature bosonique ou fermionique du champ.

2. Calculer l'ordre de grandeur de cette densité en supposant que l'intégrale doit être bornée à l'énergie de Planck ($pc < \Lambda \sim 10^{19} \text{ GeV}$), énergie à laquelle on s'attend à ce que la quantification s'applique à la gravitation. Comparer avec la valeur expérimentale.

Version
préliminaire

Unités et constantes fondamentales

Unités hors SI utilisées dans ce cours

Unité	Symbole	Valeur
Unité de masse atomique	uma	$1 \text{ uma} = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Électron-volt	eV	$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$
Angström	Å	$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$
Fermi	fm	$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$
Barn	b	$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$
Parsec	pc	$1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$

Constantes fondamentales

Charge élémentaire	e	$1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante de Planck	h	$6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
... réduite	$\hbar = h/2\pi$	$1,055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de conversion	$\hbar c$	$197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$
Constante de Boltzmann	k	$1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Constante d'Avogadro	\mathcal{N}	$6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Masse de l'électron	m_e	$511 \text{ keV}/c^2$ $9,110 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	m_p	$938,259 \text{ MeV}/c^2$ $1,672 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du neutron	m_n	$939,553 \text{ MeV}/c^2$ $1,675 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de structure fine	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$	$1/137,036$
Rayon de Bohr	a_0	$0,529 \text{ \AA}$
Energie d'ionisation de l'atome d'hydrogène	$-E_0$	$13,6 \text{ eV}$
Magnéton de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$0,578 \times 10^{-8} \text{ eV/G}$
Magnéton nucléaire	$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$0,315 \times 10^{-11} \text{ eV/G}$
Constante de Newton	G	$6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de Planck	$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	$1,225 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2$

Index

- Angle de Weinberg, 188
- Antimatière, 45
- Antiparticules, 56

- Baryon, 58, 143
- Boson
 - de Higgs, 105
 - vecteur, 102, 161
- Boson
 - vecteur, 105
- Brisure spontanée de symétrie, 103
- Brout-Englert-Higgs, mécanisme de, 103

- C, conjugaison de charge, 174
- Champ
 - de Dirac, 85
 - scalaire, 75
 - vecteuriel, 99
- Charge
 - additive, 57
 - baryonique, 57, 143
 - leptonique, 57
- Chiralité, 182
- Chromodynamique quantique, 145
- CKM, matrice de Cabibbo, Kobayashi et Maskawa, 164, 187
- Confinement
 - de la couleur, 153
- Conjugaison de charge, 174
- Constante
 - de couplage, 56
 - faible, 56, 163
 - forte, 56, 149
 - électromagnétique, 56
 - decouplage
 - faible, 187
- Constantes fondamentales, 7
- Corrections radiatives, 139

- Cosmologie, 3
- Couleur, 56, 144
- Courants
 - chargés, 162, 188
 - neutres, 165, 188
- CP, 175
- CPT, théorème, 177
- Création de paire, 46

- Demi-vie, 64
- Densité
 - de lagrangien, 81
- Dérivée covariante, 99
- Désintégration
 - bêta, 164
 - du neutron, 164
 - loi de, exponentielle, 63
- Diagrammes de Feynman, 125
- Dirac, équation de, 35
- Distribution de Breit-Wigner, 65
- Durée de vie, 63

- Équation
 - de Dirac, 35
 - de Klein-Gordon, 25
 - de Lagrange, 80
 - généralisée, 81
 - de Schrödinger, 16
- Espace de Fock, 78, 79

- Gell-Mann, matrices de, 147
- Gluon, 102, 149
- Générateur
 - d'un groupe de Lie, 147
 - infinitésimal, 17

- Hadron, 58
- Hadronisation, 154
- Heisenberg, inégalités de, 15

- Higgs, boson de, 105
Hypercharge, 56, 161
Hélicité, 183
- Interaction
faible, 3, 56, 161
fondamentale, 2, 55
forte, 2, 56, 143
électrofaible, 162, 185
électromagnétique, 2, 56, 95
- Invariance de jauge
globale, 96
locale, 98
- Isospin faible, 56, 161, 181
- Jauge
de Coulomb, 99
de Lorentz, 99
transformation de, 98
- Kaon, 58
Klein-Gordon, équation de, 25
- Lagrangien
de Dirac, 88
de Klein-Gordon, 83
pour les gluons, 152
pour les photons, 102
QCD, d'interaction, 149
électrofaible, 186
- Lepton, 56
LHC, 5
Liberté asymptotique, 155
Libre parcours moyen, 67
Longueur
d'absorption, 67
d'interaction, 67
- Mandelstam
variables de, 130
- Masse invariante, 13
- Matrice
CKM, 164, 187
de mélange
des neutrinos, 164
des quarks, 164, 187
 M , 113
PMNS, 164
 S , 113
- Méson, 58
- Méthode des perturbations, 61
Microréversibilité, 176
Modèle
de concordance, 3
standard, 3, 181
- Mécanique quantique, 14
- Neutrinos, 167
- Opérateurs de création et d'annihilation, 75
- P , parité, 170
Parité, 170
intrinsèque, 171
- Particules
familles de, 56
élémentaires, 56
Particules virtuelles, 138
Pentaquark, 58, 153
Période, 64
Physique
des particules, 2
Pion, 58
PMNS, matrice Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata, 164
- Positron, 45
Positron, 45
Principe de moindre action, 80
Propagateur, 124
- QCD, 143, 145
Quadrivecteur énergie impulsion, 12
Quark, 56, 143
- Rapport d'embranchement, 123
- Rayons
alpha, 2
bêta, 2
canaux, 2
cathodiques, 2
cosmiques, 45
gamma, 2
uraniques, 2
 X , 2
- Règle d'or de Fermi, 63
- Relations
d'anticommution, 86
d'orthogonalité, 86
de commutation, 77
- Relativité

- restreinte, 9
- Renormalisation, 132
- Renversement du temps, 175
- Représentation
 - de Heisenberg, 110
 - de Schrödinger, 109
 - en interaction, 110
- Running coupling constant, 137

- Schrödinger, équation de, 16
- Seconde quantification, 77
- Section efficace, 66
 - partielle, 68
 - totale, 68
- Série de Dyson, 111
- Singlet de couleur, 153
- Spin, 17
- Spineur, 22
- Symétries discrètes, 162

- T , renversement du temps, 175
- Temps de vie, 64
- TEP, 49
- Tétraquark, 58, 153
- Théorème CPT , 177
- Théorème de Noether, 80
- Théorie quantique des champs, 75
- Tomographie par émission de positrons, 49
- Transformation de Lorentz, 11
- Transformation spéciale, 11

- Unification électrofaible, 188
- Unités, 7
 - naturelles, 8

- Violation
 - de C , 174
 - de CP , 175
 - de P , 173
 - de T , 177

Version
préliminaire

Bibliographie

- [1] J.L. Basdevant, J. Rich, and M. Spiro. *Fundamentals in Nuclear Physics*. Springer, 2005.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique quantique*. Hermann, 1977.
- [3] B. Degrange. *Introduction à la physique quantique*. Les Presses, École des Mines de Paris, 2001.
- [4] Schwabl F. *Advanced Quantum Mechanics*. Springer, 2008.
- [5] F. Mayet. *Physique nucléaire appliquée*. De Boeck, 2017.
- [6] J. Perez. *Théorie des champs*. Les presses de l'ENSTA, 2017.
- [7] A. Rougé. *Introduction à la physique subatomique*. Ellipses Marketing, 2005.
- [8] A. Seiden. *Particle Physics, A Comprehensive Introduction*. Addison-Wesley, 2005.