

# Introduction à la physique des particules

## Exercices

Pascal Debu

*Département de physique des particules  
Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives*

Année scolaire 2021-2022



ENSTA

Code du cours : PAQT12

# Table des matières

<b>1 Exercices du chapitre 1</b>	<b>4</b>
a Découverte de l'électron . . . . .	4
b Électrons et photons . . . . .	4
<b>2 Exercices du chapitre 2</b>	<b>5</b>
a Unités naturelles . . . . .	5
b Dilatation du temps . . . . .	5
c Transformation de Lorentz . . . . .	5
d Énergie seuil . . . . .	5
e Élément d'intégration . . . . .	6
f Conservation de l'énergie-impulsion . . . . .	6
g Inégalités de Heisenberg . . . . .	6
h Longueur d'onde de de Broglie . . . . .	6
i Opérateurs moments cinétiques . . . . .	6
j Addition des moments cinétiques . . . . .	7
k Équation de Klein-Gordon . . . . .	9
l Spin et distribution angulaire . . . . .	9
m Équations de continuité . . . . .	10
<b>3 Exercices du chapitre 3</b>	<b>11</b>
a Opérateur temps . . . . .	11
b Opérateur impulsion . . . . .	11
c Matrices de Dirac . . . . .	11
d Encore sur les matrices de Dirac . . . . .	12
e Covariance de l'équation de Dirac . . . . .	12
f Opérateur spin sur les spineurs de Dirac . . . . .	12
g Équation de Weyl . . . . .	12
<b>4 Exercices du chapitre 4</b>	<b>13</b>
a Particules étranges . . . . .	13
b Lois de conservation . . . . .	14
c Désintégration à deux corps . . . . .	14
d Matérialisation . . . . .	14

e	Distribution de Dirac . . . . .	15
f	Section efficace . . . . .	16
g	Catastrophe au LHC . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Exercices du chapitre 5</b>	<b>18</b>
a	Principe de moindre action . . . . .	18
b	Lagrangien de Dirac . . . . .	18
c	Espace de Fock . . . . .	18
d	Hamiltonien de Klein-Gordon . . . . .	18
e	Hamiltonien de Dirac . . . . .	19
f	Tenseur énergie-impulsion . . . . .	19
g	Théorème de Noether . . . . .	20
h	Spin des solutions de l'équation de Dirac . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Exercices du chapitre 6</b>	<b>22</b>
a	Force de Lorentz . . . . .	22
b	Invariance de jauge locale . . . . .	22
c	Courant fermionique . . . . .	22
d	Interaction électromagnétique des fermions . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Exercices du chapitre 7</b>	<b>24</b>
a	Traces et spineurs . . . . .	24
b	Relations de fermeture . . . . .	24
c	Propagateur . . . . .	24
d	Diffusion électron muon . . . . .	25
<b>8</b>	<b>Exercices du chapitre 8</b>	<b>27</b>
a	Moment magnétique des nucléons . . . . .	27
b	Invariance de jauge du lagrangien d'interaction QCD . . . . .	28
c	Facteur de couleur . . . . .	29
d	Lagrangien de propagation des gluons . . . . .	30
<b>9</b>	<b>Exercices du chapitre 9</b>	<b>31</b>
a	Renversement du temps . . . . .	31
b	Symétries discrètes . . . . .	31
c	Parité intrinsèque . . . . .	31
d	Oscillation des neutrinos . . . . .	32
<b>10</b>	<b>Exercices du chapitre 10</b>	<b>35</b>
a	Chiralité . . . . .	35
b	Hélicité . . . . .	35
c	Violation des symétries discrètes . . . . .	35
d	Désintégration du pion chargé . . . . .	36
e	Énergie du vide . . . . .	36

# Exercices du chapitre 1

## 1.a Découverte de l'électron

Thomson a mesuré la charge  $Q$  déposée par les rayons cathodiques produits pendant un certain temps à l'aide d'un électromètre, leur énergie cinétique  $mv^2/2$  par l'élévation de température  $\Delta T$  d'un calorimètre de capacité calorifique  $C$ , et le rayon de courbure  $r$  de leur trajectoire dans un champ magnétique  $B$  orthogonal à leur direction. Comment a-t-il obtenu le rapport  $e/m$  ?

## 1.b Électrons et photons

1. Lorsqu'on bombarde une cible avec des rayons cathodiques de quelques keV, les électrons passant à proximité des atomes sont déviés et perdent alors de l'énergie qu'ils émettent sous forme de photons dans la gamme des rayons X (rayonnement de freinage). Pour un électron accéléré sous la tension  $U$ , quelle est la longueur d'onde minimale des rayons X émis ? Application numérique :  $U = 20 \text{ kV}$ .
2. Inversement, un photon de longueur d'onde  $\lambda_i$  qui frappe et éjecte un électron au repos dans la matière est dévié d'un angle  $\theta$ . C'est la diffusion Compton. Exprimer la longueur d'onde  $\lambda_f$  du photon sortant en fonction de  $\lambda_i$  et de  $\theta$ . Calculer  $(\lambda_f - \lambda_i)$  pour  $\theta = 60^\circ$ . On donne la longueur d'onde de Compton  $\lambda_C = h/m_e c = 0,024 \text{ \AA}$ .

# Exercices du chapitre 2

## 2.a Unités naturelles

La constante de structure fine  $\alpha$  est une constante sans dimension qui donne une mesure de l'intensité de l'interaction électromagnétique. Elle est définie par  $\alpha = e^2/4\pi$  en unités naturelles. Calculer  $1/\alpha$ .

## 2.b Dilatation du temps

Le muon a une masse de  $106 \text{ MeV}/c^2$  et une durée de vie  $\tau$  de  $2,2 \mu\text{s}$ . On considère un muon d'énergie cinétique  $T$  de  $106 \text{ GeV}$ . Quelle distance parcourt-il pendant une durée de vie ? Comparer à  $c\tau$ .

## 2.c Transformation de Lorentz

Montrer que la composition de deux transformations de Lorentz spéciales suivant le même axe est équivalente à une transformation de Lorentz de rapidité égale à la somme des rapidités des deux transformations.

## 2.d Énergie seuil

On considère la réaction endoénergétique :  $(1) + (2) \rightarrow (3) + (4)$  ; où (1) est la particule incidente et (2) la particule cible au repos.

1. Montrer que l'énergie cinétique minimale que doit posséder (1) pour que la réaction puisse avoir lieu s'exprime :

$$T_1 = -Q \times \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{2m_2},$$

où :  $Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)] c^2 < 0$ .

2. Que devient cette expression à la limite non relativiste ?

## 2.e Élément d'intégration

1. Montrer que  $d^3\vec{p}/E = dp_x dp_y dp_z/E$  est invariant par changement de repère dans le cadre de la relativité restreinte.
2. En déduire que l'élément d'espace des phases :

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) \frac{d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_1 (2\pi)^3 2E_2}$$

est aussi invariant.

La quantité  $\delta^4(p_1 + p_2 - p)$  est le produit de quatre distributions de Dirac :

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p) = \delta(E_1 + E_2 - E) \times \\ \delta(p_{1x} + p_{2x} - p_x) \times \delta(p_{1y} + p_{2y} - p_y) \times \delta(p_{1z} + p_{2z} - p_z).$$

## 2.f Conservation de l'énergie-impulsion

1. Montrer que la masse invariante d'un système de deux particules est toujours supérieure ou égale à la somme des masses des particules.
2. Le pion neutre  $\pi^0$  est une particule de masse  $135 \text{ MeV}/c^2$  qui se désintègre très rapidement (durée de vie de  $8,5 \times 10^{-17} \text{ s}$ ) en deux photons. Quelle est la masse invariante du pion neutre ? Du système de deux photons ?

## 2.g Inégalités de Heisenberg

Démontrer l'inégalité :  $\Delta A \cdot \Delta B \geq \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| / 2$  où  $A$  et  $B$  sont des observables et  $\Delta A(B)$  est l'écart quadratique moyen des résultats de la mesure de  $A(B)$ .

## 2.h Longueur d'onde de de Broglie

Calculer la longueur d'onde de de Broglie d'un électron de  $1 \text{ keV}$ , d'un électron de  $1 \text{ GeV}$ , d'un proton de  $7 \text{ TeV}$  (les énergies données sont les énergies cinétiques des particules). On utilisera la constante de conversion  $\hbar c \simeq 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$  pour simplifier les calculs. Dire quelle structure de la matière peut être analysée dans chacun de ces cas.

## 2.i Opérateurs moments cinétiques

1. Spin  $1/2$

Soit l'espace à 2 dimensions d'un spin 1/2, les 2 vecteurs de base étant les états  $S_z = +\hbar/2$  et  $-\hbar/2$ .

Représenter l'opérateur  $S_z$  sous forme d'une matrice. Dire pourquoi  $S_x$ ,  $S_y$  et  $S_z$  ont les mêmes valeurs propres, trace et déterminant.

## 2. Matrices de Pauli

On définit les matrices de Pauli :  $\sigma_i = (2/\hbar)S_i$ .

Utiliser les propriétés montrées en 1. pour trouver la forme générale des  $\sigma_i$ . Choisir  $\sigma_x$  réelle à coefficients positifs, en déduire  $\sigma_y$  en utilisant la relation  $[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$ . Calculer les vecteurs propres de  $S_x$  et  $S_y$ .

## 3. Propriétés des opérateurs moment cinétique

(a) On rappelle les relations de commutation qui définissent un opérateur moment cinétique :  $[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$ .

En déduire que  $[J^2, J_i] = 0$ .

On pose  $J^\pm = J_x \pm iJ_y$ . Calculer  $[J_z, J^\pm]$  et  $[J^2, J^\pm]$ .

Montrer que  $J^-$  est hermitique conjugué de  $J^+$ .

(b) On désigne par  $|a, b\rangle$  un vecteur propre normalisé commun à  $J^2$  et  $J_z$ , dont les valeurs propres sont respectivement  $\hbar^2 a$  et  $\hbar b$ . Les nombres  $a$  et  $b$  sont des réels, a priori inconnus. Montrer que  $J^\pm |a, b\rangle$  est un vecteur proportionnel à  $|a, b \pm 1\rangle$ . Calculer la norme des vecteurs  $J^\pm |a, b\rangle$ . En déduire les valeurs possibles de  $a$  et  $b$ .

Remarque : les états  $|a, b\rangle$  sont plutôt notés  $|j, m\rangle$  où :  $a = j(j+1)$  et  $b = m$ .

(c) Retrouver ainsi les matrices de Pauli.

## 4. Spin 1

Calculer les matrices représentant  $J_i$  et  $J^2$  pour le spin 1.

## 2.j Addition des moments cinétiques

A) Cas général Soit un système composé de deux sous-systèmes possédant des moments cinétiques associés aux opérateurs  $\widehat{J}_1$  et  $\widehat{J}_2$  agissant sur des variables indépendantes : il peut s'agir de deux particules, ou d'une seule particule avec son moment orbital et son moment intrinsèque, ou de systèmes plus complexes. On s'intéresse à l'espace de Hilbert décrivant les états des moments cinétiques. On utilise comme base de cet espace les vecteurs propres pour les opérateurs  $\widehat{J}_1^2, \widehat{J}_2^2, \widehat{J}_{1z}, \widehat{J}_{2z}$ . On note ces vecteurs  $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$  avec :

$$\begin{aligned}\widehat{J}_i^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= j_i(j_i + 1)\hbar^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \\ \widehat{J}_{iz} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= m_i\hbar |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle.\end{aligned}$$

Les modules de  $\widehat{J}_1$  et  $\widehat{J}_2$  sont fixés ( $j_1$  et  $j_2$  fixés), mais leurs orientations sont quelconques, les  $m_i$  peuvent donc prendre toutes les valeurs entre  $-j_i$  et  $+j_i$  par sauts de une unité. Le moment cinétique total du système est  $\widehat{J} = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2$ . L'objectif de l'exercice est de déterminer les caractéristiques de l'opérateur moment cinétique total.

1. Combien y a-t-il de vecteurs propres  $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$  ?
2. Montrer que l'opérateur  $\widehat{J} = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2$  est bien un opérateur moment cinétique.

On peut ainsi construire une autre base de l'espace de Hilbert précédent à partir des vecteurs propres des opérateurs  $\widehat{J}^2$  et  $\widehat{J}_z$ . On notera les vecteurs de base  $|J, M\rangle$ . Ces vecteurs peuvent s'exprimer en fonction des vecteurs de base précédents :  $|J, M\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{JMm_1 m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ .

Remarque : les phases des vecteurs de base peuvent être choisies de façon que tous les coefficients  $C_{JMm_1 m_2}$  soient réels.

*Nota bene : les coefficients  $C_{JMm_1 m_2}$  dépendent de  $j_1$  et  $j_2$ , c'est pourquoi on devrait noter les vecteurs  $|J, M\rangle$  plutôt  $|j_1, j_2, J, M\rangle$ , mais on préfère ici alléger l'écriture.*

3. Calculer de deux façons différentes  $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | \widehat{J}_z | J, M\rangle$  et en déduire que  $C_{JMm_1 m_2}$  est nul si  $M \neq m_1 + m_2$ .
4. Montrer que  $J \leq j_1 + j_2$ .
5. En utilisant le produit scalaire  $\langle j_1, j_2, \pm j_1, \pm j_2 | J, M\rangle$ , montrer qu'on doit trouver des vecteurs  $|J, M\rangle$  avec  $J$  supérieur ou égal à  $|j_1 - j_2|$  et inférieur ou égal à  $j_1 + j_2$ . Un comptage précis du nombre d'états possibles pour chaque valeur de  $M$  montrerait que toutes les valeurs de  $J$  telles que  $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$  sont effectivement réalisées. On admettra ce résultat.
6. Combien y a-t-il de vecteurs  $|J, M\rangle$  pour  $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ .
7. En déduire que  $C_{JMm_1 m_2}$  est nul si la condition

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$$

n'est pas vérifiée.

#### B) Cas de deux spins 1/2

On considère le système composé de deux particules de spin 1/2. On veut exprimer les états  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2\rangle$  en fonction des états  $|J, M\rangle$  possibles.

1. Montrer que  $\widehat{J}^2 = \widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2 + 2\widehat{J}_{1z}\widehat{J}_{2z} + \widehat{J}_1^+\widehat{J}_2^- + \widehat{J}_1^-\widehat{J}_2^+$ .



2. Pour chaque état  $\psi_{m_1 m_2} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2 \right\rangle$ , calculer  $\widehat{J}^2 \psi_{m_1 m_2}$  et  $\widehat{J}_z \psi_{m_1 m_2}$ . Calculer alors  $\widehat{J}^2 \left( \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \pm \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right)$  et en déduire qu'on peut écrire :
- $$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{2} |1, 0\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{2} |0, 0\rangle. \end{aligned}$$
3. En déduire l'expression de tous les vecteurs  $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2 \right\rangle$  en fonction des états  $|J, M\rangle$  possibles.

## 2.k Équation de Klein-Gordon

On considère l'équation de Klein Gordon  $(\square - m^2)\psi = 0$ . Montrer qu'on peut écrire une équation du premier ordre en temps sur la fonction d'onde à deux composantes  $\begin{pmatrix} \Phi \\ \Xi \end{pmatrix}$  en posant :

$$\Phi = \psi + \frac{i}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad ; \quad \Xi = \psi - \frac{i}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

## 2.l Spin et distribution angulaire

On considère une particule  $\Lambda$  de spin  $1/2$  au repos qui se désintègre selon :

$$\Lambda \rightarrow \mathbf{p} + \pi^- .$$

Le pion est une particule de spin nul. On suppose que le  $\Lambda$  est dans un état propre de  $\widehat{S}_z$  (projection du spin sur l'axe  $Oz$  d'un repère centré sur la particule) :  $|\Lambda, s = 1/2, s_z = \pm 1/2\rangle$ . On mesure la direction de l'impulsion du proton (repérée par les angles  $\theta$  et  $\varphi$  des coordonnées sphériques) et son hélicité  $\hbar\lambda$ , c'est-à-dire la projection de son spin sur sa quantité de mouvement :  $\hbar\lambda = (\vec{S} \cdot \vec{p})/|\vec{p}|$ . Après la mesure, le proton est donc dans l'état noté  $|\theta, \varphi, \lambda\rangle$ . L'amplitude de probabilité de cette observation est donnée par :

$$A_{\pm\frac{1}{2}, \lambda}(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi, \lambda | \mathbf{p}, \pi^-, j = 1/2, m = \pm 1/2 \rangle,$$

où  $|\mathbf{p}, \pi^-, j = 1/2, m = \pm 1/2\rangle$  désigne l'état final proton pion dans un état propre  $|1/2, m = \pm 1/2\rangle$  des opérateurs  $\widehat{J}^2$  et  $\widehat{J}_z$ . C'est-à-dire que la probabilité de trouver le proton dans la direction  $(\theta, \varphi)$  et l'élément d'angle solide  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  vaut  $|A_{\pm\frac{1}{2}, \lambda}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$ .

1. Quelles sont les valeurs possibles de  $\lambda$  ?

2. Justifier que l'état final est dans un état propre du moment cinétique total de  $\widehat{J}^2$  et  $\widehat{J}_z$ , et donner les valeurs propres.
3. En déduire :  $A_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(0, 0) = \langle 0, 0, -\frac{1}{2} | \mathbf{p}, \pi^-, j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \rangle = 0$  et  $A_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(0, 0) = 0$ .

On pose  $A^+ = A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(0, 0)$  et  $A^- = A_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(0, 0)$ . On cherche à obtenir  $A_{m, \lambda}(\theta, \varphi)$  en fonction de ces deux quantités. L'état  $|\theta, \varphi, \lambda\rangle$  du proton s'obtient à partir de l'état  $|0, 0, \lambda\rangle$  par une rotation  $\mathcal{R}_1$  de  $\theta$  autour de l'axe  $Oy$  suivie par une rotation  $\mathcal{R}_2$  de  $\varphi$  autour de  $Oz$ . On rappelle que la transformation d'un spineur par une rotation d'angle  $\alpha$  autour du vecteur unitaire  $\vec{u}$  est donnée par :

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp\left(-i\alpha \vec{u} \cdot \widehat{\mathbf{S}}/\hbar\right) \psi.$$

4. Calculer les opérateurs  $\widehat{\mathcal{R}}_1$  et  $\widehat{\mathcal{R}}_2$  correspondant à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ .
5. En déduire  $A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\theta, \varphi)$  et  $A_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\theta, \varphi)$  en fonction de  $A^+$  et  $A^-$ .
6. On suppose que  $s_z$ , la projection du spin du  $\Lambda$  sur l'axe  $Oz$ , vaut  $+1/2$ . Exprimer la probabilité de trouver le proton dans la direction  $(\theta, \varphi)$  en fonction de  $\alpha = \left(|A^+|^2 - |A^-|^2\right) / \left(|A^+|^2 + |A^-|^2\right)$ .

## 2.m Équations de continuité

Démontrer les équations de continuité pour les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon. On rappelle que :

— pour l'équation de Schrödinger :

$$\rho = \psi^* \psi \quad \text{et} \quad \vec{j} = -\frac{i}{2m} \left[ \psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right];$$

— pour l'équation de Klein-Gordon :

$$j^\mu = i [\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*] \quad \text{avec} \quad j^0 = \rho; \quad j^{1,2,3} = j_{x,y,z}.$$

# Exercices du chapitre 3

## 3.a Opérateur temps

On suppose que le temps est un opérateur, noté  $T$ , au même titre que les autres coordonnées d'espace temps.

Montrer qu'alors le commutateur  $[T, E]$  doit valoir  $(-i)$ .

En déduire que si  $|E\rangle$  est un vecteur propre du hamiltonien  $H$  pour la valeur propre  $E$  alors l'état  $e^{i\varepsilon T}|E\rangle$  avec  $\varepsilon$  positif infinitésimal est un vecteur propre pour une énergie inférieure à  $E$ .

On ne peut donc pas définir d'état fondamental (d'énergie minimale).

## 3.b Opérateur impulsion

Montrer que l'opérateur impulsion est hermitien. Indication : le démontrer pour une composante en exprimant par exemple la quantité  $\langle \psi_1 | \hat{p}_x \psi_2 \rangle$  de deux façons différentes.

## 3.c Matrices de Dirac

Les matrices de Dirac (matrices  $\gamma$ ) sont définies par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} ; \gamma^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{1,2,3} \\ -\sigma_{1,2,3} & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les matrices  $\gamma$  sont de trace nulle et de déterminant 1.

*Indication :* On montrera que  $\det \begin{pmatrix} 0 & N \\ M & 0 \end{pmatrix} = \det(-MN)$  où  $M$  et  $N$  sont des matrices carrées d'ordre 2.

2. On définit l'anticommutateur de deux matrices  $A$  et  $B$  par  $\{A, B\} = AB + BA$ . Montrer que  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_4$  où  $I_4$  est la matrice identité d'ordre 4.
3. Montrer que  $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$ .

4. Montrer que la trace du produit d'un nombre impair de matrices de Dirac est nulle.

$$\text{On définit } \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Vérifier cette égalité.  
6. Montrer que  $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$  ;  $(\gamma^5)^2 = I_4$  ;  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ .

### 3.d Encore sur les matrices de Dirac

Montrer que si une matrice carrée d'ordre 4 commute avec toutes les matrices de Dirac alors elle est proportionnelle à la matrice identité  $I_4$ .

### 3.e Covariance de l'équation de Dirac

Montrer que pour les transformations orthochrones (qui ne renversent pas le sens du temps :  $\Lambda^0_0 > 0$ ) :

$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0,$$

où  $S = S(\Lambda)$  est l'opérateur qui transforme le spineur de Dirac lors d'une transformation de Lorentz ( $\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$  avec  $x \rightarrow x' = \Lambda x$ ). On normalisera  $S(\Lambda)$  en imposant  $\det S(\Lambda) = 1$ .

### 3.f Opérateur spin sur les spineurs de Dirac

On donne le hamiltonien de Dirac :  $\hat{H}_D = \hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m \hat{I}$ . Calculer le commutateur  $[\hat{H}_D, \hat{L}]$  où  $\hat{L}$  est l'opérateur moment cinétique.

*Indication* : calculer sur une composante puis faire une permutation circulaire des indices.

Montrer que  $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$  commute avec  $\hat{H}_D$ , où  $\hat{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$  et  $\vec{\sigma}$  est le vecteur dont les composantes sont les matrices de Pauli.

En déduire que  $\hat{S}$  est l'opérateur spin pour les spineurs de Dirac.

### 3.g Équation de Weyl

Montrer que pour une particule de masse nulle, on peut trouver une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans toutes les coordonnées d'espace-temps compatible avec l'équation de Klein-Gordon en introduisant un spineur à seulement deux composantes.

# Exercices du chapitre 4

## 4.a Particules étranges

Dans le Modèle Standard, les quarks sont au nombre de six, répartis en trois familles comprenant chacune deux éléments de charge électrique  $+2/3$  et  $-1/3$ , l'unité de charge électrique étant la charge de l'électron. On rappelle que tous les quarks ont une charge baryonique  $+1/3$  et qu'on appelle méson une particule à interaction forte de charge baryonique nulle.

Peu après la découverte du méson  $\pi$  en 1947, de nouvelles particules instables ont été découvertes dans le rayonnement cosmique. Leur section efficace de production est élevée, mais leur durée de vie est « longue » ( $10^{-8}$  à  $10^{-10}$  s). Elles sont donc produites par interaction forte, mais se désintègrent par interaction faible. Ces deux caractéristiques apparemment contradictoires sont à l'origine de leur appellation « particules étranges ».

On introduit alors un nouveau nombre quantique, l'étrangeté  $S$ , qui est conservé lors d'une interaction forte ou électromagnétique, mais non lors d'une interaction faible.

À la suite d'une interaction forte, les particules étranges sont toujours produites par paires, l'une ayant une étrangeté positive, l'autre une étrangeté opposée. Par convention, on attribue l'étrangeté  $+1$  au méson neutre  $K^0$ .

On observe que la particule  $\Lambda$  est produite dans un accélérateur avec une section efficace élevée par la réaction :  $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$ .

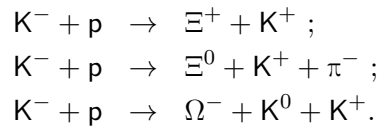
1. En déduire ses nombres quantiques (charges électrique et baryonique, étrangeté).
2. Même question pour le  $K^+$  dans :  $p + p \rightarrow p + \Lambda + K^+$ .
3. L'antiparticule du  $K^+$  est le  $K^-$ , celle du  $K^0$  est le  $\bar{K}^0$ . Indiquer leurs nombres quantiques.
4. Les désintégrations suivantes sont-elles possibles? Justifier.

$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^- ; \Lambda \rightarrow p + \pi^- \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \gamma ; K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu. \end{aligned}$$

5. Le  $\Lambda$  est constitué des trois quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$ . En déduire la charge électrique du quark  $s$  et son étrangeté. Montrer que tous les mésons

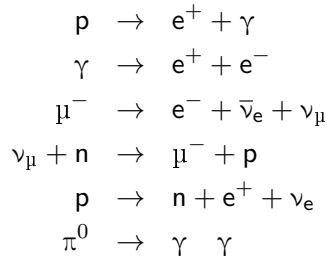
étranges  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  peuvent être formés à partir d'un quark  $u$ ,  $d$  ou  $s$  et d'un antiquark.

6. Trouver tous les baryons (particules de charge baryonique +1) d'étrangeté  $-2$  et  $-3$ , en écrivant leur composition en trois quarks (la prédiction théorique de l'existence du  $\Omega^-$  en 1963, suivie de sa découverte expérimentale l'année suivante a été le premier succès du modèle des quarks, la masse et les désintégrations de cette particule ayant été correctement déterminées à l'avance). Les identifier sachant qu'ils sont produits par les réactions suivantes :



## 4.b Lois de conservation

Indiquer si les désintégrations et réactions suivantes peuvent avoir lieu et la nature de l'interaction mise en jeu si c'est le cas :



## 4.c Désintégration à deux corps

Une particule de masse  $m$  se désintègre en deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$ . Calculer  $E_1$  et  $E_2$  leur énergie dans le centre de masse (éviter les calculs compliqués). Calculer  $|\vec{p}_1|$  et  $|\vec{p}_2|$ . Utiliser les unités naturelles.

## 4.d Matérialisation

1. Quelle est l'énergie minimale que doit avoir un photon pour se matérialiser en une paire électron-positron ? Montrer cependant que la réaction  $\gamma \rightarrow e^- + e^+$  est impossible dans le vide.
2. On considère un photon se propageant dans le voisinage d'un électron au repos. Calculer l'énergie minimale du photon pour que la matérialisation puisse avoir lieu par la réaction :  $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$ . On pourrait dire que l'électron joue un rôle catalyseur.

3. Le photon traverse à présent une plaque de plomb, et se trouve en présence des noyaux des atomes (notés  $N$ ). Calculer l'énergie minimale du photon pour que la matérialisation puisse avoir lieu par la réaction :  $\gamma + N \rightarrow N + e^+ + e^-$ . Comparer avec le résultat de la première question.
4. La section efficace de la réaction précédente est donnée par la formule de Bethe et Heitler, valable pour un photon d'énergie supérieure à 500 MeV :

$$\sigma = \alpha r_0^2 Z^2 \left[ \frac{28}{9} \log \left( 183 Z^{-1/3} \right) - \frac{2}{27} \right],$$

où  $\alpha = 1/137$  est la constante de structure fine,  $r_0 = 2,82 \text{ fm}$  est le rayon classique de l'électron, et  $Z$  le numéro atomique du noyau (82 pour le plomb).

(a) Calculer  $\sigma$ .

(b) Calculer la probabilité  $\Pi$  qu'un photon de 1 GeV se matérialise en traversant une plaque de plomb de  $500 \mu\text{m}$  d'épaisseur. La masse atomique du plomb est  $A = 207,2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et sa masse volumique  $\rho = 11,35 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . À cette énergie, on peut négliger les autres interactions du photon dans le plomb.

## 4.e Distribution de Dirac

On rappelle les propriétés suivantes de la distribution de Dirac :

— Pour les fonctions  $f$  définies en  $x_0$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) ;$$

— Si  $g$  est une fonction telle que  $g(x_i) = 0$  et  $g'(x_i) \neq 0$  alors

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|},$$

et par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}.$$

Par ailleurs, deux représentations de  $\delta$  seront utiles pour le cours :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) dk \quad \text{et} \quad \delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

1. Sachant que  $p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2$  calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) dp^0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) dp^0,$$

et pour  $f$  à support compact :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) f(p) d^4p,$$

où  $\theta$  est la fonction de Heaviside :  $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ .

2. Calculer :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{\sin^2(\Delta E t / 2\hbar)}{(\Delta E / 2\hbar)^2}$ .

#### 4.f Section efficace

La section efficace d'absorption des rayons gamma de 1 MeV par les atomes de plomb est de 10 b.

1. Quelle est la longueur d'absorption  $\lambda$  correspondante ? Le numéro atomique du plomb est 82, son nombre de masse 207, et sa masse volumique  $11 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .
2. Quelle fraction  $f$  de rayons gamma traverse 10 cm de plomb ?

#### 4.g Catastrophe au LHC

Le LHC est composé de deux anneaux circulaires de rayon  $R$  dans lesquels circulent deux faisceaux de protons en sens inverse et qui se croisent une fois par tour. Dans les deux faisceaux du LHC, les protons sont regroupés en paquets, et l'on suppose qu'il y a un seul paquet par faisceau pour simplifier. Chaque paquet est un cylindre de section  $S$  et de longueur  $L$ , dans lesquels les protons sont répartis uniformément. L'énergie cinétique nominale des protons est  $T = 7 \text{ TeV}$  ( $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$ ).

1. Montrer que leur vitesse est pratiquement égale à la vitesse de la lumière  $c$ .
2. Soient  $N_1$  et  $N_2$  le nombre des protons dans les deux paquets. Exprimer en fonction de la section efficace de collision  $\sigma$  le nombre  $x$  de collisions par croisement. On admettra que ce nombre est très petit devant  $N_1$  et  $N_2$ .
3. On donne  $\sigma = 30 \text{ mb}$ . Justifier l'ordre de grandeur de cette valeur.
4. On donne  $N_1 = N_2 = 10^{14}$ ,  $R = 4,5 \text{ km}$  et  $S = 0,5 \text{ mm}^2$ . Calculer le nombre  $\tau$  de collisions par seconde.



5. Quelle est la masse  $M$  de la particule la plus lourde qui peut être produite lors d'une collision ?
6. Quelle énergie minimale  $E$  un proton cosmique entrant en collision avec un proton au repos de l'atmosphère doit-il avoir pour produire une particule de masse  $M$  ?
7. La densité de flux de protons cosmiques d'énergie supérieure à  $10^{17}$  eV est  $\Phi = 1000$  protons par  $\text{km}^2$  et par an. Combien d'années  $N$  le LHC devrait-il fonctionner pour égaler le nombre de collisions déjà produites par les protons cosmiques depuis que la Terre existe, soit depuis environ 4,5 milliards d'années ? On donne le rayon de la Terre :  $R_T = 6400$  km.
8. Commenter alors sur le danger potentiel de la création d'une particule dangereuse (mini trou noir par exemple) au LHC.

# Exercices du chapitre 5

## 5.a Principe de moindre action

Un système est décrit par le lagrangien :

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

où  $\dot{x}$  désigne la dérivée  $dx/dt$ .

1. Écrire les équations de Lagrange pour ce système.
2. Quelle est la quantité conservée au cours du temps ?

## 5.b Lagrangien de dirac

Montrer que la densité de lagrangien :

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

conduit à l'équation de Dirac par le principe de moindre action généralisé.

## 5.c Espace de Fock

On définit les états notés  $|N\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle$  comme les états à  $n_1$  particules d'impulsion  $\vec{p}_1$ ,  $n_2$  particules d'impulsion  $\vec{p}_2 \dots$ , complètement symétriques par échange de deux particules. Montrer que :

$$\langle N|M\rangle \neq 0 \Rightarrow N = M.$$

Indication : utiliser l'hermiticité de l'opérateur  $a_{\vec{p}_i}^\dagger a_{\vec{p}_i}$ .

## 5.d Hamiltonien de Klein-Gordon

La densité de lagrangien de Klein-Gordon est donné par :

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{1}{2}m^2 \psi^2.$$

On rappelle que les solutions de l'équation de K-G sont :

$$\psi = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left( a_{\vec{p}} \exp(-ipx) + a_{\vec{p}}^\dagger \exp(ipx) \right)$$

avec :

$$x = (t, \vec{x}) \quad ; \quad p = (E, \vec{p}) \quad ; \quad E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

1. Exprimer la densité de hamiltonien  $\mathcal{H}$  en fonction de  $\psi$  et de ses dérivées.
2. Exprimer le hamiltonien  $H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}$  en fonction des opérateurs de création et d'annihilation.
3. Calculer :

$$H|0\rangle \quad ; \quad H a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle.$$

## 5.e Hamiltonien de Dirac

La densité de hamiltonien de Dirac est donnée par :  $\mathcal{H} = i\psi^\dagger \partial_0 \psi$ , et les solutions de l'équation de Dirac par :

$$\psi(x^\mu) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i} u_{\vec{p},i} \exp(-ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i}^\dagger v_{\vec{p},i} \exp(ip_\mu x^\mu) \right) \right].$$

Exprimer le hamiltonien  $H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}$  en fonction des opérateurs de création et d'annihilation.

## 5.f Tenseur énergie-impulsion

Soit un lagrangien  $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$ . On considère la variation  $\delta\mathcal{L}$  sous une translation d'espace-temps, soit par la transformation  $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu$ , où  $\varepsilon_\mu$  est infinitésimal.

1. Montrer que :

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon_\mu \partial^\mu \mathcal{L} = \varepsilon_\nu \partial^\mu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)} \partial^\nu \psi \right].$$

2. En déduire que le tenseur énergie-impulsion défini par :

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)} \partial_\nu \psi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

vérifie :  $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ .

3. En déduire que la quantité :

$$p_\nu = \int d^3\vec{x} T_{0\nu}$$

est conservée dans le temps.

## 5.g Théorème de Noether

On considère une densité de lagrangien  $\mathcal{L}(\dots, \psi_i, \partial_\mu \psi_i, \dots)$  dépendant de  $N$  champs  $\psi_i$ . On considère par ailleurs un groupe de transformations du système dépendant d'un paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$  (groupe de Lie) :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = g(x^\mu, \alpha) ; \psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x') G_i(\psi_j(x), \alpha).$$

On dit que le groupe est un groupe de symétrie du système si pour tout domaine d'intégration  $\Omega$ , l'action reste invariante sous l'action d'un élément du groupe :

$$\int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\mu \psi_i) = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(\psi'_i, \partial'_\mu \psi'_i).$$

On choisit la paramétrisation des transformations de sorte que pour  $\alpha = 0$  la transformation soit l'identité, et l'on considère une transformation infinitésimale. On écrit au premier ordre :

$$x'^\mu = x^\mu - \alpha f^\mu(x) ; \psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x') = \psi_i(x) + \alpha C_i(x).$$

Dans toute la suite, on se limitera au premier ordre en  $\alpha$ .

1. Calculer  $\partial_\nu x'^\mu$  et  $\partial'_\mu x^\nu$ .
2. Calculer  $\partial'_\mu (\psi'_i(x'))$ .
3. Montrer que le jacobien de la transformation  $x \rightarrow x'$  vaut :

$$J = 1 - \alpha \partial_\mu f^\mu(x).$$

4. En déduire que la variation de l'action s'écrit :

$$S' - S = \alpha \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \Theta^\mu,$$

avec

$$\Theta^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} [C_i(x) + \partial_\nu \psi_i(x) f^\nu(x)] - f^\mu(x) \mathcal{L}.$$

5. En déduire une quantité conservée au cours du temps, en supposant que les champs s'annulent à l'infini.
6. Application 1 : opérateur quantité de mouvement.  
Le lagrangien de Dirac est invariant par translation. En déduire l'opérateur quantité de mouvement.
7. Application 2 : moment cinétique.

Le lagrangien de Dirac est invariant par rotation. On considère une rotation infinitésimale d'angle  $\theta$  autour de l'axe 3 ( $Oz$ ).

(a) Exprimer les transformations

$$x \rightarrow x', \psi \rightarrow \psi' \text{ et } \psi^\dagger \rightarrow \psi'^\dagger$$

au premier ordre en  $\theta$ .

On rappelle que pour une transformation de Lorentz propre orthochrone  $\Lambda : \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$  où  $S(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]$ ,

$$\omega_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \text{ et } \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

$$\text{On posera : } \Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire l'expression des composantes  $z$  du moment cinétique total et du spin.

## 5.h Spin des solutions de l'équation de Dirac

Le calcul de l'expression de l'opérateur projection du spin sur l'axe des  $z$  est proposé à l'exercice 5.g. Le résultat est :

$$S_z = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \psi^\dagger \Sigma_3 \psi.$$

Calculer  $S_z |0\rangle$  puis  $S_z b_{\vec{p},i} |0\rangle$  et  $S_z d_{\vec{p},i}^\dagger |0\rangle$  pour chaque valeur de  $i = 1, 2$ .

# Exercices du chapitre 6

## 6.a Force de Lorentz

Montrer que la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}$$

découle du principe de moindre action appliqué au lagrangien :

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + q\vec{v} \cdot \vec{A} - qV,$$

où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur : 
$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial\vec{A}/\partial t \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases} .$$

Déterminer le hamiltonien associé.

## 6.b Invariance de jauge locale

On définit la densité de lagrangien suivante :

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \psi^\dagger, \partial_\mu \psi^\dagger) = \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi = \mathcal{L}_{KG}(\psi_1) + \mathcal{L}_{KG}(\psi_2),$$

où  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont deux opérateurs hermitiques indépendants tels que  $\psi = (\psi_1 + i\psi_2)/\sqrt{2}$ , et donc  $\psi^\dagger = (\psi_1 - i\psi_2)/\sqrt{2}$ .

Montrer que  $\mathcal{L}$  est invariant par le changement de phase  $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-ie\theta(x)}$  si l'on remplace  $\partial_\mu$  par  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  et si lors du changement de phase  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta$ .

## 6.c Courant fermionique

1. Montrer que la densité de lagrangien  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$  conduit à l'équation de Dirac par le principe de moindre action.
2. Montrer que  $\mathcal{L}$  est invariant par changement de phase global sur  $\psi$  :

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(-ie\theta)\psi.$$

3. Quel est le courant conservé ?

## 6.d Interaction électromagnétique des fermions

1. Montrer que la densité de lagrangien  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$  est invariante par la transformation de jauge locale  $\psi \rightarrow \psi' = \exp(-iq\theta)\psi$ , où  $\theta$  est une fonction des coordonnées d'espace-temps, si l'on remplace  $\partial_\mu$  par  $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$  et si la transformation de jauge sur  $A_\mu$  est donnée par  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta$ .
2. Quel est le terme d'interaction électromagnétique ?

# Exercices du chapitre 7

## 7.a Traces et spineurs

Montrer la relation :

$$u_{\vec{p},i}^\dagger \gamma^0 v_{\vec{q},j} v_{\vec{q},j}^\dagger \gamma^0 u_{\vec{p},i} = \text{Tr} \left( v_{\vec{q},j} \overline{v_{\vec{q},j}} u_{\vec{p},i} \overline{u_{\vec{p},i}} \right).$$

Indication : exprimer le membre de gauche explicitement avec les indices des composantes des différentes quantités.

## 7.b Relations de fermeture

Montrer les relations :

$$\sum_{i=1}^2 u_{\vec{p},i} \overline{u_{\vec{p},i}} = (\not{p} + m)$$

et

$$\sum_{j=1}^2 v_{\vec{q},j} \overline{v_{\vec{q},j}} = (\not{q} - m).$$

## 7.c Propagateur

Le propagateur d'un boson de spin 0 et de masse  $m$  est défini par :

$$D_F(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} (\theta(t) \exp[-ip_\mu x^\mu] + \theta(-t) \exp[ip_\mu x^\mu]).$$

Montrer que la transformée de Fourier  $f(p)$  de  $D_F(x)$  définie par :

$$D_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(p) \exp[-ip_\mu x^\mu]$$

vaut :

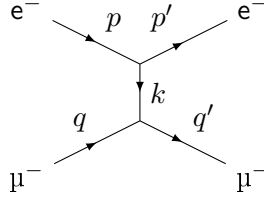
$$f(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

où  $\varepsilon$  est une quantité positive infiniment petite (nécessaire pour définir la valeur de l'intégrale par application du théorème des résidus).



## 7.d Diffusion électron muon

On considère la diffusion  $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$ . La quadri-impulsion de l'électron entrant est  $p$ , celle du muon  $q$  et la quadri-impulsion transférée est  $k = p - p'$ , où  $p'$  est la quadri-impulsion de l'électron diffusé.



On suppose l'état initial (noté  $i$ ) non polarisé et on ne mesure pas la direction des spins des particules sortantes dans leur état final (noté  $f$ ).

On rappelle que la section efficace différentielle de diffusion est donnée par :

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3 \vec{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{1}{\sqrt{(p \cdot q)^2 - m_e m_\mu}} |M_{fi}|^2.$$

1. On note  $m$  l'état de spin du muon entrant,  $l$  celui du muon sortant,  $i$  celui de l'électron entrant et  $j$  celui de l'électron sortant. On note  $M(m, l, i, j)$  l'élément de matrice de diffusion correspondant. Montrer que la section efficace différentielle mesurée est donnée par

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \prod_{k=1}^{n_f} \frac{d^3 \vec{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{1}{4\sqrt{(p \cdot q)^2 - m_e m_\mu}} \overline{|M|^2}$$

où on exprimera  $\overline{|M|^2}$  en fonction des  $M(m, l, i, j)$ .

2. Montrer que :

$$\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{k^4} \times [(q \cdot p) (q' \cdot p') + (q \cdot p') (q' \cdot p) - m_\mu^2 (p \cdot p') - m_e^2 (q \cdot q') + 2m_\mu^2 m_e^2].$$

3. Dans l'approximation ultra-relativiste (toutes les impulsions très grandes devant les masses, montrer que :

$$\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{k^4} (q \cdot p q' \cdot p' + q \cdot p' q' \cdot p) = \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2),$$

où on a défini les variables de Mandelstam :

—  $s = (q + p)^2 = (q' + p')^2 \simeq 2q \cdot p \simeq 2q' \cdot p'$  carré de l'énergie dans le centre de masse ;

—  $t = (p - p')^2 = (q' - q)^2 = k^2$  carré de la quadri-impulsion transférée ;

—  $u = (p - q')^2 = (p' - q)^2 \simeq -2p \cdot q' \simeq -2p' \cdot q$  ;

—  $s + t + u =$  somme des carrés des masses des particules entrantes et sortantes.

4. On démontrera aussi la dernière relation, qui prouve qu'il n'y a en fait que deux variables indépendantes.

# Exercices du chapitre 8

## 8.a Moment magnétique des nucléons

1. Fonction d'onde de couleur des baryons.

Le baryon  $\Delta^{++}$  est constitué de trois quarks  $u$  et possède un spin  $3/2$ . Sa masse est  $1,23 \text{ GeV}/c^2$ , proche de celle des nucléons. Les quarks sont donc dans l'état d'énergie minimale et la fonction d'onde spatiale  $\psi_s(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$  correspond à un moment cinétique orbitale nul. Elle est alors symétrique par l'échange de deux quarks.

Montrer que la fonction d'onde de spin est aussi symétrique par échange de deux quarks.

Indication : exprimer l'état  $|s = 3/2, m_s = 3/2\rangle$  en fonction des états de spin  $1/2$  des 3 quarks et utiliser l'opérateur  $S^-$  pour calculer les autres états. On rappelle que de façon générale :

$$J^- |j, m\rangle = \begin{cases} \hbar\sqrt{(j(j+1) - m(m-1))} |j, m-1\rangle & \text{pour } m > -j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction d'onde globale devant être antisymétrique d'après le principe de Pauli, ce fut historiquement un argument pour introduire un nombre quantique supplémentaire, la couleur, pour pouvoir rendre la fonction d'onde du  $\Delta^{++}$  antisymétrique. Avec trois couleurs, pour un quark on a :

$$|\psi_c\rangle = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix} = \psi_r |r\rangle + \psi_g |g\rangle + \psi_b |b\rangle.$$

La fonction d'onde de couleur totalement antisymétrique pour trois quarks s'obtient simplement avec le déterminant :

$$\psi_c = \begin{vmatrix} \psi_{r1} & \psi_{r2} & \psi_{r3} \\ \psi_{g1} & \psi_{g2} & \psi_{g3} \\ \psi_{b1} & \psi_{b2} & \psi_{b3} \end{vmatrix} / \sqrt{6}.$$

Les interactions fortes étant indépendantes de la saveur des quarks, la fonction d'onde de couleur est la même pour tous les baryons, et elle est antisymétrique.

2. Fonction d'onde de spin des nucléons.

En déduire la fonction d'onde de spin des nucléons, sachant que le proton et le neutron ont un spin  $1/2$ .

Indication : exprimer la fonction d'onde du proton comme la combinaison linéaire d'une fonction d'onde  $\psi_1$  avec les spins des quarks  $u$  antiparallèles et d'une fonction d'onde  $\psi_2$  avec les spins parallèles,  $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ , imposer que le spin global soit  $1/2$  par  $S^+\psi = 0$ , et normaliser  $\psi$ . Pour le neutron, inverser les rôles des quarks  $u$  et  $d$ .

3. Moment magnétique des nucléons.

On rappelle que le moment magnétique d'un fermion élémentaire s'exprime :  $\vec{\mu} = \frac{q}{m}\vec{S}$ .

Montrer que le moment magnétique du proton vaut :  $\mu_p = (4\mu_u - \mu_d)/3$ . Calculer le rapport du moment magnétique du proton au moment magnétique du neutron  $\mu_p/\mu_n$ , en supposant que les quarks  $u$  et  $d$  ont la même masse  $m$ .

Application numérique : calculer  $\mu_p/\mu_0$ , et  $\mu_n/\mu_0$  où  $\mu_0$  est le magnéton nucléaire :  $\mu_0 = e\hbar/2M_p$ , où  $M_p$  est la masse du proton.

On donne :  $M_p = 938 \text{ MeV}/c^2$  ;  $m = 333 \text{ MeV}/c^2$ . Les valeurs mesurées sont respectivement 2,79 et  $-1,91$ . On utilisera la fonction d'onde du proton calculée précédemment et l'expression :

$$\mu_p = \langle \psi_p(m_s = +1/2) | \hat{\mu}_z | \psi_p(m_s = +1/2) \rangle.$$

où l'axe  $z$  est l'axe sur lequel on mesure le spin.

## 8.b Invariance de jauge du lagrangien d'interaction QCD

Vérifier que le lagrangien d'interaction QCD :

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i\gamma^\mu D_\mu - m) q = \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q - g_s \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q G^a_\mu$$

est invariant sous la transformation de jauge infinitésimale définie par (attention à la sommation sur les indices répétés, les notations sont parfois ambiguës) :

$$q \rightarrow q' = \left( 1 - \frac{i}{2} g_s d\alpha^a \lambda_a \right) q$$

$$G^a_\mu \rightarrow G'^a_\mu = G^a_\mu + g_s d\alpha^b f_{abc} G^c_\mu + \partial_\mu d\alpha^a.$$

## 8.c Facteur de couleur

On veut montrer que si le méson  $\pi^+$  (qui est un état lié  $u\bar{d}$ ) est dans un état singlet de couleur, c'est-à-dire invariant par transformation  $SU(3)$ , alors le potentiel QCD est attractif.

La fonction d'onde du  $\pi^+$  s'écrit :  $\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_r \bar{d}_r + u_g \bar{d}_g + u_b \bar{d}_b)$  que l'on note pour alléger l'écriture :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}).$$

1. Montrer que  $\psi$  est invariant par la transformation :

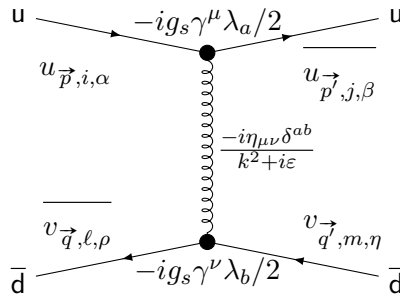
$$(r, g, b)^\top \rightarrow (r', g', b')^\top = U(r, g, b)^\top$$

où l'opérateur  $U$  est un élément de  $SU(3)$ .

2. En utilisant les règles de Feynman indiquées sur la figure ci-dessous et les expressions des matrices de Gell-Mann données dans le cours, montrer que le facteur de couleur de la diffusion :

$$u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d}$$

vaut  $4/3$ .



*Indication :*

On calculera le facteur de diffusion pour une paire couleur anticouleur fixée dans l'état initial vers chaque paire possible de l'état final et l'on obtiendra le facteur de couleur en exprimant l'amplitude de diffusion sous la forme :

$$\langle \bar{\psi} | \mathbf{S} | \psi \rangle = \frac{1}{3} \left( \sum_{c=r,g,b} \langle c\bar{c} | \mathbf{S} | c\bar{c} \rangle + \sum_{c_1, c_2=r,g,b}^{c_1 \neq c_2} \langle c_1 \bar{c}_1 | \mathbf{S} | c_2 \bar{c}_2 \rangle \right).$$

3. En utilisant l'amplitude de diffusion QED similaire, dire pourquoi le potentiel est attractif.

## 8.d Lagrangien de propagation des gluons

Montrer que la densité de lagrangien QCD :  $-\frac{1}{4}\mathcal{G}_{\mu\nu}^a\mathcal{G}^{a\mu\nu}$  n'est pas invariante de jauge locale si l'on définit :  $\mathcal{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a$ .

Indication : On calculera la variation de  $\mathcal{G}_{\mu\nu}^a$  sous une transformation de jauge locale donnée par :

$$\begin{cases} q \rightarrow q' = U(x)q & \text{avec } U(x) = \exp \left[ -ig_s \sum_{a=1}^8 \alpha^a(x)\lambda_a/2 \right] \\ G_\mu^a \rightarrow G_\mu^{\prime a} = G_\mu^a + g_s \alpha^b(x) f_{abc} G_\mu^c + \partial_\mu \alpha^a(x). \end{cases}$$

# Exercices du chapitre 9

## 9.a Renversement du temps

1. Montrer que si on transforme la fonction d'onde des spineurs de Dirac selon la règle :  $\psi'(-t, \vec{x}) = T[\psi(t, \vec{x})] = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, \vec{x})$ , on obtient une fonction d'onde vérifiant une équation de Dirac avec les coordonnées transformées par l'opérateur  $T$ .
2. Montrer que  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  se transforme comme :

$$T(j^0, \vec{j})^\top = (j^0, -\vec{j})^\top.$$

## 9.b Symétries discrètes

Montrer que l'équation de Dirac est invariante par les transformations de parité, de conjugaison de charge et de renversement du temps.

## 9.c Parité intrinsèque

Le  $\pi^0$  est un méson de spin nul. Il se désintègre par interaction électromagnétique en deux photons. On se place dans le référentiel du  $\pi^0$ .

1. Montrer que les deux photons ont la même hélicité.

On admet que le photon n'a que deux hélicités possibles (+1 et -1). Les états d'hélicités possibles normalisés des deux photons sont notés  $|1, 1\rangle$  et  $|-1, -1\rangle$ .

2. Montrer que l'opérateur parité  $P$  échange ces deux états d'hélicité.

Le  $\pi^0$  est état propre de  $P$ . On cherche à déterminer la valeur propre associée à cet état propre. On la nomme parité intrinsèque du  $\pi^0$ .

3. Dédurre de la question 2 les deux états finals possibles normalisés pour les deux photons sous forme d'une combinaison linéaire des états  $|1, 1\rangle$  et  $|-1, -1\rangle$ .

On note  $|+\rangle$  (resp.  $|-\rangle$ ) l'état correspondant à la valeur propre +1 (resp. -1). Les états d'hélicité définie d'un photon correspondent aux états polarisés

circulairement. On peut aussi polariser les photons linéairement suivant les axes  $x$  et  $y$  perpendiculaires à leur direction de propagation. On note  $|x\rangle$  l'état polarisé suivant  $x$ .

On admet la relation :  $|x\rangle = (|-1\rangle - |+1\rangle) / \sqrt{2}$ .

De même :  $|y\rangle = i(|-1\rangle + |+1\rangle) / \sqrt{2}$ .

Les facteurs de phase sont conventionnels.

4. Montrer les relations :

$$\begin{cases} |+\rangle = (|x, x\rangle - |y, y\rangle) / \sqrt{2} \\ |-\rangle = i(|x, y\rangle + |y, x\rangle) / \sqrt{2}. \end{cases}$$

5. On mesure la polarisation linéaire des deux photons et on trouve qu'ils ont des polarisations linéaires différentes. En déduire la parité intrinsèque du  $\pi^0$ .

## 9.d Oscillation des neutrinos

Dans cet exercice, sauf mention contraire, on utilise les unités naturelles. On suppose de plus que les neutrinos sont de masse nulle ou très petite (inférieure à quelques  $\text{eV}/c^2$ ).

A. Désintégration du pion chargé.

Soit la désintégration d'un pion chargé au repos :  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ .

1. Calculer l'énergie  $E_1$  du neutrino émis en fonction des masses  $m_\pi$  et  $m_\mu$  du pion et du muon. Pour cette question, on négligera la masse du neutrino.

A.N. : On donne :  $m_\pi = 139,6 \text{ MeV}/c^2$ , et  $m_\mu = 105,7 \text{ MeV}/c^2$ .

B. Propagation des neutrinos dans le vide.

On suppose que le neutrino est émis dans la direction  $x$  et on supposera qu'il se propage dans le vide sous la forme d'une onde plane  $\psi(t, x) = \exp[i(E_1 t - p_1 x)] |\nu_1\rangle$ , où  $|\nu_1\rangle$  est la fonction d'onde initiale du neutrino de masse  $m_1$  (on sait que c'est plutôt un paquet d'ondes qui décrit cette propagation, mais la description en onde plane suffit pour le phénomène étudié ici).

En fait, lors de la désintégration du pion, le neutrino émis est un  $\nu_\mu$ , une superposition des états propres de masse  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  :  $|\nu_\mu\rangle = \alpha |\nu_1\rangle + \beta |\nu_2\rangle + \gamma |\nu_3\rangle$ .

Les masses des neutrinos ont pour origine leur interaction avec le champ de Higgs et d'autres effets quantiques, et il n'y a aucune raison pour que l'état produit par interaction faible soit un état propre de masse.

On suppose que l'on peut négliger la contribution d'un des trois états propres, et on écrit :  $|\nu_\mu\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle + \sin\theta |\nu_2\rangle$ . On appelle  $\theta$



l'angle de mélange. Compte tenu de la méthode de détection, on fait l'hypothèse que les deux neutrinos  $\nu_1$  et  $\nu_2$  ont la même énergie.

On notera  $m_2$  la masse du  $\nu_2$ .

2. Écrire la fonction d'onde décrivant l'évolution du  $\nu_\mu$  dans le vide en fonction de  $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, x, t$ , de l'angle de mélange, des énergies et des masses.
3. Sachant que  $\langle \nu_2 | \nu_1 \rangle = 0$ , en déduire la probabilité  $P$  de mesurer le neutrino dans l'état  $\nu_\mu$  à la distance  $L$  de sa création. On ne mesure pas la quantité de mouvement des neutrinos et on peut supposer que les deux neutrinos (les paquets d'onde) se propagent à la vitesse de la lumière ( $L = t$ ). On se limitera à un développement limité à l'ordre 2 sur la masse des neutrinos. On exprimera  $P$  en fonction de  $L, E$  (énergie des neutrinos),  $\sin^2(2\theta)$  et  $\Delta m^2$ , où  $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ . On mettra  $P$  sous la forme :

$$P = 1 - f(\theta) \times g(m_1, m_2, L, E),$$

où  $E = E_1 = E_2$  et  $f$  et  $g$  sont des fonctions réelles. Cette formule justifie le nom d'oscillations donné à l'observation de ce phénomène de disparition apparente des neutrinos produits.

4. Rétablir les constantes  $\hbar$  et  $c$  dans la relation donnant  $P$ .
5. On exprime la masse des neutrinos en  $\text{eV}/c^2$ , leur énergie en  $\text{GeV}$ , et les distances en  $\text{km}$ . Écrire  $P$  en fonction de  $\sin^2(2\theta)$  et de  $\sin^2(K \times \Delta m^2 L/E)$ , où  $K$  est une constante numérique que l'on calculera.
6. A.N. : calculer  $P$  avec  $\theta = 45^\circ$ ,  $\Delta m^2 = 3 \times 10^{-3} (\text{eV}/c^2)^2$  et  $E = 1 \text{ GeV}$  pour  $L = 15 \text{ km}$  et  $L = 13000 \text{ km}$ .

### C. Anomalie des neutrinos atmosphériques

Les rayons cosmiques qui pénètrent dans l'atmosphère (d'épaisseur inférieure à  $15 \text{ km}$ ) produisent des gerbes de particules, et notamment des pions chargés qui se désintègrent eux-mêmes et créent ainsi des  $\nu_\mu$ . Ces neutrinos ont une énergie typique de  $1 \text{ GeV}$ . Un détecteur à la surface de la Terre détectera une petite fraction de ces neutrinos. La section efficace d'absorption des neutrinos par les nucléons dans la matière est  $\sigma \approx 10^{-42} \text{ m}^2$  à cette énergie.

7. Quel est le pourcentage des neutrinos en provenance de  $\theta = 180^\circ$  absorbés par la Terre ( $\theta$  est l'angle zénithal, angle entre la direction d'où vient le neutrino et la verticale montante)? On rappelle que la Terre a un rayon d'environ  $6400 \text{ km}$ . On prendra une masse volumique moyenne pour la Terre de  $5,5 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$ .
8. Le rapport des flux mesurés  $\text{flux}(\theta = 180^\circ)/\text{flux}(\theta = 0^\circ)$  de  $\nu_\mu$  après correction d'angle solide est d'environ  $60 \%$ . C'est ce qui a

été appelé l'anomalie des neutrinos atmosphériques. Dans le cadre du modèle de la partie 2 de cet exercice, peut-on en conclure que les neutrinos ont une masse ?

*C'est une des mesures qui a été récompensée par le prix Nobel de physique 2015.*

# Exercices du chapitre 10

## 10.a Chiralité

Démontrer que pour un spineur de Dirac à quatre composantes  $u$  :

$$m \bar{u} u = m (\bar{u}_R u_L + \bar{u}_L u_R).$$

On précisera soigneusement la signification des notations.

## 10.b Hélicité

On définit l'hélicité comme la projection du spin sur l'impulsion de la particule :

$$\hat{h} = \frac{\hat{\vec{S}} \cdot \vec{p}}{\|\vec{p}\|} \text{ où on rappelle : } \hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Les composantes de  $\vec{p}$  en coordonnées sphériques sont  $(\|\vec{p}\|, \theta, \varphi)$ .

1. Exprimer  $\hat{h}$  en fonction de  $\theta$  et  $\varphi$ .
2. En déduire que le spineur  $\psi$  défini ci-dessous est vecteur propre de  $\hat{h}$  :

$$\psi = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \exp(i\varphi) \sin(\theta/2) \\ \frac{\|\vec{p}\|}{E+m} \cos(\theta/2) \\ \frac{\|\vec{p}\|}{E+m} \exp(i\varphi) \sin(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

## 10.c Violation des symétries discrètes

1. Montrer que le terme d'interaction  $\mathcal{L}_{W12} = W_\mu^+ \bar{\nu}_L \gamma^\mu \mathbf{L}_L + W_\mu^- \bar{\mathbf{L}}_L \gamma^\mu \nu_L$  n'est pas invariant par transformation  $P$  ou  $C$ , mais l'est par la transformation produit  $CP$ .
2. Montrer que  $\mathcal{L}_{W12}$  est invariant par renversement du temps. On prendra garde que l'opérateur  $T$  est antiunitaire.

## 10.d Désintégration du pion chargé

On considère le pion chargé  $\pi^+$  ou  $\pi^-$ .

1. Quelle est sa parité intrinsèque ?
2. Quelle est l'interaction responsable de sa désintégration ?
3. Dessiner le diagramme de Feynman le plus simple correspondant.
4. On donne le facteur au vertex de l'interaction fermion-boson W :

$$-i \frac{g_W}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} C$$

où  $C$  est une constante qui vaut 1 pour les leptons et qui dépend de la paire quark-antiquarks. En déduire l'amplitude de la désintégration à l'ordre le plus bas des perturbations.

5. On se place dans le référentiel du centre de masse du pion. On admettra que, dans l'expression de l'amplitude, la partie concernant les quarks se réduit à un terme de la forme  $f_\pi p_\mu$ , où  $f_\pi$  est une constante et  $p_\mu$  le quadrivecteur énergie impulsion du pion, soit  $f_\pi m_\pi$  dans le référentiel du centre de masse. Pouvez-vous justifier ?
6. Le propagateur du W se réduit à  $i\eta^{\mu\nu}/M_W^2$ . Justifier.  
On donne  $M_W = 80,4 \text{ GeV}/c^2$ .
7. On néglige la masse des neutrinos. Donner l'expression du spineur de l'antineutrino  $v_\nu$  pour chaque valeur possible de son hélicité. On définit l'axe  $z$  suivant l'impulsion de l'antineutrino  $\vec{p} = p_z \vec{e}_z$  avec  $p_z > 0$
8. Montrer que seule une hélicité contribue à cause du facteur  $(1 - \gamma^5)$ .
9. En déduire l'expression de l'amplitude.
10. En déduire le rapport des taux de désintégration  $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$  et  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ . Comparer à la valeur expérimentale  $1,23 \times 10^{-4}$ .  
On donne  $M_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$  et  $M_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$ .

## 10.e Énergie du vide

Dans les années 1990, l'accélération de l'expansion de l'Univers a été découverte en comparant le décalage vers le rouge des supernovæ et leur distance de luminosité. Une interprétation dans le cadre du modèle de concordance de la cosmologie est l'existence d'une énergie noire emplissant l'Univers.

1. On pourrait imaginer estimer la densité de cette énergie noire à partir du potentiel de Higgs. Avec les valeurs données dans le cours, calculer la densité d'énergie potentielle de Higgs au minimum (donc dans le vide).

Les mesures donnent :  $0,35 \times 10^{-5} \text{ GeV}/\text{cm}^3$ . Comparer.

On exprimera les densités en  $\text{GeV}^4$ .

Une autre hypothèse serait la contribution des énergies de point 0 des champs de particules, avec une contribution de :

$$\rho = \pm \int d^3 \vec{p} \frac{p^0}{2}$$

par composante, le signe dépendant de la nature bosonique ou fermionique du champ.

2. Calculer l'ordre de grandeur de cette densité en supposant que l'intégrale doit être bornée à l'énergie de Planck ( $pc < \Lambda \sim 10^{19}$  GeV), énergie à laquelle on s'attend à ce que la quantification s'applique à la gravitation. Comparer avec la valeur expérimentale.