

# Introduction à la physique des particules

## Exercices corrigés

Pascal Debu

*Département de physique des particules  
Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives*

Année scolaire 2023-2024



ENSTA

Code du cours : PAQT12

# Table des matières

<b>1 Exercices du chapitre 1</b>	<b>4</b>
a Découverte de l'électron . . . . .	4
<b>2 Exercices du chapitre 2</b>	<b>5</b>
a Unités naturelles . . . . .	5
b Transformation de Lorentz . . . . .	5
c Électrons et photons . . . . .	6
d Dilatation du temps . . . . .	6
e Paradoxe des jumeaux . . . . .	7
f Énergie seuil . . . . .	8
g Élément d'intégration . . . . .	9
h Conservation de l'énergie-impulsion . . . . .	11
i Inégalités de Heisenberg . . . . .	12
j Longueur d'onde de de Broglie . . . . .	12
k Opérateurs moments cinétiques . . . . .	13
l Addition des moments cinétiques . . . . .	17
m Équation de Klein-Gordon . . . . .	22
n Spin et distribution angulaire . . . . .	22
o Équations de continuité . . . . .	24
<b>3 Exercices du chapitre 3</b>	<b>26</b>
a Opérateur temps . . . . .	26
b Opérateur impulsion . . . . .	27
c Trace des matrices de Dirac . . . . .	27
d Commutation avec les matrices de Dirac . . . . .	29
e Covariance de l'équation de Dirac . . . . .	29
f Opérateur spin sur les spineurs de Dirac . . . . .	30
g Équation de Weyl . . . . .	31
<b>4 Exercices du chapitre 4</b>	<b>32</b>
a Particules étranges . . . . .	32
b Lois de conservation . . . . .	34
c Désintégration à deux corps . . . . .	35

d	Matérialisation . . . . .	35
e	Distribution de Dirac . . . . .	37
f	Représentation de la distribution de Dirac . . . . .	38
g	Section efficace . . . . .	40
h	Catastrophe au LHC . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Exercices du chapitre 5</b>	<b>42</b>
a	Principe de moindre action . . . . .	42
b	Densité de hamiltonien . . . . .	42
c	Lagrangien de dirac . . . . .	43
d	Espace de Fock . . . . .	44
e	Hamiltonien de Klein-Gordon . . . . .	44
f	Hamiltonien de Dirac . . . . .	47
g	Tenseur énergie-impulsion . . . . .	48
h	Théorème de Noether . . . . .	49
i	Spin des solutions de l'équation de Dirac . . . . .	53

# Exercices du chapitre 1

## 1.a Découverte de l'électron

Thomson a mesuré la charge  $Q$  déposée par les rayons cathodiques produits pendant un certain temps à l'aide d'un électromètre, leur énergie cinétique  $mv^2/2$  par l'élévation de température  $\Delta T$  d'un calorimètre de capacité calorifique  $C$ , et le rayon de courbure  $r$  de leur trajectoire dans un champ magnétique  $B$  orthogonal à leur direction. Comment a-t-il obtenu le rapport  $e/m$  ?

**Réponse**

$$\begin{cases} Q = Ne \\ C\Delta T = Nmv^2/2 \\ evB = mv^2/r \end{cases} \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{2C\Delta T}{QB^2r^2}.$$

# Exercices du chapitre 2

## 2.a Unités naturelles

La constante de structure fine  $\alpha$  est une constante sans dimension qui donne une mesure de l'intensité de l'interaction électromagnétique. Elle est définie par  $\alpha = e^2/4\pi$  en unités naturelles. Calculer  $1/\alpha$ .

### Réponse

On écrit  $[Q^2 c^x \hbar^y k^z \varepsilon_0^\nu] = [1]$ .

avec :  $[c] = Lt^{-1}$ ;  $[\hbar] = ML^2t^{-1}$ ;  $[k] = ML^2t^{-2}T^{-1}$ ;  $[\varepsilon_0] = Q^2L^{-3}M^{-1}t^2$ .

Pour  $\varepsilon_0$  utiliser l'expression de la force de Coulomb  $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2}$  pour déterminer la dimension.

On obtient sans peine :  $z = 0$  ;  $\nu = -1$  ;  $y = -1$  ;  $x = -1$ .

D'où :  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$ .

## 2.b Transformation de Lorentz

Montrer que la composition de deux transformations de Lorentz spéciales suivant le même axe est équivalente à une transformation de Lorentz de rapidité égale à la somme des rapidités des deux transformations.

### Réponse

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh \Omega_1 & -\sinh \Omega_1 \\ -\sinh \Omega_1 & \cosh \Omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh \Omega_2 & -\sinh \Omega_2 \\ -\sinh \Omega_2 & \cosh \Omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh \Omega_2 & -\sinh \Omega_2 \\ -\sinh \Omega_2 & \cosh \Omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \Omega_1 & -\sinh \Omega_1 \\ -\sinh \Omega_1 & \cosh \Omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh (\Omega_1 + \Omega_2) & -\sinh (\Omega_1 + \Omega_2) \\ -\sinh (\Omega_1 + \Omega_2) & \cosh (\Omega_1 + \Omega_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 2.c Électrons et photons

1. Lorsqu'on bombarde une cible avec des rayons cathodiques de quelques keV, les électrons passant à proximité des atomes sont déviés et perdent alors de l'énergie qu'ils émettent sous forme de photons dans la gamme des rayons X (rayonnement de freinage). Pour un électron accéléré sous la tension  $U$ , quelle est la longueur d'onde minimale des rayons X émis ? Application numérique :  $U = 20 \text{ kV}$ .
2. Inversement, un photon de longueur d'onde  $\lambda_i$  qui frappe et éjecte un électron au repos dans la matière est dévié d'un angle  $\theta$ . C'est la diffusion Compton. Exprimer la longueur d'onde  $\lambda_f$  du photon sortant en fonction de  $\lambda_i$  et de  $\theta$ . Calculer  $(\lambda_f - \lambda_i)$  pour  $\theta = 60^\circ$ . On donne la longueur d'onde de Compton  $\lambda_C = h/m_e c = 0,024 \text{ \AA}$ .

### Réponses

1. L'électron ne peut pas perdre plus que son énergie cinétique :

$$hc/\lambda < eU \Rightarrow \lambda > hc/eU = 6,3 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

2. On utilise la conservation de l'énergie et de l'impulsion. En appelant  $p_i$  et  $p_f$  les impulsions des photons entrant et sortant et  $p_e$  celle de l'électron, on a :

$$\begin{cases} p_i c + m_e c^2 = p_f c + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \Rightarrow p_e^2 = (p_i - p_f)^2 + 2m_e c (p_i - p_f) \\ \vec{p}_i = \vec{p}_f + \vec{p}_e \Rightarrow p_e^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2p_i p_f \cos \theta. \end{cases}$$

Par soustraction :  $2m_e c (p_i - p_f) = 2p_i p_f (1 - \cos \theta)$ .

Pour un photon :  $\lambda = h/p$ , d'où :  $(\lambda_f - \lambda_i) = \lambda_C (1 - \cos \theta)$ .

3. Application numérique :  $(\lambda_f - \lambda_i) = \lambda_C (1 - \cos \theta) = 0,0012 \text{ nm}$ .

## 2.d Dilatation du temps

Le muon a une masse de  $106 \text{ MeV}/c^2$  et une durée de vie  $\tau$  de  $2,2 \text{ } \mu\text{s}$ . On considère un muon d'énergie cinétique  $T$  de  $106 \text{ GeV}$ . Quelle distance parcourt-il pendant une durée de vie ? Comparer à  $c\tau$ .

### Réponses

La durée de vie est définie dans le référentiel au repos du muon. Dans le référentiel du laboratoire :

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

avec  $\gamma = E/mc^2$ .

Comme  $T \gg mc^2$   $E \simeq T$  et  $\gamma = 1000$ ,  $\beta \simeq 1$ .

Dans le référentiel du muon,  $x = 0$  et  $t = 2,2 \text{ } \mu\text{s}$ , la distance parcourue dans le référentiel du laboratoire vaut :

$$1000 \times 1 \times 3 \times 10^8 \times 2,2 \times 10^{-6} = 6,6 \times 10^5 \text{ m} = 660 \text{ km} = 1000 \times c\tau.$$

## 2.e Paradoxe des jumeaux

On considère deux jumeaux  $J_a$  et  $J_b$  initialement immobiles en  $x = 0$  à  $t = 0$  dans leur référentiel commun supposé galiléen.  $J_b$  décide alors de partir dans une fusée dans la direction des  $x$  positifs avec la vitesse  $v_1 > 0$ . À l'instant  $\tau_R$ , mesuré dans son propre repère,  $J_b$  décide de repartir brusquement voir son frère et revient vers les  $x$  négatifs à la vitesse  $v_2 < 0$  mesurée dans le repère de  $J_a$ .

1. À quel instant  $T_a$ , mesuré dans le repère de  $J_a$ ,  $J_b$  est-il revenu ?
2. À quel instant  $T_b$ , mesuré dans son propre repère,  $J_b$  est-il revenu ?
3. Montrer que  $T_a > T_b$ . Commentaire ?

### Réponses

Aller : on cherche le temps  $t_a$  auquel  $J_b$  fait demi-tour dans le référentiel de  $J_a$  :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c\tau_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ ct_a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t_a = \gamma_1\tau_r \\ x_a = \beta_1\gamma_1c\tau_r \end{cases}$$

Retour : on remet les horloges à 0, et on prend l'origine du repère de  $J_a$  au point où se trouve  $J_b$  quand il fait demi-tour. On appelle  $\tau'_R$  le temps du trajet retour dans le repère de  $J_b$ , et  $t'_a$  ce temps dans le repère de  $J_a$ , qui correspond à la position  $x = -x_a$  de  $J_b$  avec la nouvelle origine choisie pour le référentiel de  $J_a$  :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c\tau'_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 \\ -\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_a \\ ct'_a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t'_a = -\frac{x_a}{\beta_2c} = -\frac{\beta_1\gamma_1}{\beta_2}\tau_R \\ c\tau'_R = \beta_2\gamma_2\beta_1\gamma_1c\tau_R - \frac{\gamma_2\gamma_1\beta_1c\tau_R}{\beta_2} \end{cases}$$

Finalement :

$$T_a = t_a + t'_a = \tau_R\gamma_1(1 - \beta_1/\beta_2)$$

$$T_b = \tau_R + \tau'_R = \tau_R(1 - \beta_1\gamma_1/\beta_2\gamma_2)$$

Puis :

$$T_a - T_b = \tau_R(\gamma_1 - 1) - \tau_R\gamma_1\beta_1(1 - 1/\gamma_2)/\beta_2$$

Comme  $\beta_2 < 0$  et  $\gamma_{1,2} > 1$  on a toujours  $T_a > T_b$ .

$J_b$  a suivi une ligne d'Univers « plus longue » que  $J_a$ . La situation n'est pas symétrique entre les deux jumeaux, car  $J_b$  a subi une accélération pour revenir.

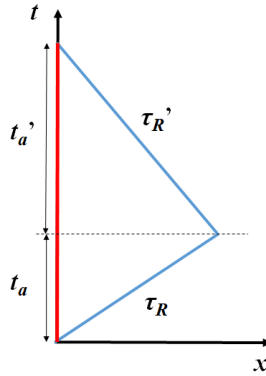


FIGURE 2.1 – En métrique de Minkowski,  $t_a + t'_a > \tau_R + \tau'_R$  !

## 2.f Énergie seuil

On considère la réaction endoénergétique :  $(1) + (2) \rightarrow (3) + (4)$  ; où (1) est la particule incidente et (2) la particule cible au repos.

1. Montrer que l'énergie cinétique minimale que doit posséder (1) pour que la réaction puisse avoir lieu s'exprime :

$$T_1 = -Q \times \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{2m_2},$$

$$\text{où : } Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)] c^2 < 0.$$

2. Que devient cette expression à la limite non relativiste ?

### Réponses

1. Dans le repère du laboratoire, la conservation de l'énergie-impulsion s'écrit :

$$T_1 + m_1 c^2 + m_2 c^2 = T_3 + T_4 + m_3 c^2 + m_4 c^2 \quad (2.1)$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4. \quad (2.2)$$

On a donc  $T_1 > -Q$ , mais on ne peut pas annuler  $T_3 + T_4$  à cause de la conservation de l'impulsion. Mais si on se place dans le repère du centre de masse, l'énergie seuil correspond bien à :

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_4 = \vec{0}$$

car la somme des impulsions est nulle dans ce repère. On obtient donc au seuil :

$$E'_{1 \text{ seuil}} + E'_2 = m_3 c^2 + m_4 c^2 \quad (2.3)$$

$$\vec{p}'_{1 \text{ seuil}} + \vec{p}'_2 = \vec{0}. \quad (2.4)$$



Par ailleurs, la conservation de la norme du quadrivecteur énergie-impulsion (masse invariante) dans un changement de référentiel donne :

$$\begin{aligned} (E'_{1 \text{ seuil}} + E'_2)^2 &= (E_{1 \text{ seuil}} + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 \\ &= 2m_2 c^2 T_{1 \text{ seuil}} + (m_1 c^2 + m_2 c^2)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En utilisant l'équation 2.3 il vient :

$$\begin{aligned} 2m_2 T_{1 \text{ seuil}} + (m_1 + m_2)^2 c^2 &= (m_3 + m_4)^2 c^2 \Rightarrow \\ T_{1 \text{ seuil}} &= -Q \times \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{2m_2} = -Q \times \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} - \frac{Q}{2m_2 c^2} \right). \end{aligned}$$

2. Limite non relativiste. Dans le repère du centre de masse :

$$T'_1 \text{ seuil} + T'_2 = -Q. \quad (2.6)$$

La vitesse du centre de masse est :

$$v_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (2.7)$$

D'où, en utilisant 2.7 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 (v_{1 \text{ seuil}} - v_{CM})^2 + \frac{1}{2} m_2 (-v_{CM})^2 &= -Q \\ \Rightarrow T_{1 \text{ seuil}} &= -Q \times \frac{m_1 + m_2}{m_2}. \end{aligned}$$

Cette formule est bien compatible avec la précédente car, dans la limite non relativiste, les énergies cinétiques sont très petites devant les énergies de masse. Dans ce cas,  $-Q$ , qui est de l'ordre de  $T_1$ , est très inférieur à  $m_2 c^2$ , d'où l'équivalence des deux formules.

## 2.g Élément d'intégration

1. Montrer que  $d^3 \vec{p}/E = dp_x dp_y dp_z/E$  est invariant par changement de repère dans le cadre de la relativité restreinte.

*Indication : on montrera qu'on peut écrire  $E = mc^2 \cosh \Theta$  et  $p = mc^2 \sinh \Theta$ , puis on considèrera une transformation de Lorentz de rapidité  $\Omega$ .*

2. En déduire que l'élément d'espace des phases :

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) \frac{d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_1 (2\pi)^3 2E_2}$$

est aussi invariant.

La quantité  $\delta^4(p_1 + p_2 - p)$  est le produit de quatre distributions de Dirac :

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p) = \delta(E_1 + E_2 - E) \times \delta(p_{1x} + p_{2x} - p_x) \times \delta(p_{1y} + p_{2y} - p_y) \times \delta(p_{1z} + p_{2z} - p_z).$$

*Indication : utiliser la représentation de la distribution de Dirac :*

$$\delta(p_x) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip_x x} dx$$

## Réponses

1. L'élément est invariant par rotation. On peut donc se limiter à une transformation de Lorentz spéciale suivant  $x$ . Prenant une transformation spéciale suivant l'axe  $x$  de rapidité  $\Omega$ , il vient

$$\begin{aligned} p_1 c &\rightarrow p'_1 c = \cosh \Omega p_1 c - \sinh \Omega E_1 \\ E_1 &\rightarrow E'_1 = \cosh \Omega E_1 - \sinh \Omega p_1 c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1^2 - p_1^2 c^2 = m^2 c^4 &\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 c = m c^2 \sinh \Theta \\ E_1 = m c^2 \cosh \Theta \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} E'_1 = m c^2 \cosh(\Theta - \Omega) \\ p'_1 c = m c^2 \sinh(\Theta - \Omega) \end{cases} &\Rightarrow \frac{dp'_1}{E'_1} = \frac{dp_1}{E_1} = d\Theta. \end{aligned}$$

2. Il reste à montrer que  $\delta^4(p_1 + p_2 - p)$  est invariant par transformation de Lorentz. Pour cela on utilise les représentations de  $\delta$  :

$$\delta(P_x) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iP_x x} dx ; \quad \delta(E) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iEt} dt.$$

Comme  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p$  subissent les mêmes transformations on peut raisonner avec la somme notée  $P$ . Il est alors clair que le produit des trois distributions  $\delta$  sur les impulsions est invariant par rotation d'espace car lors d'une rotation le produit  $\vec{P} \cdot \vec{r}$  est invariant et le jacobien de la transformation des coordonnées spatiales vaut 1 :

$$\begin{aligned} \delta(P_x) \delta(P_y) \delta(P_z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{i\vec{P} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} = \\ \delta(P'_x) \delta(P'_y) \delta(P'_z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{i\vec{P}' \cdot \vec{r}'} d^3 \vec{r}'. \end{aligned}$$

Pour une transformation de Lorentz spéciale suivant l'axe  $x$  par exemple, on obtient de même :

$$\delta(P_x)\delta(E) = \frac{1}{(2\pi)^6} \iint e^{i\vec{P}_x \cdot \vec{x} - Et} dx dt =$$

$$\delta(P'_x)\delta(E') = \frac{1}{(2\pi)^6} \iint e^{i\vec{P}'_x \cdot \vec{x}' - E't'} dx' dt'.$$

car  $\vec{P}_x \cdot \vec{x} - Et = \vec{P}'_x \cdot \vec{x}' - E't'$  et le jacobien de la transformation de Lorentz spéciale vaut aussi 1 ( $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ ).

## 2.h Conservation de l'énergie-impulsion

1. Montrer que la masse invariante d'un système de deux particules est toujours supérieure ou égale à la somme des masses des particules.
2. Le pion neutre  $\pi^0$  est une particule de masse  $135 \text{ Mev}/c^2$  qui se désintègre très rapidement (durée de vie de  $8,5 \times 10^{-17} \text{ s}$ ) en deux photons. Quelle est la masse invariante du pion neutre ? Du système de deux photons ?

### Réponses

On utilise les unités naturelles ( $c = 1$ ).

1.

$$M = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)}$$

$$= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - p_1 p_2 \cos \theta_{12})}.$$

Or  $\cos(\theta_{12}) \leq 1$  donc  $E_1 E_2 - p_1 p_2 \cos \theta_{12} \geq E_1 E_2 - p_1 p_2$ .

Si une au moins des masses ( $m_2$  par exemple) est nulle :

$E_2 = p_2$  et  $E_1 E_2 - p_1 p_2$  est alors clairement positif ou nul et donc :

$$M \geq m_1 = m_1 + m_2.$$

Si aucune des masses n'est nulle,  $E_i^2 - p_i^2 = m_i^2$ , et on peut donc poser :  $E_i = m_i \cosh(\theta_i)$  et  $p_i = m_i \sinh(\theta_i)$ . Alors :

$$E_1 E_2 - p_1 p_2 = m_1 m_2 (\cosh(\theta_1) \cosh(\theta_2) - \sinh(\theta_1) \sinh(\theta_2))$$

$$= m_1 m_2 \cosh(\theta_1 - \theta_2) \geq m_1 m_2.$$

Finalement :  $M \geq \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2}$ , d'où le résultat demandé.

On peut aussi faire la démonstration en se mettant dans le repère du centre de masse des deux particules massives, alors  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$  et :

$$M = E'_1 + E'_2 \geq m_1 + m_2.$$

2. Par définition, la masse invariante du pion neutre est  $135 \text{ Mev}/c^2$ . Par conservation de l'impulsion, si on se met dans le référentiel du centre de masse du pion neutre :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow E_1 = E_2.$$

Par conservation de l'énergie :  $E_1 + E_2 = M \Rightarrow E_1 = E_2 = M/2$ . D'où :

$$M_{12} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} = M = 135 \text{ MeV}/c^2.$$

On remarquera que la masse invariante du système de deux photons qui ont chacun une masse nulle n'est pas égale à 0 !

## 2.i Inégalités de Heisenberg

Démontrer l'inégalité :  $\Delta A \cdot \Delta B \geq \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| / 2$  où  $A$  et  $B$  sont des observables et  $\Delta A (B)$  est l'écart quadratique moyen des résultats de la mesure de  $A (B)$ .

**Réponse**

$$\begin{aligned} \text{Soit } |\varphi\rangle &= \left( (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) + i\lambda (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle) \right) |\psi\rangle \quad ; \quad \forall \lambda \quad \langle \varphi | \varphi \rangle > 0 \quad \Rightarrow \\ \forall \lambda \quad & \left( \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \right) + i\lambda \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle + \lambda^2 \left( \langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2 \right) > 0. \end{aligned}$$

Donc le discriminant de cette équation du second degré en  $\lambda$  est négatif (remarquer que tous les termes doivent être réels!) :

$$\Delta = \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2 - 4 \left( \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \right) \left( \langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2 \right) \leq 0.$$

Or :  $\Delta A = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$  et de même pour  $\hat{B}$ , d'où le résultat demandé.

Si  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar$ , il vient :  $\Delta A \cdot \Delta B \geq \hbar/2$ .

## 2.j Longueur d'onde de de Broglie

Calculer la longueur d'onde de de Broglie d'un électron de 1 keV, d'un électron de 1 GeV, d'un proton de 7 TeV (les énergies données sont les énergies cinétiques des particules). On utilisera la constante de conversion  $\hbar c \simeq 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$  pour simplifier les calculs. Dire quelle structure de la matière peut être analysée dans chacun de ces cas.

**Réponses**

Électron de 1 keV, non relativiste ( $T \ll mc^2$ ) :

$$T \simeq p^2/2m \Rightarrow \lambda = h/\sqrt{2mT} = 2\pi\hbar c/\sqrt{2mc^2T}.$$

$$\text{A.N. : } \lambda = 2\pi \times 200/\sqrt{2} \times .5 \times 10^{-3} \text{ fm} = 0,040 \text{ nm}.$$

On peut sonder la structure atomique de la matière.

Électron de 1 GeV, ultra relativiste ( $T \gg mc^2$ ) :

$$T \simeq pc \Rightarrow \lambda = hc/T = 2\pi\hbar c/T.$$

A.N. :  $\lambda = 2\pi \times 200/1000 \text{ fm} = 1,3 \text{ fm}$ .

On peut sonder la structure nucléaire de la matière.

Proton de 7 TeV, ultra relativiste ( $T \gg mc^2$ ) :

$T \simeq pc \Rightarrow \lambda = hc/T = 2\pi\hbar c/T$ .

A.N. :  $\lambda = 2\pi \times 200/7000000 \text{ fm} = 0,18 \times 10^{-18} \text{ m}$ .

On peut espérer découvrir une sous-structure aux quarks.

## 2.k Opérateurs moments cinétiques

### 1. Spin 1/2

Soit l'espace à 2 dimensions d'un spin 1/2, les 2 vecteurs de base étant les états  $S_z = +\hbar/2$  et  $-\hbar/2$ .

Représenter l'opérateur  $S_z$  sous forme d'une matrice. Dire pourquoi  $S_x$ ,  $S_y$  et  $S_z$  ont les mêmes valeurs propres, trace et déterminant.

### 2. Matrices de Pauli

On définit les matrices de Pauli :  $\sigma_i = (2/\hbar)S_i$ .

Utiliser les propriétés montrées en 1. pour trouver la forme générale des  $\sigma_i$ . Choisir  $\sigma_x$  réelle à coefficients positifs, en déduire  $\sigma_y$  en utilisant la relation  $[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$ . Calculer les vecteurs propres de  $S_x$  et  $S_y$ .

### 3. Propriétés des opérateurs moment cinétique

(a) On rappelle les relations de commutation qui définissent un opérateur moment cinétique :  $[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$ .

En déduire que  $[J^2, J_i] = 0$ .

On pose  $J^\pm = J_x \pm iJ_y$ . Calculer  $[J_z, J^\pm]$  et  $[J^2, J^\pm]$ .

Montrer que  $J^-$  est hermitique conjugué de  $J^+$ .

(b) On désigne par  $|a, b\rangle$  un vecteur propre normalisé commun à  $J^2$  et  $J_z$ , dont les valeurs propres sont respectivement  $\hbar^2 a$  et  $\hbar b$ . Les nombres  $a$  et  $b$  sont des réels, a priori inconnus. Montrer que  $J^\pm |a, b\rangle$  est un vecteur proportionnel à  $|a, b \pm 1\rangle$ . Calculer la norme des vecteurs  $J^\pm |a, b\rangle$ . Que se passe-t-il si on applique  $J^\pm$  de façon répétée. En déduire des limites sur les valeurs possibles de  $b$ , et montrer alors que les valeurs possibles de  $a$  sont de la forme  $j(j+1)$  où  $j$  est entier ou demi-entier. Quelles sont alors les valeurs possibles de  $b$  ?

Remarque : les états  $|a, b\rangle$  sont plutôt notés  $|j, m\rangle$  où :  $a = j(j+1)$  et  $b = m$ .

(c) Donner les matrices représentant  $J^+$  et  $J^-$  dans le cas  $j = 1/2$  (système de spin 1/2) dans la base ( $|1/2, 1/2\rangle, |1/2, -1/2\rangle$ ). Retrouver les matrices de Pauli.

### 4. Spin 1

Calculer les matrices représentant  $J_i$  et  $J^2$  pour le spin 1 ( $j = 1$ ).

## Réponses

1. Spin  $\frac{1}{2}$  :

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'orientation des axes est arbitraire, il n'y a aucune raison pour que les propriétés physiques d'un spin dépendent de l'axe. Donc les matrices ont les mêmes valeurs propres, et donc la même trace (0) et le même déterminant ( $-\hbar^2/4$ ).

2. Matrices de Pauli :

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma_x \text{ hermitienne} \Rightarrow \sigma_x = \begin{pmatrix} a & c - id \\ c + id & b \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$$\sigma_x \text{ réelle} \Rightarrow d = 0.$$

$$\text{Tr}(\sigma_x) = 0 \Rightarrow a = -b = 0 \text{ (coefficients positifs) .}$$

$$\det(\sigma_x) = -1 \Rightarrow c = 1.$$

$$\text{Cherchons } \sigma_y = \begin{pmatrix} x & \bar{y} \\ y & -x \end{pmatrix} :$$

$$[\sigma_y, \sigma_z] = \begin{pmatrix} 0 & -2\bar{y} \\ 2y & 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{\hbar^2} [S_y, S_z] = \frac{4}{\hbar^2} i\hbar S_x = 2i\sigma_x$$

$$\Rightarrow y = i.$$

Comme  $\det(\sigma_y) = -1$ , il vient  $-x^2 - |y|^2 = -1 \Rightarrow x = 0$ .

$$\text{Finalement : } \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Vecteurs propres de  $\sigma_x$  :  $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; de  $\sigma_y$  :  $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  et  $\mu \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ .

3. Propriétés des opérateurs moment cinétique

(a) Faisons la démonstration pour  $J_x$  :

$$\begin{aligned} [J^2, J_x] &= [\cancel{J_x^2}, J_x] + [J_y^2, J_x] + [J_z^2, J_x] \\ &= J_y^2 J_x - J_x J_y^2 + J_z^2 J_x - J_x J_z^2 \\ &= \underbrace{J_y^2 J_x - J_y J_x J_y}_{J_y(-i\hbar J_z)} + \underbrace{J_y J_x J_y - J_x J_y^2}_{(-i\hbar J_z)J_y} \\ &\quad + \underbrace{J_z^2 J_x - J_z J_x J_z}_{J_z(i\hbar J_y)} + \underbrace{J_z J_x J_z - J_x J_z^2}_{(i\hbar J_y)J_z} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Calcul de  $[J_z, J^\pm]$  et  $[J^2, J^\pm]$  :

$$\begin{aligned} [J_z, J^\pm] &= [J_z, J_x] \pm i [J_z, J_y] \\ &= i\hbar J_y \pm i(-i\hbar J_x) = \pm\hbar J^\pm [J^2, J^\pm] = 0 \end{aligned}$$

d'après la question précédente. Comme  $J_x$  et  $J_y$  sont hermitiques, il est clair que  $J^-$  est hermitique conjugué de  $J^+$ .

(b)

$$\begin{aligned} J^2 (J^\pm |a, b\rangle) &= J^\pm J^2 |a, b\rangle \text{ car } J^2 \text{ et } J^\pm \text{ commutent} \\ &= \hbar^2 a J^\pm |a, b\rangle \text{ par définition de } |a, b\rangle. \\ J_z (J^\pm |a, b\rangle) &= \{ [J_z, J^\pm] + J^\pm J_z \} |a, b\rangle \\ &= \pm\hbar J^\pm |a, b\rangle + J^\pm J_z |a, b\rangle \\ &= (b \pm 1) \hbar (J^\pm |a, b\rangle). \end{aligned}$$

Donc  $J^\pm |a, b\rangle$  est proportionnel à  $|a, b \pm 1\rangle$ .

$$\begin{aligned} |J^+ |a, b\rangle|^2 &= \langle a, b | J^- J^+ |a, b\rangle \\ &= \langle a, b | \{ J_x^2 + i [J_x, J_y] + J_y^2 \} |a, b\rangle \\ &= \langle a, b | \{ J_x^2 - \hbar J_z + J_y^2 \} |a, b\rangle \\ &= \langle a, b | \{ J^2 - J_z^2 - \hbar J_z \} |a, b\rangle \\ &= \hbar^2 (a - b(b+1)) \text{ (car } \langle a, b | a, b\rangle = 1). \end{aligned}$$

De même :  $|J^- |a, b\rangle|^2 = \hbar^2 (a - b(b-1))$ . Ces deux quantités doivent être positives ou nulles. Ceci impose une relation entre  $a$  et  $b$ , car en appliquant les opérateurs  $J^+$  ou  $J^-$ , on peut augmenter ou baisser  $b$  d'autant d'unités que l'on veut. Une de ces opérations doit donc aboutir au vecteur nul. On doit donc avoir, pour  $a$  donné, une valeur maximale de  $b$  telle que  $a = b_{\max}(b_{\max} + 1)$  et une valeur minimale de  $b$  telle que  $a = b_{\min}(b_{\min} - 1)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} a &= b_{\max}(b_{\max} + 1) = b_{\min}(b_{\min} - 1) \Rightarrow \\ (b_{\max} + b_{\min})(b_{\max} - b_{\min} + 1) &= 0 \Rightarrow \\ b_{\max} &= -b_{\min} \text{ car } b_{\max} > b_{\min}. \end{aligned}$$

Comme on passe de  $b_{\min}$  à  $b_{\max}$  par sauts de une unité, on a :

$$b_{\max} = b_{\min} + k \Rightarrow b_{\max} = k/2 = -b_{\min} \Rightarrow a = j(j+1)$$

en posant  $j = k/2$  : entier ou demi-entier  $\geq 0$ .

Les valeurs propres de  $J^2$  sont donc de la forme  $\hbar^2 j(j+1)$  avec  $j$  entier ou demi-entier. Les valeurs propres correspondantes de  $J_z$  sont de la forme  $\hbar m$ , où :

$$m \in \{-j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j\}$$

(nombre impair de valeurs si  $j$  est entier, pair si  $j$  est demi-entier). Avec cette notation :

$$|J^+ |j, m\rangle|^2 = \hbar^2 (j(j+1) - m(m+1)),$$

et avec une phase conventionnelle :

$$\begin{aligned} J^+ |j, m\rangle &= \hbar \sqrt{(j(j+1) - m(m+1))} |j, m+1\rangle \\ J^- |j, m\rangle &= \hbar \sqrt{(j(j+1) - m(m-1))} |j, m-1\rangle. \end{aligned}$$

(c) La plus petite valeur non nulle de  $j$  est  $1/2$ . En notant  $|a, b\rangle = |j, m\rangle$  avec  $a = j(j+1)$  et  $b = m$  :

$$\begin{aligned} J_z |1/2, +1/2\rangle &= +\hbar/2 |1/2, +1/2\rangle \\ J_z |1/2, -1/2\rangle &= -\hbar/2 |1/2, -1/2\rangle \end{aligned}$$

$$\text{donc } J_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$\begin{aligned} J^+ |1/2, +1/2\rangle &= 0 \\ J^+ |1/2, -1/2\rangle &= \sqrt{\hbar^2 (1/2(1/2+1) - (-1/2)(-1/2+1))} |1/2, +1/2\rangle \\ &= \hbar |1/2, 1/2\rangle \end{aligned}$$

$$\text{donc } J^+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (la phase est conventionnelle).}$$

$$\begin{aligned} J^- |1/2, +1/2\rangle &= \sqrt{\hbar^2 (1/2(1/2+1) - (1/2)(1/2-1))} |1/2, -1/2\rangle \\ &= \hbar |1/2, -1/2\rangle \\ J^- |1/2, -1/2\rangle &= 0 \end{aligned}$$

donc  $J^- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (ici il n'y a plus de choix de phase, d'ailleurs  $J^-$  est hermitique conjugué de  $J^+$ ). Enfin :

$$J_x = (J^+ + J^-) / 2 \quad J_y = (J^+ - J^-) / 2i.$$

Soit :

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$



4. Spin 1 :

$$J^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puis (les phases sont conventionnelles) :

$$J^+ |1, 1\rangle = 0 \quad J^+ |1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2} |1, 1\rangle \quad J^+ |1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2} |1, 0\rangle.$$

Donc :

$$J^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J^- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.1 Addition des moments cinétiques

A) Cas général

Soit un système composé de deux sous-systèmes possédant des moments cinétiques associés aux opérateurs  $\widehat{J}_1$  et  $\widehat{J}_2$  agissant sur des variables indépendantes : il peut s'agir de deux particules, ou d'une seule particule avec son moment orbital et son moment intrinsèque, ou de systèmes plus complexes. On s'intéresse à l'espace de Hilbert décrivant les états des moments cinétiques. On utilise comme base de cet espace les vecteurs propres pour les opérateurs  $\widehat{J}_1^2, \widehat{J}_2^2, \widehat{J}_{1z}, \widehat{J}_{2z}$ . On note ces vecteurs  $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$  avec :

$$\widehat{J}_i^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = j_i(j_i + 1) \hbar^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

$$\widehat{J}_{iz} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = m_i \hbar |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle.$$

Les modules de  $\widehat{J}_1$  et  $\widehat{J}_2$  sont fixés ( $j_1$  et  $j_2$  fixés), mais leurs orientations sont quelconques, les  $m_i$  peuvent donc prendre toutes les valeurs entre  $-j_i$  et  $+j_i$  par sauts de une unité. Le moment cinétique total du système est  $\widehat{J} = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2$ . L'objectif de l'exercice est de déterminer les caractéristiques de l'opérateur moment cinétique total.

1. Combien y a-t-il de vecteurs propres  $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$  ?
2. Montrer que l'opérateur  $\widehat{J} = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2$  est bien un opérateur moment cinétique.  
On peut ainsi construire une autre base de l'espace de Hilbert précédent à partir des vecteurs propres des opérateurs  $\widehat{J}^2$  et  $\widehat{J}_z$ .

On notera les vecteurs de base  $|J, M\rangle$ . Ces vecteurs peuvent s'exprimer en fonction des vecteurs de base précédents :  $|J, M\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{JMm_1 m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ .

Remarque : les phases des vecteurs de base peuvent être choisies de façon que tous les coefficients  $C_{JMm_1 m_2}$  soient réels.

*Nota bene : les coefficients  $C_{JMm_1 m_2}$  dépendent de  $j_1$  et  $j_2$ , c'est pourquoi on devrait noter les vecteurs  $|J, M\rangle$  plutôt  $|j_1, j_2, J, M\rangle$ , mais on préfère ici alléger l'écriture.*

3. Calculer de deux façons différentes  $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | \widehat{J}_z | J, M \rangle$  et en déduire que  $C_{JMm_1 m_2}$  est nul si  $M \neq m_1 + m_2$ .
4. Montrer que  $J \leq j_1 + j_2$ .
5. En utilisant le produit scalaire  $\langle j_1, j_2, \pm j_1, \pm j_2 | J, M \rangle$ , montrer qu'on doit trouver des vecteurs  $|J, M\rangle$  avec  $J$  supérieur ou égal à  $|j_1 - j_2|$  et inférieur ou égal à  $j_1 + j_2$ . Un comptage précis du nombre d'états possibles pour chaque valeur de  $M$  montrerait que toutes les valeurs de  $J$  telles que  $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$  sont effectivement réalisées. On admettra ce résultat.
6. Combien y a-t-il de vecteurs  $|J, M\rangle$  pour  $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ .
7. En déduire que  $C_{JMm_1 m_2}$  est nul si la condition

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$$

n'est pas vérifiée.

#### B) Cas de deux spins 1/2

On considère le système composé de deux particules de spin 1/2 . On veut exprimer les états  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2\rangle$  en fonction des états  $|J, M\rangle$  possibles.

1. Montrer que  $\widehat{J}^2 = \widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2 + 2\widehat{J}_{1z}\widehat{J}_{2z} + \widehat{J}_1^+\widehat{J}_2^- + \widehat{J}_1^-\widehat{J}_2^+$  .
2. Pour chaque état  $\psi_{m_1 m_2} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2 \right\rangle$ , calculer  $\widehat{J}^2 \psi_{m_1 m_2}$  et  $\widehat{J}_z \psi_{m_1 m_2}$ . Calculer alors  $\widehat{J}^2 \left( \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \pm \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right)$  et en déduire qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{2} |1, 0\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{2} |0, 0\rangle. \end{aligned}$$

3. En déduire l'expression de tous les vecteurs  $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2 \right\rangle$  en fonction des états  $|J, M\rangle$  possibles.

#### Réponses A) Cas général

1. Les opérateurs  $\widehat{J}_1^2$ ,  $\widehat{J}_2^2$ ,  $\widehat{J}_{1z}$  et  $\widehat{J}_{2z}$  commutent, on peut construire une base avec les vecteurs propres de ces opérateurs. Il y a  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  vecteurs propres correspondant aux valeurs propres possibles de  $\widehat{J}_{1z}$  et  $\widehat{J}_{2z}$   $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  et  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ , d'où la notation.
2. C'est un opérateur vectoriel et on vérifie facilement qu'il respecte les relations de commutation d'un moment cinétique.
3. On applique l'opérateur  $\widehat{J}_z$  sur  $|J, M\rangle$  ou  $\widehat{J}_z^\dagger = \widehat{J}_z = \widehat{J}_{1z} + \widehat{J}_{2z}$  sur  $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 |$  :

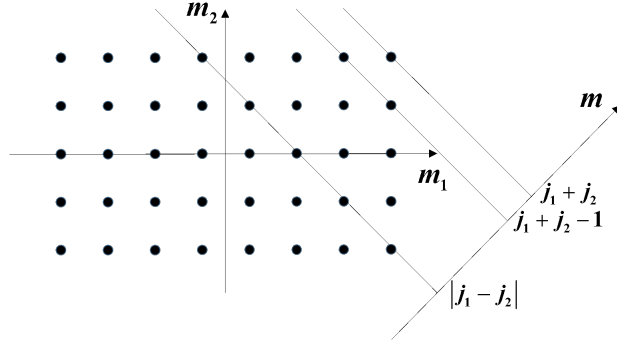
$$\begin{aligned}\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | \widehat{J}_z | J, M \rangle &= M \hbar \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M \rangle \\ \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | \widehat{J}_z | J, M \rangle &= (m_1 + m_2) \hbar \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M \rangle.\end{aligned}$$

On en déduit :  $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M \rangle = 0$  ou  $M = (m_1 + m_2)$ .

4. La valeur de  $M$  maximale est  $j_1 + j_2$ , donc  $J \leq j_1 + j_2$ .
5. Le produit scalaire est non nul pour au moins un vecteur  $|J, M\rangle$  (c'est un changement de base), et comme  $M = \pm j_1 \pm j_2$ , il existe donc une valeur de  $J$  telle que  $J \geq j_1 - j_2$  et  $J \geq j_2 - j_1$ .
6. Il y a  $2J + 1$  valeurs possibles de  $M$  pour chaque valeur de  $J$ , il y a donc en tout (on prend par exemple  $j_1 \geq j_2$ ) (noter que les valeurs de  $J$  varient par sauts de une unité comme pour tout moment cinétique) :

$$\begin{aligned}\sum_{j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2J+1) &= 2 \frac{(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)}{2} - 2 \frac{(j_1-j_2-1)(j_1-j_2)}{2} \\ &\quad + (j_1+j_2) - (j_1-j_2-1) \\ &= \cancel{j_1^2} + \cancel{j_2^2} + 2j_1j_2 + j_1 + j_2 - \cancel{j_1^2} - \cancel{j_2^2} \\ &\quad + 2j_1j_2 + \cancel{j_1} - \cancel{j_2} + j_1 + j_2 - \cancel{j_1} + \cancel{j_2} + 1 \\ &= (2j_1+1)(2j_2+1).\end{aligned}$$

7. C'est exactement la dimension de l'espace de Hilbert (voir question 1). On peut en déduire qu'il n'y a pas d'autre valeur possible de  $J$ , d'où le résultat demandé.
8. Comptage des états (complément de la question 5) : On représente les vecteurs de base  $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$  par un point de coordonnées  $(m_1, m_2)$  sur le diagramme ci-dessous :



Les points sur les lignes orthogonales à la diagonale principale correspondent à une même valeur de  $m$ . Par application de  $\widehat{J}^-$  sur le vecteur  $|J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2\rangle$  (dont on a montré l'existence) on obtient les vecteurs de base  $|J = j_1 + j_2, M\rangle$  (avec  $-(j_1 + j_2) \leq M \leq j_1 + j_2$ ). Le sous-espace propre de  $\widehat{J}_z$  pour la valeur propre  $(j_1 + j_2)$  est de dimension 1 (un seul vecteur possible, ce qu'on peut voir aussi sur le diagramme). Le sous-espace propre de  $\widehat{J}_z$  pour la valeur propre  $(j_1 + j_2 - 1)$  est de dimension 2 (on peut prendre  $m_1 = j_1$  et  $m_2 = j_2 - 1$  ou  $m_1 = j_1 - 1$  et  $m_2 = j_2$ , ce qu'on peut voir sur le diagramme). Le vecteur  $X = |J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 - 1\rangle$  appartient à ce sous-espace. Soit  $Y$  le vecteur normalisé orthogonal à  $X$  de ce sous-espace. Montrons que  $\widehat{J}^2 Y = J(J+1)\hbar^2 Y$  avec  $J = j_1 + j_2 - 1$ . Le vecteur  $\widehat{J}^+ Y$  est vecteur propre de  $\widehat{J}_z$  pour la valeur  $M = j_1 + j_2$ . Mais ce ne peut être le vecteur  $|J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2\rangle$  car  $\widehat{J}^{+\dagger} = \widehat{J}^-$  et donc :

$$\begin{aligned} & \langle J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 | \widehat{J}^+ Y \rangle \\ &= \langle \widehat{J}^- (|J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2\rangle) | Y \rangle \\ &= \langle J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 - 1 | Y \rangle = 0 \text{ par hypothèse.} \end{aligned}$$

Donc  $Y = |J = j_1 + j_2 - 1, M = j_1 + j_2 - 1\rangle$ .

Par application de  $\widehat{J}^-$  on obtient les vecteurs  $|J = j_1 + j_2 - 1, M\rangle$  (avec  $-(j_1 + j_2 - 1) \leq M \leq j_1 + j_2 - 1$ ).

Le sous-espace propre de  $\widehat{J}_z$  pour la valeur propre  $(j_1 + j_2 - 2)$  est de dimension 3 (la dimension de l'espace augmente d'une unité quand  $m$  diminue de 1 tant que  $m > |j_1 - j_2|$ ).

On trouve le vecteur  $|J = j_1 + j_2 - 2, M = j_1 + j_2 - 2\rangle$  comme vecteur orthogonal aux vecteurs :

$$\begin{aligned} & |J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 - 2\rangle \\ Y &= |J = j_1 + j_2 - 1, M = j_1 + j_2 - 2\rangle. \end{aligned}$$

De proche en proche on trouve donc toutes les valeurs de  $J$  jusque  $|j_1 - j_2|$ .

B) Cas de deux spins 1/2

1. Il suffit de développer le deuxième membre en se souvenant que  $J_i^\pm = J_{ix} \pm iJ_{iy}$ .
2. Il faut bien voir que les opérateurs 1 et 2 agissent séparément suivant les valeurs des nombres quantiques de chaque sous-système, ainsi par exemple :

$$\begin{aligned}\widehat{J}_{1z}\widehat{J}_{2z}|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= m_2\hbar\widehat{J}_{1z}|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \\ &= m_1m_2\hbar^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\widehat{J}_1^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \\ &= j_1(j_1 + 1)\hbar^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle.\end{aligned}$$

On utilise la formule du 1) et on se souvient (exercice précédent) que :

$$\widehat{J}_i^\pm|j_i, m_i\rangle = \hbar\sqrt{j_i(j_i + 1) - m_i(m_i \pm 1)}|j_i, m_i \pm 1\rangle$$

si  $|m_i \pm 1| \leq j_i$  et vaut 0 sinon.

On note dans la suite, pour alléger l'écriture :  $\psi_{m_1, m_2} = |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ .

En utilisant :

$$\widehat{J}_z = \widehat{J}_{1z} + \widehat{J}_{2z} \text{ et } \widehat{J}_{iz}\psi_{m_1, m_2} = m_i\hbar\psi_{m_1, m_2},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\widehat{J}^2\psi_{1/2, 1/2} &= 2\hbar^2\psi_{1/2, 1/2} \\ \widehat{J}_z\psi_{1/2, 1/2} &= \hbar\psi_{1/2, 1/2} \\ \Rightarrow \psi_{1/2, 1/2} &= |1, 1\rangle \\ &(\text{vecteur propre pour } \widehat{J}^2 \text{ et } \widehat{J}_z). \\ \widehat{J}^2\psi_{-1/2, -1/2} &= 2\hbar^2\psi_{-1/2, -1/2} \\ \widehat{J}_z\psi_{-1/2, -1/2} &= \hbar\psi_{-1/2, -1/2} \\ \Rightarrow \psi_{-1/2, -1/2} &= |1, -1\rangle \text{ (vecteur propre pour } \widehat{J}^2 \text{ et } \widehat{J}_z). \\ \widehat{J}^2\psi_{1/2, -1/2} &= \hbar^2(\psi_{1/2, -1/2} + \psi_{-1/2, 1/2}) ; \widehat{J}_z\psi_{1/2, -1/2} = 0 \\ \widehat{J}^2\psi_{-1/2, 1/2} &= \hbar^2(\psi_{1/2, -1/2} + \psi_{-1/2, 1/2}) ; \widehat{J}_z\psi_{-1/2, 1/2} = 0 \\ \widehat{J}^2(\psi_{1/2, -1/2} + \psi_{-1/2, 1/2}) &= 2\hbar^2(\psi_{1/2, -1/2} + \psi_{-1/2, 1/2}) \\ \widehat{J}^2(\psi_{1/2, -1/2} - \psi_{-1/2, 1/2}) &= 0.\end{aligned}$$

$(\psi_{1/2, -1/2} + \psi_{-1/2, 1/2})$  et  $(\psi_{1/2, -1/2} - \psi_{-1/2, 1/2})$  sont donc vecteurs propres de  $\widehat{J}^2$  et  $J_z$ . Il vient donc, à cause de la normalisation des vecteurs de base

(avec deux conventions de signe arbitraires) :

$$\begin{aligned}(\psi_{+1/2-1/2} + \psi_{-1/2+1/2}) &= \sqrt{2}|1, 0\rangle \\(\psi_{+1/2-1/2} - \psi_{-1/2+1/2}) &= \sqrt{2}|0, 0\rangle.\end{aligned}$$

## 2.m Équation de Klein-Gordon

On considère l'équation de Klein Gordon  $(\square + m^2)\psi = 0$ . Montrer qu'on peut écrire une équation du premier ordre en temps sur la fonction d'onde à deux composantes  $\begin{pmatrix} \Phi \\ \Xi \end{pmatrix}$  en posant :

$$\Phi = \psi + \frac{i}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad ; \quad \Xi = \psi - \frac{i}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

**Réponse**

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{i}{m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{i}{m} (\Delta - m^2) \psi \\ \frac{\partial \Xi}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{i}{m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{i}{m} (\Delta - m^2) \psi.\end{aligned}$$

$$\text{Or : } \psi = \frac{\Phi + \Xi}{2} \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{m}{i} \frac{\Phi - \Xi}{2}.$$

D'où :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2m} & -\frac{\Delta}{2m} + m \\ \frac{\Delta}{2m} - m & \frac{\Delta}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Xi \end{pmatrix}.$$

La relativité entraîne l'existence des antiparticules. L'équation de Klein-Gordon décrit l'évolution d'une particule et de son antiparticule sans spin, c'est pourquoi il faut deux conditions initiales. De même, l'équation de Dirac décrit simultanément l'évolution de l'électron et du positron. La fonction d'onde a alors 4 composantes à cause du spin.

## 2.n Spin et distribution angulaire

On considère une particule  $\Lambda$  de spin  $1/2$  au repos qui se désintègre selon :

$$\Lambda \rightarrow \mathbf{p} + \pi^-.$$

Le pion est une particule de spin nul. On suppose que le  $\Lambda$  est dans un état propre de  $\widehat{S}_z$  (projection du spin sur l'axe  $Oz$  d'un repère centré sur la particule) :  $|\Lambda, s = 1/2, s_z = \pm 1/2\rangle$ . On mesure la direction de l'impulsion du proton (repérée par les angles  $\theta$  et  $\varphi$  des coordonnées sphériques) et son

hélicité  $\hbar\lambda$ , c'est-à-dire la projection de son spin sur sa quantité de mouvement :  $\hbar\lambda = (\vec{S} \cdot \vec{p})/|\vec{p}|$ . Après la mesure, le proton est donc dans l'état noté  $|\theta, \varphi, \lambda\rangle$ . L'amplitude de probabilité de cette observation est donnée par :

$$A_{\pm\frac{1}{2},\lambda}(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi, \lambda | \mathbf{p}, \pi^-, j = 1/2, m = \pm 1/2 \rangle,$$

où  $|\mathbf{p}, \pi^-, j = 1/2, m = \pm 1/2\rangle$  désigne l'état final proton pion dans un état propre  $|1/2, m = \pm 1/2\rangle$  des opérateurs  $\widehat{J}^2$  et  $\widehat{J}_z$ . C'est-à-dire que la probabilité de trouver le proton dans la direction  $(\theta, \varphi)$  et l'élément d'angle solide  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  vaut  $|A_{\pm\frac{1}{2},\lambda}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$ .

1. Quelles sont les valeurs possibles de  $\lambda$  ?
2. Justifier que l'état final est dans un état propre du moment cinétique total de  $\widehat{J}^2$  et  $\widehat{J}_z$ , et donner les valeurs propres.
3. En déduire :  $A_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(0,0) = \langle 0,0,-\frac{1}{2} | \mathbf{p}, \pi^-, j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \rangle = 0$  et  $A_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(0,0) = 0$ .

On pose  $A^+ = A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(0,0)$  et  $A^- = A_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(0,0)$ . On cherche à obtenir  $A_{m,\lambda}(\theta, \varphi)$  en fonction de ces deux quantités. L'état  $|\theta, \varphi, \lambda\rangle$  du proton s'obtient à partir de l'état  $|0,0,\lambda\rangle$  par une rotation  $\mathcal{R}_1$  de  $\theta$  autour de l'axe  $Oy$  suivie par une rotation  $\mathcal{R}_2$  de  $\varphi$  autour de  $Oz$ . On rappelle que la transformation d'un spineur par une rotation d'angle  $\alpha$  autour du vecteur unitaire  $\vec{u}$  est donnée par :

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp\left(-i\alpha\vec{u} \cdot \widehat{\vec{S}}/\hbar\right)\psi.$$

4. Calculer les opérateurs  $\widehat{\mathcal{R}}_1$  et  $\widehat{\mathcal{R}}_2$  correspondant à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ .
5. En déduire  $A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta, \varphi)$  et  $A_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi)$  en fonction de  $A^+$  et  $A^-$ .
6. On suppose que  $s_z$ , la projection du spin du  $\Lambda$  sur l'axe  $Oz$ , vaut  $+1/2$ . Exprimer la probabilité de trouver le proton dans la direction  $(\theta, \varphi)$  en fonction de  $\alpha = (|A^+|^2 - |A^-|^2) / (|A^+|^2 + |A^-|^2)$ .

### Réponses

1.  $\lambda = \pm 1/2$ , projection d'un spin  $1/2$  sur un axe.
2. Le moment cinétique est conservé dans la désintégration, donc l'état final est dans l'état propre  $j = 1/2$ ,  $m = s_z = \pm 1/2$ .
3. Si  $\theta = \varphi = 0$ ,  $\vec{p} = p_z \vec{u}_z$ . Le moment cinétique total de l'état final est la somme du spin du proton et du moment orbital des deux particules :  $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$  et  $\vec{L} = \vec{r}_p \wedge \vec{p} + \vec{r}_\pi \wedge (-\vec{p}) = (\vec{r}_p - \vec{r}_\pi) \wedge p \vec{u}_z$  (la quantité de mouvement du pion est opposée à celle du proton).  $L_z$  est donc nul et donc l'hélicité du proton qui est ici  $s_z$  vaut  $m$ . L'état  $|0,0,-1/2\rangle$  est donc orthogonal à l'état  $|\mathbf{p}, \pi^-, j = 1/2, m = 1/2\rangle$ . Donc  $A_{1/2,-1/2}(0,0) = 0$  et de même  $A_{-1/2,1/2}(0,0) = 0$ .

$$4. \widehat{\mathcal{R}}_1 = \exp\left(-i\theta\widehat{S}_y/\hbar\right) = \exp(-i\theta\sigma_y/2) \text{ où } \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\widehat{\mathcal{R}}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta\sigma_y/2)^n}{n!}. \text{ Or } \sigma_y^2 = Id_2 \text{ et donc :}$$

$$\widehat{\mathcal{R}}_1 = \cos\frac{\theta}{2}Id_2 - i\sin\frac{\theta}{2}\sigma_y = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathcal{R}}_2 = \exp\left(-i\varphi\widehat{S}_z/\hbar\right) = \exp(-i\varphi\sigma_z/2) \text{ où } \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il vient :

$$\sigma_z^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \text{ et } \widehat{\mathcal{R}}_2 = \begin{pmatrix} \exp(-i\varphi/2) & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi/2) \end{pmatrix}.$$

$$5. |\theta, \varphi, \lambda\rangle = \widehat{\mathcal{R}}_2\widehat{\mathcal{R}}_1|0, 0, \lambda\rangle \Rightarrow$$

$$A_{1/2, 1/2}(\theta, \varphi) = \langle 0, 0, 1/2 | \widehat{\mathcal{R}}_1^\dagger \widehat{\mathcal{R}}_2^\dagger | \mathbf{p}, \pi^-, j = 1/2, m = 1/2 \rangle =$$

$$\left\langle 0, 0, \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \exp(i\varphi/2)\cos(\theta/2) & \exp(-i\varphi/2)\sin(\theta/2) \\ -\exp(i\varphi/2)\sin(\theta/2) & \exp(-i\varphi/2)\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \right| \mathbf{p}, \pi^-, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= A^+ \exp(i\varphi/2) \cos(\theta/2).$$

De même :

$$A_{1/2, -1/2}(\theta, \varphi) = \langle 0, 0, -1/2 | \widehat{\mathcal{R}}_1^\dagger \widehat{\mathcal{R}}_2^\dagger | \mathbf{p}, \pi^-, j = 1/2, m = 1/2 \rangle =$$

$$\left\langle 0, 0, -\frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \exp(i\varphi/2)\cos(\theta/2) & \exp(-i\varphi/2)\sin(\theta/2) \\ -\exp(i\varphi/2)\sin(\theta/2) & \exp(-i\varphi/2)\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \right| \mathbf{p}, \pi^-, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= -A^- \exp(i\varphi/2) \sin(\theta/2).$$

6. C'est la somme des probabilités de trouver le proton dans chaque état d'hélicité :

$$dP/d\Omega = |A_{1/2, 1/2}(\theta, \varphi)|^2 + |A_{1/2, -1/2}(\theta, \varphi)|^2$$

$$= |A^+|^2 \cos^2\theta/2 + |A^-|^2 \sin^2\theta/2$$

$$= |A^+|^2 (1 + \cos\theta)/2 + |A^-|^2 (1 - \cos\theta)/2$$

$$= \frac{1}{4\pi} (1 + \alpha \cos\theta)$$

$$\text{où } \alpha = \frac{|A^+|^2 - |A^-|^2}{|A^+|^2 + |A^-|^2} \text{ et le facteur } \frac{1}{4\pi} \text{ est imposé par la normalisation.}$$

## 2.0 Équations de continuité

Démontrer les équations de continuité pour les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon. On rappelle que :

— pour l'équation de Schrödinger :

$$\rho = \psi^*\psi \quad \text{et} \quad \vec{j} = -\frac{i}{2m} \left[ \psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^* \right];$$



— pour l'équation de Klein-Gordon :

$$j^\mu = i [\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*] \quad \text{avec} \quad j^0 = \rho ; j^{1,2,3} = j_{x,y,z}.$$

### Réponses

Équation de Schrödinger :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}}_X$$

$$X = \left( +\frac{1}{i} \frac{\Delta \psi^*}{2m} - \frac{V}{i} \psi^* \right) \psi + \psi^* \left( -\frac{1}{i} \frac{\Delta \psi}{2m} + \frac{V}{i} \psi \right) \quad \text{car :}$$

$$\begin{cases} \partial \psi / \partial t = -\frac{1}{2mi} \Delta \psi + \frac{V}{i} \psi \\ \partial \psi^* / \partial t = +\frac{1}{2mi} \Delta \psi^* - \frac{V}{i} \psi^*. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2mi} \left( \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi^*) \psi - \psi^* \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi) \right) \\ &= \frac{1}{2mi} \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

Équation de Klein-Gordon :

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Delta \psi + m^2 \psi \quad \text{soit :} \quad \partial_\mu \partial^\mu \psi + m^2 \psi = 0.$$

Donc :

$$\partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi) = \underbrace{\partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi}_{\text{réel}} - \underbrace{\psi^* m^2 \psi}_{\text{réel}} \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0.$$

# Exercices du chapitre 3

## 3.a Opérateur temps

On suppose que le temps est un opérateur, noté  $T$ , au même titre que les autres coordonnées d'espace temps.

Montrer qu'alors le commutateur  $[T, E]$  doit valoir  $(-i)$ .

En déduire que si  $|E\rangle$  est un vecteur propre du hamiltonien  $H$  pour la valeur propre  $E$  alors l'état  $e^{i\varepsilon T} |E\rangle$  avec  $\varepsilon$  positif infinitésimal est un vecteur propre pour une énergie inférieure à  $E$ .

On ne peut donc pas définir d'état fondamental (d'énergie minimale).

### Réponses

Si on considère  $T$  comme un opérateur, composante d'un quadrivecteur  $X = (T, \vec{X})$ , alors soit  $P = (E, \vec{P})$  le quadrivecteur énergie impulsion. Alors  $[X, P] = [X_\mu, P_\nu]$  est un tenseur d'ordre 2 et comme  $[X_i, P_j] = i\delta_{ij} = -i\eta_{ij}$ , on a nécessairement :  $[T, H] = -i\eta_{00} = -i$ .

Alors, pour  $\varepsilon$  infinitésimal :  $e^{-i\varepsilon T} H e^{i\varepsilon T} = H - \varepsilon$ .

Si  $|E\rangle$  est état propre de  $H$ , on a :

$$\begin{aligned} H |E\rangle = E |E\rangle &\Rightarrow e^{-i\varepsilon T} H e^{i\varepsilon T} |E\rangle = (E - \varepsilon) |E\rangle \\ &\Rightarrow H (e^{i\varepsilon T} |E\rangle) = (E - \varepsilon) (e^{i\varepsilon T} |E\rangle). \end{aligned}$$

$(e^{i\varepsilon T} |E\rangle)$  est un état propre pour une énergie inférieure si  $\varepsilon$  est positif.

*Remarque : on prendra garde que l'état  $e^{i\varepsilon t} |E\rangle$  ne vérifie pas l'équation de Schrödinger, car*

$$i\partial_t (e^{i\varepsilon t} |E\rangle) = (-\varepsilon + E) (e^{i\varepsilon t} |E\rangle)$$

et

$$\widehat{H} (e^{i\varepsilon t} |E\rangle) = E e^{i\varepsilon t} |E\rangle :$$

le principe de correspondance s'applique aux opérateurs  $\widehat{P}$  et  $\widehat{X}$ . C'est l'équation de Schrödinger qui associe  $\widehat{H}$  à  $i\partial_t$ .

### 3.b Opérateur impulsion

Montrer que l'opérateur impulsion est hermitien. Indication : le démontrer pour une composante en exprimant par exemple la quantité  $\langle \psi_1 | \hat{p}_x \psi_2 \rangle$  de deux façons différentes.

#### Réponses

Démontrons-le pour la composante x :

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \hat{p}_x \psi_2 \rangle &= \int \psi_1^* \left( -i \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) dx dy dz = (-i) \left\{ [\psi_1^* \psi_2]_{-\infty}^{+\infty} - \int \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x} \psi_2 dx dy dz \right\} \\ &= \int \left( -i \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^* \psi_2 dx dy dz = \langle \hat{p}_x \psi_1 | \psi_2 \rangle. \end{aligned}$$

### 3.c Trace des matrices de Dirac

Les matrices de Dirac (matrices  $\gamma$ ) sont définies par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} ; \quad \gamma^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{1,2,3} \\ -\sigma_{1,2,3} & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices  $\gamma$  sont-elles hermitiennes ?
2. Montrer que pour tout  $\mu$ , la matrice  $\gamma^0 \gamma^\mu$  est hermitienne.
3. Montrer que les matrices  $\gamma$  sont de trace nulle et de déterminant 1.  
*Indication* : On montrera que  $\det \begin{pmatrix} 0 & N \\ M & 0 \end{pmatrix} = \det(-MN)$  où  $M$  et  $N$  sont des matrices carrées d'ordre 2.
4. On définit l'anticommutateur de deux matrices  $A$  et  $B$  par  $\{A, B\} = AB + BA$ . Montrer que  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_4$  où  $I_4$  est la matrice identité d'ordre 4.
5. Montrer que  $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$ .
6. Montrer par récurrence que la trace du produit d'un nombre impair de matrices de Dirac est nulle.
7. On définit  $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$ . Vérifier cette égalité.
8. Montrer que  $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$  ;  $(\gamma^5)^2 = I_4$  ;  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ .

#### Réponses

1.  $\gamma^0$  est hermitienne, les autres sont antihermitiennes.
2. Il suffit pour le montrer d'utiliser la question précédente et l'anticommutation des matrices  $\gamma$ .
3. Pour la trace, c'est évident d'après les définitions.  
 Déterminant 1.

Pour  $\gamma^0$  c'est immédiat ; pour les autres matrices :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & N \\ M & 0 \end{pmatrix} &= \det \left( \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \\ &= (\text{développement du déterminant}) 1 \times \det \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme le carré des matrices de Pauli vaut 1, on obtient sans difficulté le résultat demandé.

4-8. Les questions 4, 6 7 et 8 se font par calcul direct ou en utilisant  $\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]$ , et donc si  $AB = -BA$  alors :

$$\text{Tr}[AB] = -\text{Tr}[BA] = -\text{Tr}[AB] = 0.$$

On utilise aussi le produit de matrices par bloc :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AM + BP & AN + BQ \\ CM + DP & CN + DQ \end{pmatrix}.$$

où  $A, B, C, D, M, N, P, Q$  sont des matrices  $2 \times 2$ .

Pour la trace d'un nombre impair de matrices  $\gamma$  (question 5) :

- (a) la propriété est vraie pour 1 matrice ;
- (b) pour 3 matrices, elle est vraie si deux d'entre elles sont identiques, car par anticommutation et le fait que le carré d'une matrice gamma vaut l'identité, on peut se ramener à la trace d'une seule matrice au signe près. Si les trois matrices sont différentes, on écrit (avec les indices  $a b c d$  tous distincts) :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^a \gamma^b \gamma^c) &= \text{Tr}(\gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^d) \\ &= \text{Tr}(\gamma^d \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d) \\ &= -\text{Tr}(\gamma^d \gamma^a \gamma^b \gamma^d \gamma^c) \\ &= \text{Tr}(\gamma^d \gamma^a \gamma^d \gamma^b \gamma^c) \\ &= -\text{Tr}(\gamma^d \gamma^d \gamma^a \gamma^b \gamma^c) \\ &= -\text{Tr}(\gamma^a \gamma^b \gamma^c) \end{aligned}$$

et donc  $\text{Tr}(\gamma^a \gamma^b \gamma^c) = 0$  ;

- (c) pour un nombre de matrices supérieur ou égal à 5, on peut se ramener au signe près à un produit de trois matrices par anticommutation et le fait que le carré d'une matrice  $\gamma$  vaut l'identité.

Attention, l'identité  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  n'entraîne pas l'identité  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BAC)$  qui n'est pas toujours vérifiée. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 &cej \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.d Commutation avec les matrices de Dirac

Montrer que si une matrice carrée d'ordre 4 commute avec toutes les matrices de Dirac alors elle est proportionnelle à la matrice identité  $I_4$ .

**Réponses**

Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ .

$$M\gamma^0 = \gamma^0 M \Rightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix} \Rightarrow B = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M\gamma^i = \gamma^i M \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & A\sigma^i \\ -D\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i D \\ -\sigma^i A & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall i \quad \sigma^i A = D\sigma^i \Rightarrow A = \sigma^i D\sigma^i \text{ car } \sigma^i \sigma^i = I_2.$$

$$\text{Alors : } \sigma^j D\sigma^j = \sigma^i D\sigma^i \Rightarrow D = \sigma^j \sigma^i D\sigma^i \sigma^j = \sigma^k D\sigma^k = A \text{ car } \sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} I_2 + i\varepsilon_{ijk} \sigma^k.$$

Enfin posons  $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

$$D = \sigma^z D\sigma^z \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \Rightarrow b = c = 0.$$

$$D = \sigma^y D\sigma^y \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow a = d.$$

Finalement :  $M = aI_4$ .

### 3.e Covariance de l'équation de Dirac

Montrer que pour les transformations orthochrones (qui ne renversent pas le sens du temps :  $\Lambda^0_0 > 0$ ) :

$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0,$$

où  $S = S(\Lambda)$  est l'opérateur qui transforme le spineur de Dirac lors d'une transformation de Lorentz ( $\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$  avec  $x \rightarrow x' = \Lambda x$ ). On normalisera  $S(\Lambda)$  en imposant  $\det S(\Lambda) = 1$ .

**Réponses**

On utilise la relation imposée par la définition de  $S$  :  $\gamma^\mu \underbrace{\Lambda^\nu_\mu}_{\text{nombre réel}} = S^{-1} \gamma^\nu S$ .

De plus :

$$\begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 \\ (\gamma^0 \gamma^{1,2,3})^\dagger = (\beta^2 \alpha_{x,y,z})^\dagger = \alpha_{x,y,z} = \gamma^0 \gamma^{1,2,3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \\ \gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \end{cases}$$

Donc :

$$\gamma^{\mu\dagger} \underbrace{\Lambda^\nu_\mu}_{\text{nombre réel}} = S^\dagger \gamma^{\nu\dagger} S^{-1\dagger} \Rightarrow \gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 S^{-1\dagger} \gamma^0$$

et

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu &= S^{-1} \gamma^\nu S \Rightarrow S^{-1} \gamma^\nu S = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 S^{-1\dagger} \gamma^0 \\ &\Rightarrow \gamma^\nu = (S \gamma^0 S^\dagger \gamma^0) \gamma^\nu (S \gamma^0 S^\dagger \gamma^0)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc  $(S \gamma^0 S^\dagger \gamma^0)$  commute avec toutes les matrices  $\gamma$  et :

$$(S \gamma^0 S^\dagger \gamma^0) = c I_4 \Rightarrow S^\dagger \gamma^0 = c \gamma^0 S^{-1},$$

où  $c$  est réel car  $\gamma^0$  et  $S \gamma^0 S^\dagger$  sont hermitiennes.

Puis  $\det S(\Lambda) = 1 \Rightarrow c^4 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$ , et :

$$\begin{aligned} S^\dagger S &= S^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S = c \gamma^0 S^{-1} \gamma^0 S = c \gamma^0 \Lambda^0_\nu \gamma^\nu \\ &\Rightarrow \text{Tr}(S^\dagger S) = 4c \Lambda^0_\nu \text{Tr}(\gamma^0 \gamma^\nu) = 4c \Lambda^0_\nu \eta^{0\nu} = 4c \Lambda^0_0. \end{aligned}$$

Or  $S^\dagger S$  est hermitienne, et si  $\psi$  est vecteur propre pour la valeur propre (réelle)  $a$  :  $S^\dagger S \psi = a \psi$  donc :

$$0 < \langle S \psi | S \psi \rangle = \langle \psi | S^\dagger S \psi \rangle = a \langle \psi | \psi \rangle \Rightarrow 0 < a$$

Donc  $\text{Tr}(S^\dagger S) > 0$  ( $\det S^\dagger S = 1$  par choix de normalisation).

Finalement, si  $\Lambda$  est orthochrone, on a  $c = +1$ .

### 3.f Opérateur spin sur les spineurs de Dirac

On donne le hamiltonien de Dirac :  $\hat{H}_D = \hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m \hat{I}$ . Calculer le commutateur  $[\hat{H}_D, \hat{\vec{L}}]$  où  $\hat{\vec{L}}$  est l'opérateur  $\vec{r} \times \vec{p}$ .

*Indication* : calculer sur une composante puis faire une permutation circulaire des indices.

Montrer que  $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$  commute avec  $\hat{H}_D$ , où  $\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$  et  $\vec{\sigma}$  est le vecteur dont les composantes sont les matrices de Pauli.

En prenant  $\widehat{S}$  comme opérateur spin, le moment cinétique total est conservé, comme il se doit.

### Réponses

$$\begin{aligned} [\widehat{H}_D, \widehat{L}_x] &= \left[ \left( \vec{\alpha} \cdot \widehat{\vec{p}} + m\beta \right), y\widehat{p}_z - z\widehat{p}_y \right] \\ &= [\alpha_y \widehat{p}_y, y\widehat{p}_z] - [\alpha_z \widehat{p}_z, z\widehat{p}_y] = -i\alpha_y \widehat{p}_z + i\alpha_z \widehat{p}_y. \end{aligned}$$

Cette égalité s'obtient en notant que les matrices  $\alpha$  commute avec les opérateurs coordonnées et impulsions.

Puis, en utilisant les définitions des matrices  $\alpha$  et les commutateurs des matrices de Pauli :

$$\begin{aligned} [\widehat{H}_D, \widehat{S}_x] &= \left[ \left( \vec{\alpha} \cdot \widehat{\vec{p}} + m\beta \right), \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[ \alpha_y \widehat{p}_y, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \right] + \left[ \alpha_z \widehat{p}_z, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \right] = -i\alpha_z \widehat{p}_y + i\alpha_y \widehat{p}_z \end{aligned}$$

et formules similaires pour les autres composantes.

On voit donc que  $\widehat{J}$  commute avec  $\widehat{H}_D$ .

### 3.g Équation de Weyl

Montrer que pour une particule de masse nulle, on peut trouver une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans toutes les coordonnées d'espace-temps compatible avec l'équation de Klein-Gordon en introduisant un spineur à seulement deux composantes.

#### Réponse

On suit la même démarche que pour l'équation de Dirac, sans terme  $\beta m$ . Les matrices de Pauli font alors l'affaire pour les termes  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}$ . On obtient :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \psi.$$

# Exercices du chapitre 4

## 4.a Particules étranges

Dans le Modèle Standard, les quarks sont au nombre de six, répartis en trois familles comprenant chacune deux éléments de charge électrique  $+2/3$  et  $-1/3$ , l'unité de charge électrique étant la charge de l'électron. On rappelle que tous les quarks ont une charge baryonique  $+1/3$  et qu'on appelle méson une particule à interaction forte de charge baryonique nulle.

Peu après la découverte du méson  $\pi$  en 1947, de nouvelles particules instables ont été découvertes dans le rayonnement cosmique. Leur section efficace de production est élevée, mais leur durée de vie est « longue » ( $10^{-8}$  à  $10^{-10}$  s). Elles sont donc produites par interaction forte, mais se désintègrent par interaction faible. Ces deux caractéristiques apparemment contradictoires sont à l'origine de leur appellation « particules étranges ».

On introduit alors un nouveau nombre quantique, l'étrangeté  $S$ , qui est conservé lors d'une interaction forte ou électromagnétique, mais non lors d'une interaction faible.

À la suite d'une interaction forte, les particules étranges sont toujours produites par paires, l'une ayant une étrangeté positive, l'autre une étrangeté opposée. Par convention, on attribue l'étrangeté  $+1$  au méson neutre  $K^0$ .

On observe que la particule  $\Lambda$  est produite dans un accélérateur avec une section efficace élevée par la réaction :  $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$ .

1. En déduire ses nombres quantiques (charges électrique et baryonique, étrangeté).
2. Même question pour le  $K^+$  dans :  $p + p \rightarrow p + \Lambda + K^+$ .
3. L'antiparticule du  $K^+$  est le  $K^-$ , celle du  $K^0$  est le  $\bar{K}^0$ . Indiquer leurs nombres quantiques.
4. Les désintégrations suivantes sont-elles possibles? Justifier.

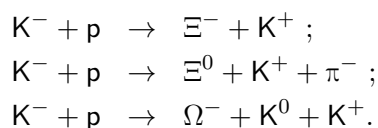
$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^- ; \Lambda \rightarrow p + \pi^- \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \gamma ; K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu. \end{aligned}$$

5. Le  $\Lambda$  est constitué des trois quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$ . En déduire la charge électrique du quark  $s$  et son étrangeté. Montrer que tous les mésons



étranges  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  peuvent être formés à partir d'un quark  $u$ ,  $d$  ou  $s$  et d'un antiquark.

6. Trouver tous les baryons (particules de charge baryonique +1) d'étrangeté  $-2$  et  $-3$ , en écrivant leur composition en trois quarks (la prédiction théorique de l'existence du  $\Omega^-$  en 1963, suivie de sa découverte expérimentale l'année suivante a été le premier succès du modèle des quarks, la masse et les désintégrations de cette particule ayant été correctement déterminées à l'avance). Les identifier sachant qu'ils sont produits par les réactions suivantes :



## Réponses

1. Le pion et le proton ont des interactions fortes, donc dans les réactions citées, l'étrangeté est conservée. La charge électrique  $Q$  du  $K^0$  est 0, sa charge baryonique  $B$  est 0 (c'est un méson), son étrangeté  $S$  est +1 :

	$\pi^-$	+	$p$	$\rightarrow$	$\Lambda$	+	$K^0$
$Q$	-1		+1	=	0		0
$B$	0		+1	=	+1		0
$S$	0		0	=	-1		+1

2. Les nombres quantiques du  $\Lambda$  permettent de connaître ceux du  $K^+$  :

	$p$	+	$p$	$\rightarrow$	$p$	+	$\Lambda$	+	$K^+$
$Q$	+1		+1	=	+1		0		+1
$B$	+1		+1	=	+1		+1		0
$S$	0		0	=	0		-1		+1

3. Pour les antiparticules, tous les nombres quantiques sont opposés.  
Le  $K^-$  a donc  $Q = -1$ ,  $B = 0$ ,  $S = -1$ .  
Le  $K^0$  a  $Q = 0$ ,  $B = 0$ ,  $S = -1$ .
4. Dans les 4 réactions, les charges électriques et baryoniques sont conservées. L'étrangeté n'est pas conservée, ce qui est possible uniquement pour l'interaction faible. Les pions, protons et leptons sont sensibles à l'interaction faible, donc les désintégrations qui les font intervenir sont possibles. Par contre la troisième réaction faisant intervenir le photon  $\gamma$ , qui n'intervient que dans l'interaction électromagnétique, est interdite au premier ordre. Elle pourrait se faire par des processus d'ordre élevé rares, mais en fait elle est aussi interdite par conservation du moment cinétique, les spins du  $K^+$  et du  $\pi^+$  étant nuls.

5. Pour le  $\Lambda$  de charge nulle, on ajoute le quark  $s$  aux quarks  $u$  ou  $d$ , de charges respectivement  $+2/3$  et  $-1/3$ . Donc la charge de  $s$  est  $-1/3$ . Son étrangeté est égale à celle du  $\Lambda$ , c'est-à-dire  $-1$  puisque  $u$  et  $d$  ne sont pas étranges. Si les  $K$  sont formés d'un quark et d'un antiquark de charges baryoniques respectives  $+1/3$  et  $-1/3$ , ce sont bien des mésons, de charge baryonique nulle.  $K^+$  et  $K^0$  ont une étrangeté  $+1$ , ils contiennent donc le quark  $\bar{s}$ . Donc  $K^+$  est formé de  $(u\bar{s})$  et  $K^0$  de  $(d\bar{s})$ .
6. Les baryons doivent être formés de trois quarks de charge baryonique  $1/3$  pour avoir la charge baryonique  $+1$ . Ceux d'étrangeté  $-2$  contiennent 2 quarks  $s$ . Il y a deux possibilités :
- On peut former  $(dss)$  qui a :  $Q = -1/3 - 1/3 - 1/3 = -1$ . On vérifie que c'est  $\Xi^-$  :

	$K^-$	+	$p$	$\rightarrow$	$\Xi^-$	+	$K^+$
$Q$	-1		+1	=	-1		+1
$B$	0		+1	=	+1		0
$S$	-1		0	=	-2		+1

- De même  $(uss)$  :  $Q = +2/3 - 1/3 - 1/3 = 0$ . On vérifie que c'est  $\Xi^0$  :

	$K^-$	+	$p$	$\rightarrow$	$\Xi^0$	+	$K^+$	+	$\pi^-$
$Q$	-1		+1	=	0		+1		-1
$B$	0		+1	=	+1		0		0
$S$	-1		0	=	-2		+1		0

- Pour l'étrangeté  $-3$ , il y a une seule possibilité  $(sss)$  :
- $Q = -1/3 - 1/3 - 1/3$ . On vérifie :

	$K^-$	+	$p$	$\rightarrow$	$\Omega^-$	+	$K^0$	+	$K^+$
$Q$	-1		+1	=	-1		0		+1
$B$	0		+1	=	+1		0		0
$S$	-1		0	=	-3		+1		+1

## 4.b Lois de conservation

Indiquer si les désintégrations et réactions suivantes peuvent avoir lieu et la nature de l'interaction mise en jeu si c'est le cas :

$$\begin{aligned}
 p &\rightarrow e^+ + \gamma \\
 \gamma &\rightarrow e^+ + e^- \\
 \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \\
 \nu_\mu + n &\rightarrow \mu^- + p \\
 p &\rightarrow n + e^+ + \nu_e \\
 \pi^0 &\rightarrow \gamma \gamma
 \end{aligned}$$

## Réponses

$p \rightarrow e^+ + \gamma$  : interdite par conservation de  $B$  et de  $L$ .

$\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  : interdite (dans le vide) par conservation de la masse invariante : dans toute réaction, l'énergie et la quantité de mouvement sont conservées, donc aussi la masse invariante. Or, le photon a une masse nulle, et la masse invariante du système  $e^+ e^-$  calculée dans le centre de masse de ce système vaut :  $\sqrt{p(e^+)^2 + m_e^2 c^4} + \sqrt{p(e^-)^2 + m_e^2 c^4} > 2m_e c^2$

$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$  : permise, interaction faible, car  $m_{\mu^-} > m_e$ .

$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$  : permise, interaction faible. Avec deux particules dans l'état initial, on peut donner suffisamment d'énergie cinétique pour que la conservation de l'énergie puisse être respectée.

$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$  : interdite dans le vide par conservation de l'énergie car  $m_p < m_n$ .

$\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$  : permise, interaction électromagnétique. Ici, il y a annihilation de paires quarks antiquarks et non pas changement de nature des particules.

## 4.c Désintégration à deux corps

Une particule de masse  $m$  se désintègre en deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$ . Calculer  $E_1$  et  $E_2$  leur énergie dans le centre de masse (éviter les calculs compliqués). Calculer  $|\vec{p}_1|$  et  $|\vec{p}_2|$ . Utiliser les unités naturelles.

### Réponses

Conservation de l'énergie-impulsion :

$$E_1 + E_2 = m ; \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0.$$

D'où :

$$E_1^2 - E_2^2 = m_1^2 + p_1^2 - m_2^2 - p_2^2 = m_1^2 - m_2^2.$$

D'où :

$$E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{E_1 + E_2} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m} \\ E_2 = \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m} \end{cases}$$

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} = \frac{1}{2m} \sqrt{m^4 + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 2m^2(m_1^2 + m_2^2)}.$$

## 4.d Matérialisation

1. Quelle est l'énergie minimale que doit avoir un photon pour se matérialiser en une paire électron-positron ? Montrer cependant que la réaction  $\gamma \rightarrow e^- + e^+$  est impossible dans le vide.

2. On considère un photon se propageant dans le voisinage d'un électron au repos. Calculer l'énergie minimale du photon pour que la matérialisation puisse avoir lieu par la réaction :  $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$ . On pourrait dire que l'électron joue un rôle catalyseur.

*Indication : se placer d'abord dans le centre de masse de la réaction pour calculer la masse invariante de l'état final, puis dans le repère du laboratoire pour calculer la masse invariante de l'état initial.*

3. Le photon traverse à présent une plaque de plomb, et se trouve en présence des noyaux des atomes (notés  $N$ ). Calculer l'énergie minimale du photon pour que la matérialisation puisse avoir lieu par la réaction :  $\gamma + N \rightarrow N + e^+ + e^-$ . Comparer avec le résultat de la première question.
4. La section efficace de la réaction précédente est donnée par la formule de Bethe et Heitler, valable pour un photon d'énergie supérieure à 500 MeV :

$$\sigma = \alpha r_0^2 Z^2 \left[ \frac{28}{9} \ln \left( 183 Z^{-1/3} \right) - \frac{2}{27} \right],$$

où  $\alpha = 1/137$  est la constante de structure fine,  $r_0 = 2,82 \text{ fm}$  est le rayon classique de l'électron, et  $Z$  le numéro atomique du noyau (82 pour le plomb).

(a) Calculer  $\sigma$ .

(b) Calculer la probabilité  $\Pi$  qu'un photon de 1 GeV se matérialise en traversant une plaque de plomb de  $500 \mu\text{m}$  d'épaisseur. La masse atomique du plomb est  $A = 207,2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et sa masse volumique  $\rho = 11,35 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . À cette énergie, on peut négliger les autres interactions du photon dans le plomb.

## Réponses

1. La réaction  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  est impossible dans le vide par conservation de la masse invariante, nulle pour le photon et au moins égale à  $2m$  pour l'état final  $e^+ + e^-$ .
2. Pour trouver l'énergie minimale du photon, il faut minimiser la masse invariante de l'état final. Celle-ci est obtenue dans le centre de masse du système en annulant toutes les impulsions, elle vaut alors  $3m$ , où  $m$  est la masse de l'électron. Comme la masse invariante est indépendante du repère, on a dans le repère du laboratoire, en notant  $E$  l'énergie du photon, égale en unités naturelles à son impulsion, et  $p$  l'impulsion de l'électron initialement présent :

$$(E + m)^2 - E^2 = (3m)^2 \Rightarrow E = 4m.$$

3. On utilise la même méthode que précédemment, en notant  $M$  la masse du noyau :

$$(E + M)^2 - E^2 = (M + 2m)^2 \Rightarrow E = 2m \left( 1 + \frac{m}{M} \right).$$

On trouve cette fois une énergie très proche de  $2m$ , la valeur la plus petite possible.

4. a)  $\sigma = 4,51 \times 10^{-27} \text{ m}^2 = 4,51 \times 10^{-23} \text{ cm}^2$ .
- b) Le nombre de photons varie en fonction de l'épaisseur traversée  $x$  comme  $dN = -\sigma_{abs} n dx$ , où  $\sigma_{abs}$  est la section efficace d'absorption (prise approximativement égale à  $\sigma$ ) et  $n$  est la densité de cibles :  $n = \rho \mathcal{N} / M$ . La probabilité de matérialisation par la traversée d'une épaisseur  $e$  de plomb s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{N(0) - N(e)}{N(0)} = 1 - \exp(-\sigma \rho \mathcal{N} e / M) \\ &= 1 - \exp(4,51 \times 10^{-23} \times 11,35 \times 6,02 \times 10^{23} \times 0,05 / 207,2) \\ &= 7,2\%. \end{aligned}$$

#### 4.e Distribution de Dirac

On rappelle les propriétés suivantes de la distribution de Dirac :

— Pour les fonctions  $f$  définies en  $x_0$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) ;$$

— Si  $g$  est est une fonction telle que  $g(x_i) = 0$  et  $g'(x_i) \neq 0$  alors

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|},$$

et par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}.$$

Par ailleurs, deux représentations de  $\delta$  seront utiles pour le cours :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) dk \quad \text{et} \quad \delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

1. Sachant que  $p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2$  calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) dp^0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) dp^0,$$

et pour  $f$  à support compact :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) f(p) d^4p,$$

où  $\theta$  est la fonction de Heaviside :  $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ .

2. Calculer :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{\sin^2(\Delta E t / 2\hbar)}{(\Delta E / 2\hbar)^2}$ .

### Réponses

1.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) dp^0 &= \frac{1}{E}. \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) dp^0 &= \frac{1}{2E}. \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) f(p) d^4p &= \int f(p) \frac{d^3\vec{p}}{2E}. \end{aligned}$$

2.  $2\pi\hbar\delta(\Delta E)$ .

## 4.f Représentation de la distribution de Dirac

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'une représentation de la distribution de Dirac est donnée par :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

c'est-à-dire que pour toute fonction test  $h(x)$  :

$$h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \frac{1}{2\pi} e^{ikx} dx dk.$$

1. On définit la distribution :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{-k^2\epsilon^2/2} dk.$$

Montrer alors que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-x^2/(2\epsilon^2)}.$$

2. Conclure.

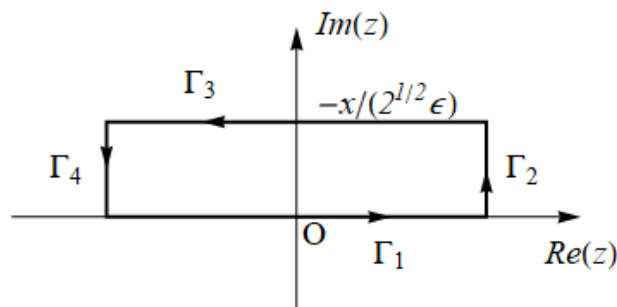
## Réponses

1. On écrit :  $ikx - k^2\epsilon^2/2 = -x^2/(2\epsilon^2) - \left(\frac{k\epsilon}{\sqrt{2}} - i\frac{x}{\sqrt{2}\epsilon}\right)^2$ .

On obtient par changement de variable  $u = k\epsilon/\sqrt{2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{-k^2\epsilon^2/2} dk &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon} e^{-x^2/(2\epsilon^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u - i\frac{x}{\sqrt{2}\epsilon}\right)^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon} e^{-x^2/(2\epsilon^2)} \times I. \end{aligned}$$

L'intégrale  $I$  se calcule par le théorème des résidus pour la fonction  $f(z) = e^{-z^2}$  en prenant le contour rectangulaire  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  ci-dessous :



On a :  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .

Or :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} f(z) dz &= \int_{-R}^{+R} e^{-u^2} du \rightarrow \sqrt{\pi} \text{ si } R \rightarrow \infty \\ \left\| \int_{\Gamma_2} f(z) dz \right\| &\leq \int_0^{x/(\sqrt{2}\epsilon)} e^{-(R^2-y^2)} dy \rightarrow 0 \text{ si } R \rightarrow \infty \\ \left\| \int_{\Gamma_4} f(z) dz \right\| &\leq - \int_{x/(\sqrt{2}\epsilon)}^0 e^{-(R^2-y^2)} dy \rightarrow 0 \text{ si } R \rightarrow \infty \\ \int_{\Gamma_3} f(z) dz &\rightarrow -I \text{ si } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Il vient finalement  $I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) dz = \sqrt{\pi}$ , soit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{-k^2\epsilon^2/2} dk = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon} e^{-x^2/(2\epsilon^2)}.$$

2. La fonction obtenue est une gaussienne  $G_\epsilon(x)$  d'intégrale 1 et d'autant plus piquée en 0 que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Prenons une fonction test  $h(x)$  et calculons :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) G_\epsilon(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sqrt{2}\epsilon u) e^{-u^2} du \\ &\quad (\text{par changement de variable } u = x/(\sqrt{2}\epsilon)) \\ &= h(0) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &= h(0). \end{aligned}$$

La limite quand  $\epsilon \rightarrow 0$  de  $G_\epsilon(x)$  est la distribution de Dirac comme attendu, ce qui finit de montrer la relation demandée.

## 4.g Section efficace

La section efficace d'absorption des rayons gamma de 1 MeV par les atomes de plomb est de 10 b.

1. Quelle est la longueur d'absorption  $\lambda$  correspondante ? Le numéro atomique du plomb est 82, son nombre de masse 207, et sa masse volumique  $11 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .
2. Quelle fraction  $f$  de rayons gamma traverse 10 cm de plomb ?

### Réponses

1.  $\lambda = (207 \times 10^{-3}) / (10 \times 10^{-28} \times 6.02 \times (10^{23}) \times 11000) = 0,03 \text{ m}$ .
2.  $f = \exp(-0.1/\lambda) = 4,1 \%$ .

## 4.h Catastrophe au LHC

Le LHC est composé de deux anneaux circulaires de rayon  $R$  dans lesquels circulent deux faisceaux de protons en sens inverse et qui se croisent une fois par tour. Dans les deux faisceaux du LHC, les protons sont regroupés en paquets, et l'on suppose qu'il y a un seul paquet par faisceau pour simplifier. Chaque paquet est un cylindre de section  $S$  et de longueur  $L$ , dans lesquels les protons sont répartis uniformément. L'énergie cinétique nominale des protons est  $T = 7 \text{ TeV}$  ( $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$ ).

1. Montrer que leur vitesse est pratiquement égale à la vitesse de la lumière  $c$ .
2. Soient  $N_1$  et  $N_2$  le nombre des protons dans les deux paquets. Exprimer en fonction de la section efficace de collision  $\sigma$  le nombre  $x$  de collisions par croisement. On admettra que ce nombre est très petit devant  $N_1$  et  $N_2$ .
3. On donne  $\sigma = 30 \text{ mb}$ . Justifier l'ordre de grandeur de cette valeur.



4. On donne  $N_1 = N_2 = 10^{14}$ ,  $R = 4,5 \text{ km}$  et  $S = 0,5 \text{ mm}^2$ . Calculer le nombre  $\tau$  de collisions par seconde .
5. Quelle est la masse  $M$  de la particule la plus lourde qui peut être produite lors d'une collision ?
6. Quelle énergie minimale  $E$  un proton cosmique entrant en collision avec un proton au repos de l'atmosphère doit-il avoir pour produire une particule de masse  $M$  ?
7. La densité de flux de protons cosmiques d'énergie supérieure à  $10^{17} \text{ eV}$  est  $\Phi = 1000$  protons par  $\text{km}^2$  et par an. Combien d'années  $N$  le LHC devrait-il fonctionner pour égaler le nombre de collisions déjà produites par les protons cosmiques depuis que la Terre existe, soit depuis environ 4,5 milliards d'années ? On donne le rayon de la Terre :  $R_T = 6400 \text{ km}$ .
8. Commenter alors sur le danger potentiel de la création d'une particule dangereuse (mini trou noir par exemple) au LHC.

### Réponses

1.  $T \gg m_p c^2 \Rightarrow \gamma \simeq T/m_p c^2 \simeq 7000 \Rightarrow \beta \simeq \sqrt{1 - 1/49 \times 10^6} \simeq 1$ .
2.  $dx = N_1 \sigma \frac{N_2}{LS} dL \Rightarrow x \simeq \sigma N_1 N_2 / S$ .
3. Les protons interagissent principalement par interaction forte, dont la portée est de l'ordre de 1 fm, donc il y a collision si les centres des deux protons sont à moins de 1 fm, soit une surface effective de collision de  $\pi \text{ fm}^2 \approx 30 \text{ mb}$ .
4.  $\tau = xc / (2\pi R) = c\sigma N_1 N_2 / (2\pi RS) = 6,4 \times 10^8$  collisions par seconde.
5.  $M = 14 \text{ TeV}/c^2$ .
- 6.

$$M^2 c^4 = (E + m_p c^2)^2 - P^2 c^2 = 2Em_p c^2 + 2(m_p c^2)^2 \simeq 2Em_p c^2$$

$$E \simeq \frac{M^2 c^4}{2m_p c^2} = \frac{(14 \times 10^{12})^2}{2 \times 0,938 \times 10^9} = 1,04 \times 10^{17} \text{ eV}.$$

7. Tous les rayons cosmiques interagissent, donc :

$$N = \frac{4\pi R_T^2 \Phi \times 4,5 \times 10^9}{\tau \times 365 \times 24 \times 3600} = \frac{4 \times \pi \times 6400^2 \times 1000 \times 4,5 \times 10^9}{6,4 \times 10^8 \times 365 \times 24 \times 3600}$$

$$= 115000 \text{ ans !}$$

8. Les collisions produites au LHC ne sont pas différentes en nature des collisions des protons cosmiques, la production d'une particule ou d'un phénomène dangereux au LHC semble donc hautement improbable compte tenu du nombre d'interactions cosmiques qui ont déjà eu lieu. Cet argument simple souffre quand même d'une faiblesse : la particule produite au LHC peut être pratiquement au repos et exercer son influence pendant un temps beaucoup plus long que les particules produites par les rayons cosmiques.

# Exercices du chapitre 5

## 5.a Principe de moindre action

Un système est décrit par le lagrangien :

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

où  $\dot{x}$  désigne la dérivée  $dx/dt$ .

1. Écrire les équations de Lagrange pour ce système.
2.  $L$  ne dépend pas explicitement du temps. En déduire une quantité conservée au cours du temps.

### Réponses

1.  $\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right) \Leftrightarrow -kx = m\ddot{x}$ .
2.  $H(x, \dot{x}, t) = p\dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ .

## 5.b Densité de hamiltonien

On considère la densité de lagrangien  $\mathcal{L}(\psi, \partial_{\mu=0,1,2,3} \psi)$  ne dépendant pas explicitement du temps. On définit la densité de hamiltonien par :

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L}, \text{ où } \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}.$$

Montrer que la quantité  $H = \int \mathcal{H} d^3x$  est une constante du mouvement. On précisera les hypothèses sur  $\psi$  et ses dérivées qui permettent de montrer ce résultat.

*Indication : utiliser le principe de moindre action généralisé pour calculer  $d\mathcal{L}$  lors d'une translation dans le temps infinitésimale  $t \rightarrow t + dt$  ; isoler les termes d'indice 0 pour faire apparaître une divergence.*

### Réponse

On calcule  $d\mathcal{L}$  en utilisant le principe de moindre action généralisé :

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \frac{d(\partial_\mu \psi)}{dt} dt = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) \frac{d\psi}{dt} dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \frac{d(\partial_\mu \psi)}{dt} dt.$$

On isole les termes avec  $\mu = 0$ , on fait apparaître une somme sur  $j = 1, 2, 3$ , on note que  $\frac{d\psi}{dt} = \partial_0\psi$  et  $\frac{d}{dt}(\partial_\mu\psi) = \partial_0\partial_\mu\psi$ , et on rassemble les termes deux par deux pour faire apparaître des dérivées de produits :

$$d\mathcal{L} = \left[ \partial_0 \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} \partial_0\psi \right) + \partial_j \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j\psi)} \partial_0\psi \right) \right] dt.$$

On intègre sur tout l'espace en regroupant les termes pour faire apparaître  $H$  en remarquant que la dérivée totale de  $H$  par rapport à  $t$  est égale à sa dérivée partielle, puisque  $H$  ne dépend que de  $t$  :

$$\frac{dH}{dt} = - \int \partial_j \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j\psi)} \partial_0\psi \right) d^3x.$$

Le terme de droite est une intégrale sur tout l'espace d'une divergence totale. Elle est nulle si on suppose  $\psi$  et ses dérivées nulles à l'infini, ce qui donne le résultat demandé, si on admet qu'on peut changer l'ordre de l'intégration sur l'espace et de la dérivée partielle par rapport au temps.

## 5.c Lagrangien de dirac

Montrer que la densité de lagrangien :

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, \psi^\dagger, \partial_\mu\psi^\dagger) = \bar{\psi} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \psi = \psi^\dagger\gamma^0 (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \psi$$

conduit à l'équation de Dirac par le principe de moindre action généralisé.

### Réponse

On peut le montrer de deux façons, avec la coordonnée généralisée  $\psi^\dagger$  ou avec la coordonnée  $\psi$  :

$$a) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\dagger} = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^\dagger)} \right) \Leftrightarrow \gamma^0 (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \psi = 0.$$

$$b) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right)$$

$$\Leftrightarrow -\psi^\dagger\gamma^0 m = \partial_\mu \left( \psi^\dagger\gamma^0 i\gamma^\mu \right) \Leftrightarrow \partial_\mu\psi^\dagger\gamma^0 i\gamma^\mu + \psi^\dagger\gamma^0 m = 0.$$

On considère l'équation adjointe :

$$-i\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}\partial_\mu\psi + m\gamma^0\psi = 0 \Leftrightarrow -i\gamma^{0\dagger}\gamma^{0\dagger}\partial_0\psi - i\gamma^{j\dagger}\gamma^{0\dagger}\partial_j\psi + m\gamma^0\psi = 0.$$

On utilise les propriétés des matrices  $\gamma$  (anticommutation de  $\gamma^0$  et  $\gamma^j$  et antihermiticité des  $\gamma^j$ ), l'équation devient :

$$-i\gamma^0\gamma^0\partial_0\psi - i\gamma^0\gamma^j\partial_j\psi + m\gamma^0\psi = 0 \Leftrightarrow \gamma^0 (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \psi = 0.$$

## 5.d Espace de Fock

On définit les états notés  $|N\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle$  comme les états à  $n_1$  particules d'impulsion  $\vec{p}_1$ ,  $n_2$  particules d'impulsion  $\vec{p}_2 \dots$ , complètement symétriques par échange de deux particules. Montrer que :

$$\langle N|M\rangle \neq 0 \Rightarrow N = M.$$

Indication : utiliser l'hermiticité de l'opérateur  $a_{\vec{p}_i}^\dagger a_{\vec{p}_i}$ .

### Réponse

Montrons la contraposée. Si  $N \neq M$ , alors il existe au moins une impulsion  $\vec{p}_j$  telle que  $n_j \neq m_j$ . Alors  $N$  et  $M$  sont deux vecteurs propres de l'opérateur hermitien  $N_j = a_{\vec{p}_j}^\dagger a_{\vec{p}_j}$  pour des valeurs propres différentes. Ils sont donc orthogonaux.

## 5.e Hamiltonien de Klein-Gordon

La densité de lagrangien de Klein-Gordon est donné par :

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2.$$

On rappelle que les solutions de l'équation de K-G sont :

$$\psi = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left( a_{\vec{p}} \exp(-ipx) + a_{\vec{p}}^\dagger \exp(ipx) \right)$$

avec :

$$x = (t, \vec{x}) \quad ; \quad p = (E, \vec{p}) \quad ; \quad E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

1. Exprimer la densité de hamiltonien  $\mathcal{H}$  en fonction de  $\psi$  et de ses dérivées.
2. Exprimer le hamiltonien  $H = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}$  en fonction des opérateurs de création et d'annihilation.
3. Calculer :

$$H|0\rangle \quad ; \quad H a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle.$$

### Réponses

1. La densité de hamiltonien de Klein-Gordon s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L}_{KG} = \partial_0 \psi \partial^0 \psi - \mathcal{L}_{KG} \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_0 \psi \partial^0 \psi + (\vec{\nabla} \psi)^2 + m^2 \psi^2 \right). \end{aligned}$$

2. Explicitons les différents termes.

Premier terme :

$$\begin{aligned}
& \int d^3\vec{x} \partial_0 \psi \partial^0 \psi \\
&= \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} (-ip_0) \left[ a_{\vec{p}} e^{-ipx} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right] \times \\
& \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (-ik_0) \left[ a_{\vec{k}} e^{-ikx} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right] \\
&= \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (-p_0 k_0) \times \\
& \left[ a_{\vec{p}} a_{\vec{k}} e^{-i(p+k)x} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger e^{i(p+k)x} - a_{\vec{p}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(p-k)x} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}} e^{-i(p-k)x} \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{1}{2} (-p_0) \left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} - a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right]
\end{aligned}$$

où on a utilisé la transformée de Fourier de la distribution de Dirac :

$$\int d^3x e^{i\vec{k}\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}).$$

Deuxième terme :

$$\begin{aligned}
& \int d^3\vec{x} (\vec{\nabla} \psi)^2 \\
&= \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} (i\vec{p}) \left[ a_{\vec{p}} e^{-ipx} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right] \times \\
& \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (i\vec{k}) \left[ a_{\vec{k}} e^{-ikx} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right] \\
&= \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (-\vec{p} \cdot \vec{k}) \times \\
& \left[ a_{\vec{p}} a_{\vec{k}} e^{-i(p+k)x} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger e^{i(p+k)x} - a_{\vec{p}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(p-k)x} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}} e^{-i(p-k)x} \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{1}{2} \left( \frac{(\vec{p})^2}{p_0} \right) \left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right].
\end{aligned}$$

Troisième terme :

$$\begin{aligned}
& \int d^3\vec{x} m^2 \psi^2 \\
&= \int d^3\vec{x} m^2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right] \times \\
& \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \left[ a_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right] \\
&= \int d^3\vec{x} m^2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \times \\
& \left[ a_{\vec{p}} a_{\vec{k}} e^{-i(p+k)x} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger e^{i(p+k)x} + a_{\vec{p}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(p-k)x} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}} e^{-i(p-k)x} \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{1}{2} \frac{m^2}{p_0} \left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right].
\end{aligned}$$

Il vient finalement :

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{1}{2} \times \\
& \left[ (-p_0) \left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} - a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \right. \\
& + \left( \frac{(\vec{p})^2}{p_0} \right) \left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \\
& \left. + m^2 \left[ a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} e^{-2ip_0 t} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger e^{2ip_0 t} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \right].
\end{aligned}$$

On additionne les trois termes pour obtenir le résultat cherché :

$$\begin{aligned}
H &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{1}{2} p_0 \left[ a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \\
&= \int d^3\vec{p} p_0 \left[ \frac{a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}}{(2\pi)^3 2p_0} + \frac{1}{2} \delta^3(\vec{0}) \right].
\end{aligned}$$

3. Appliquons  $H$  à l'état  $a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ , il vient :

$$Ha_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \int d^3\vec{k} k_0 \frac{a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}}{(2\pi)^3 2k_0} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle + \int d^3\vec{k} k_0 \frac{1}{2} \delta^3(\vec{0}) a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle. \quad (5.1)$$

On utilise alors les relations de commutation des opérateurs de création et d'annihilation pour avoir :

$$\begin{aligned}
Ha_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle &= \int d^3\vec{k} a_{\vec{k}}^\dagger p_0 \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) |0\rangle + \frac{1}{2} \int d^3\vec{k} k_0 \delta^3(\vec{0}) a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \quad (5.2) \\
&= \left[ p_0 + \frac{1}{2} \int d^3\vec{k} k_0 \delta^3(\vec{0}) \right] a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Dans le crochet ci-dessus, on trouve l'énergie de la particule ( $p_0c$ ) plus un terme infini ( $\delta^3(\vec{0}) = V/(2\pi^3)$ ). Ce terme est aussi égal à l'énergie de l'état vide  $|0\rangle$ . Comme on ne peut mesurer les énergies que par rapport à cet état, il est possible d'ignorer ce terme.

## 5.f Hamiltonien de Dirac

La densité de hamiltonien de Dirac est donnée par :  $\mathcal{H} = i\psi^\dagger\partial_0\psi$ , et les solutions de l'équation de Dirac par :

$$\psi(x^\mu) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i} u_{\vec{p},i} \exp(-ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i}^\dagger v_{\vec{p},i} \exp(ip_\mu x^\mu) \right) \right].$$

Exprimer le hamiltonien  $H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}$  en fonction des opérateurs de création et d'annihilation.

**Réponse**

$$\begin{aligned} H &= i \int d^3\vec{x} \\ &\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \\ &\left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i}^\dagger u_{\vec{p},i}^\dagger \exp(ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i} v_{\vec{p},i} \exp(-ip_\mu x^\mu) \right) \right] \times \\ &\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \\ &(-ik_0) \left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{k},i} u_{\vec{k},i} \exp(-ik_\mu x^\mu) - d_{\vec{k},i}^\dagger v_{\vec{k},i} \exp(ik_\mu x^\mu) \right) \right]. \end{aligned}$$

L'intégrale sur  $\vec{x}$  donne un facteur  $(2\pi)^3$  et une fonction  $\delta^3$  sur les impulsions qui permet d'effectuer l'intégrale sur  $\vec{k}$  :

$$\begin{aligned} H &= i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 (2p_0)^2} \\ &\left[ -(ip_0) \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger u_{\vec{p},i}^\dagger \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i} u_{\vec{p},i} + (ip_0) \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i} v_{\vec{p},i} \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i}^\dagger v_{\vec{p},i} \right. \\ &\left. + (ip_0) \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger u_{\vec{p},i}^\dagger \sum_{i=1}^2 d_{-\vec{p},i}^\dagger v_{-\vec{p},i} - (ip_0) \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i} v_{\vec{p},i} \sum_{i=1}^2 b_{-\vec{p},i} u_{-\vec{p},i} \right]. \end{aligned}$$

Les relations d'orthogonalité sur les spineurs donnent un facteur  $2p_0$  et une fonction  $\delta$  sur les spins :

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} p_0 \left[ \sum_{i=1}^2 b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} - \sum_{i=1}^2 d_{\vec{p},i} d_{\vec{p},i}^\dagger \right].$$

Grâce aux relations d'anticommutation, il vient :

$$H = \sum_{i=1}^2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} p_0 \left( b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} + d_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},i} \right) - 2 \int d^3\vec{p} p_0 \delta^3(\vec{0}).$$

## 5.g Tenseur énergie-impulsion

Cet exercice est une généralisation de l'exercice 5.b. Soit un lagrangien  $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$ . On considère la variation  $\delta\mathcal{L}$  sous une translation d'espace-temps, soit par la transformation  $x_\mu \rightarrow x_\mu' = x_\mu + \varepsilon_\mu$ , où  $\varepsilon_\mu$  est infinitésimal.

1. Montrer que :

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon_\mu \partial^\mu \mathcal{L} = \varepsilon_\nu \partial^\mu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)} \partial^\nu\psi \right].$$

2. En déduire que le tenseur énergie-impulsion défini par :

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)} \partial_\nu\psi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}$$

vérifie :  $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ .

3. En déduire que la quantité :

$$p_\nu = \int d^3\vec{x} T_{0\nu}$$

est conservée dans le temps.

### Réponses

1.  $\delta\mathcal{L} = \varepsilon_\mu \partial^\mu \mathcal{L} = \varepsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \partial^\mu\psi + \varepsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu\psi)} \partial^\mu\partial^\nu\psi$ .

On utilise les équations de Lagrange :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mu \partial^\mu \mathcal{L} &= \varepsilon_\mu \partial^\nu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu\psi)} \right) \partial^\mu\psi + \varepsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu\psi)} \partial^\mu\partial^\nu\psi \\ &= \varepsilon_\mu \partial^\nu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu\psi)} \partial^\mu\psi \right], \end{aligned}$$



2. De l'égalité précédente il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_\mu \left\{ \partial^\nu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu \psi)} \partial^\mu \psi \right] - \partial^\mu \mathcal{L} \right\} \\ &= \varepsilon_\nu \partial^\mu \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} \partial^\nu \psi \right] - \eta_{\mu}{}^\nu \mathcal{L} \right\}. \end{aligned}$$

Cette égalité est vraie quel que soit  $\varepsilon_\nu$  donc :

$$\begin{aligned} \partial^\mu \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} \partial^\nu \psi \right] - \eta_{\mu}{}^\nu \mathcal{L} \right\} &= 0 \Leftrightarrow \\ \partial^\mu \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi \right] - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} &= 0. \end{aligned}$$

3. Alors :

$$\frac{d}{dt} \int d^3x T_{0\nu} = \int d^3x \partial^0 T_{0\nu} = - \int d^3x \sum_{j=1}^3 (\partial^j T_{j\nu}) = 0$$

par le théorème de la divergence. Noter que la dérivée totale par rapport à  $t$  peut être transformée en dérivée partielle car l'intégrale ne dépend que de  $t$ .

## 5.h Théorème de Noether

On considère une densité de lagrangien  $\mathcal{L}(\dots, \psi_i, \partial_\mu \psi_i, \dots)$  dépendant de  $N$  champs  $\psi_i$ . On considère par ailleurs un groupe de transformations du système dépendant d'un paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$  (groupe de Lie) :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = g(x^\mu, \alpha) ; \psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x') = G_i(\psi_j(x), \alpha).$$

On dit que le groupe est un groupe de symétrie du système si pour tout domaine d'intégration  $\Omega$ , l'action reste invariante sous l'action d'un élément du groupe :

$$\int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\mu \psi_i) = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(\psi'_i, \partial'_\mu \psi'_i).$$

On choisit la paramétrisation des transformations de sorte que pour  $\alpha = 0$  la transformation soit l'identité, et l'on considère une transformation infinitésimale. On écrit au premier ordre :

$$x'^\mu = x^\mu - \alpha f^\mu(x) ; \psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x') = \psi_i(x) + \alpha C_i(x).$$

Dans toute la suite, on se limitera au premier ordre en  $\alpha$ .

1. Calculer  $\partial_\nu x'^\mu$  et  $\partial'_\mu x^\nu$ .

2. Calculer  $\partial'_\mu (\psi'_i (x'))$ .
3. Montrer que le jacobien de la transformation  $x \rightarrow x'$  vaut :

$$J = 1 - \alpha \partial_\mu f^\mu (x).$$

4. En déduire que la variation de l'action s'écrit :

$$S' - S = \alpha \int_\Omega d^4x \partial_\mu \Theta^\mu,$$

avec

$$\Theta^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} [C_i(x) + \partial_\nu \psi_i(x) f^\nu(x)] - f^\mu(x) \mathcal{L}.$$

5. En déduire une quantité conservée au cours du temps, en supposant que les champs s'annulent à l'infini.
6. Application 1 : opérateur quantité de mouvement.  
Le lagrangien de Dirac est invariant par translation. En déduire l'opérateur quantité de mouvement.
7. Application 2 : moment cinétique.  
Le lagrangien de Dirac est invariant par rotation. On considère une rotation infinitésimale d'angle  $\theta$  autour de l'axe 3 ( $Oz$ ).

- (a) Exprimer les transformations

$$x \rightarrow x', \psi \rightarrow \psi' \text{ et } \psi^\dagger \rightarrow \psi'^\dagger$$

au premier ordre en  $\theta$ .

On rappelle que pour une transformation de Lorentz propre orthochrone  $\Lambda : \psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x)$  où  $S(\Lambda) = I_4 - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$ , pour  $\omega_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$  infinitésimal et  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ .

On posera :  $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ .

- (b) En déduire l'expression de la composante  $z$  du moment cinétique total.

## Réponses

1.  $\partial x'^\mu / \partial x^\nu = \delta^\mu_\nu - \alpha \partial_\nu f^\mu(x) \Rightarrow \partial x^\nu / \partial x'^\mu = \delta^\mu_\nu + \alpha \partial_\nu f^\mu(x)$ .
- 2.

$$\begin{aligned} \partial'_\mu (\psi'_i (x')) &= \partial_\nu (\psi_i (x)) \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \\ &= (\partial_\nu \psi_i(x) + \alpha \partial_\nu C_i(x)) (\delta^\nu_\mu + \alpha \partial_\mu f^\nu(x)) \\ &= \partial_\mu \psi_i(x) + \alpha \partial_\mu C_i(x) + \alpha \partial_\nu \psi_i(x) \partial_\mu f^\nu(x). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} J &= \det([\partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu}]) = \exp(\text{Tr}(\ln[\delta^{\mu}_{\nu} - \alpha \partial_{\nu} f^{\mu}(x)])) \\ &= \exp(\text{Tr}([-\alpha \partial_{\nu} f^{\mu}(x)])) = 1 - \alpha \partial_{\mu} f^{\mu}(x). \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} S' - S &= \int d^4x (1 - \alpha \partial_{\mu} f^{\mu}(x)) \times \\ &\left\{ \mathcal{L} + \alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} C_i(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_i)} (\alpha \partial_{\mu} C_i(x) + \alpha \partial_{\nu} \psi_i(x) \partial_{\mu} f^{\nu}(x)) \right\} \\ &\quad - \int d^4x \mathcal{L}. \\ &= \int d^4x \left\{ -\alpha \partial_{\mu} f^{\mu}(x) \mathcal{L} + \alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} C_i(x) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_i)} (\alpha \partial_{\mu} C_i(x) + \alpha \partial_{\nu} \psi_i(x) \partial_{\mu} f^{\nu}(x)) \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant les équations du mouvement on obtient :

$$\begin{aligned} S' - S &= \alpha \int d^4x \left\{ -\partial_{\mu} f^{\mu}(x) \mathcal{L} + \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_i)} \right) C_i(x) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_i)} (\partial_{\mu} C_i(x) + \partial_{\nu} \psi_i(x) \partial_{\mu} f^{\nu}(x)) \right\} \\ &= \alpha \int d^4x \left\{ -\partial_{\mu} f^{\mu}(x) \mathcal{L} + \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_i)} C_i(x) \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_i)} (\partial_{\nu} \psi_i(x) \partial_{\mu} f^{\nu}(x)) \right\} \\ &= \alpha \int d^4x \left\{ f^{\mu}(x) \partial_{\mu} \mathcal{L} + \partial_{\mu} \left( -f^{\mu}(x) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_i)} C_i(x) \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_i)} (\partial_{\nu} \psi_i(x) \partial_{\mu} f^{\nu}(x)) \right\} \\ &= \alpha \int d^4x \left\{ f^{\mu}(x) \partial_{\mu} \mathcal{L} + \partial_{\mu} \left( -f^{\mu}(x) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_i)} C_i(x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_i)} (\partial_{\nu} \psi_i(x) \partial_{\mu} f^{\nu}(x)) \right) - \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi_i)} \partial_{\nu} \psi_i(x) \right) f^{\nu}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \mathcal{L} - \partial_\nu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi_i)} \partial_\mu \psi_i(x) \right\} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} \partial_\mu \psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi_i)} \partial_\mu \partial_\nu \psi_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} \partial_\mu \psi_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi_i)} \partial_\mu \partial_\nu \psi_i = 0. \end{aligned}$$

en utilisant encore une fois l'équation du mouvement.

On injecte cette égalité dans l'expression de  $S' - S$  en utilisant le fait que les indices sont muets, et on obtient la relation demandée.

5. La transformation est une symétrie du système quelle que soit la quantité  $\alpha$  et le domaine  $\Omega$ , donc :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} C_i(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} (\partial_\nu \psi_i(x)) f^\nu(x) \right. \\ \left. - f^\mu(x) \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\nu \psi_i) \right\} = 0. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} j^\mu(x) = \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} C_i(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} (\partial_\nu \psi_i(x)) f^\nu(x) - f^\mu(x) \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\nu \psi_i). \end{aligned}$$

On a l'équation de continuité :  $\partial_\mu j^\mu = 0$  et donc :

$$0 = \int_V (\partial_0 j^0 + \partial_i j^i) d^3x = \int_{\partial V} \vec{d}\sigma \cdot \vec{j} + \frac{d}{dt} \int_V j^0 d^3x.$$

Si on étend l'intégration à tout l'espace  $\mathcal{E}$  il vient :

$$\int_{\partial V} \vec{d}\sigma \cdot \vec{j} = 0$$

et on trouve donc que  $\int_{\mathcal{E}} j^0 d^3x$  est une quantité conservée au cours du temps.

6. On considère la translation spatiale suivant l'axe  $k$  :

$$x'^\mu = x^\mu - \alpha \delta^\mu_k ; \quad \psi'(x') = \psi(x).$$

On a avec les notations précédentes :  $C_i(x) = 0$  ;  $f^\mu(x) = \delta^\mu_k$ .

Avec  $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ , la quantité de mouvement suivant l'axe  $k$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \int d^3x j^0(x) = \\ \int d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_i)} \cancel{C_i(x)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_i)} (\partial_\nu \psi_i(x)) \delta^\nu_k - \cancel{\delta^0_k} \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\nu \psi_i) \right\} = \\ \int d^3x i \psi^\dagger \partial_k \psi. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}x^{0'} &= x^0 \\x^{1'} &= \cos \theta x^1 - \sin \theta x^2 = x^1 - \theta x^2 \\x^{2'} &= \sin \theta x^1 + \cos \theta x^2 = \theta x^1 + x^2\end{aligned}$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu - \eta^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\Lambda_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \theta ([\gamma^1, \gamma^2] - [\gamma^2, \gamma^1]) = -4i\theta \Sigma_3.$$

D'où :

$$S(\Lambda) = \exp \left[ -\frac{i}{4} \frac{i}{2} (-4i\theta) \Sigma_3 \right] = \exp \left[ -\frac{i\theta}{2} \Sigma_3 \right] = 1 - \frac{i\theta}{2} \Sigma_3.$$

Puis :

$$\psi' = \left( 1 - \frac{i\theta}{2} \Sigma_3 \right) \psi ; \psi^{\dagger'} = \psi^\dagger \left( 1 + \frac{i\theta}{2} \Sigma_3^\dagger \right) = \psi^\dagger \left( 1 + \frac{i\theta}{2} \Sigma_3 \right).$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}f^0 &= 0 ; f^1 = x^2 ; f^2 = -x^1 ; f^3 = 0 ; \\C_\psi &= -i \frac{\Sigma_3}{2} ; C_{\psi^\dagger} = i \frac{\Sigma_3}{2}.\end{aligned}$$

La quantité conservée est la composante  $z$  du moment cinétique total :

$$\begin{aligned}J_z &= \int d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \frac{-i}{2} \Sigma_3 \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} (\partial_1 \psi x^2 - \partial_2 \psi x^1) \right\} \\&= \int d^3x \left\{ \psi^\dagger \frac{\Sigma_3}{2} \psi + i \psi^\dagger (\partial_1 \psi x^2 - \partial_2 \psi x^1) \right\} \\&= \int d^3x \left( \psi^\dagger \frac{\Sigma_3}{2} \psi \right) + \int d^3x i \psi^\dagger (\partial_1 \psi x^2 - \partial_2 \psi x^1) \\&= \int d^3x \left\{ \psi^\dagger \frac{\Sigma_3}{2} \psi \right\} + \int d^3x (p_1 x^2 - p_2 x^1) \\&= \int d^3x \left\{ \psi^\dagger \frac{\Sigma_3}{2} \psi \right\} + (\vec{x} \wedge \vec{p})_z.\end{aligned}$$

## 5.i Spin des solutions de l'équation de Dirac

On donne l'expression de l'opérateur projection du spin sur l'axe des  $z$  choisi parallèle à  $\vec{p}$  :

$$S_z = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \psi^\dagger \Sigma_3 \psi \text{ où } \Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $S_z |0\rangle$  puis  $S_z b_{\vec{p},i}^\dagger |0\rangle$  et  $S_z d_{\vec{p},i}^\dagger |0\rangle$  pour chaque valeur de  $i = 1, 2$ .

**Réponses**

Calculons  $S_z$  :

$$S_z = \int d^3 \vec{x} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \times \left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i}^\dagger u_{\vec{p},i}^\dagger \exp(ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i} v_{\vec{p},i}^\dagger \exp(-ip_\mu x^\mu) \right) \right] \times \frac{1}{2} \Sigma_3 \times \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \times \left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{k},i} u_{\vec{k},i} \exp(-ik_\mu x^\mu) + d_{\vec{k},i}^\dagger v_{\vec{k},i} \exp(ik_\mu x^\mu) \right) \right]$$

On a :

$$\Sigma_3 u_{\vec{k},i} = (-1)^{i+1} u_{\vec{k},i} \text{ et } \Sigma_3 v_{\vec{k},i} = (-1)^i v_{\vec{k},i},$$

donc :

$$S_z = \int d^3 \vec{x} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \times \left[ \sum_{i=1}^2 \left( b_{\vec{p},i}^\dagger u_{\vec{p},i}^\dagger \exp(ip_\mu x^\mu) + d_{\vec{p},i} v_{\vec{p},i}^\dagger \exp(-ip_\mu x^\mu) \right) \right] \times \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \times \left[ \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left( b_{\vec{k},i} u_{\vec{k},i} \exp(-ik_\mu x^\mu) - d_{\vec{k},i}^\dagger v_{\vec{k},i} \exp(ik_\mu x^\mu) \right) \right].$$

L'intégrale sur  $\vec{x}$  donne des fonctions  $\delta$  sur les impulsions et un facteur  $(2\pi)^3$  :

$$S_z = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 (2p_0)^2} \times \sum_{i,j=1}^2 (-1)^{j+1} \left[ b_{\vec{p},i}^\dagger u_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},j} u_{\vec{p},j} - d_{\vec{p},i} v_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},j}^\dagger v_{\vec{p},j} - b_{\vec{p},i}^\dagger u_{\vec{p},i}^\dagger d_{-\vec{p},j}^\dagger v_{-\vec{p},j} + d_{\vec{p},i} v_{\vec{p},i}^\dagger b_{-\vec{p},j} u_{-\vec{p},j} \right].$$

Les relations d'orthogonalité sur les spineurs éliminent deux termes et donnent un facteur  $2p_0$  et une fonction  $\delta$  sur les spins :

$$S_z = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left[ b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} - d_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},i} \right].$$

On peut à présent appliquer  $S_z$  aux différents états, en appliquant les relations d'anticommutation :

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left[ b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} + d_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},i} - (2\pi)^3 2p_0 \delta^3(\vec{0}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left[ b_{\vec{p},i}^\dagger b_{\vec{p},i} + d_{\vec{p},i}^\dagger d_{\vec{p},i} \right]. \end{aligned}$$

On obtient alors sans difficulté (les relations de commutation apportent un facteur  $(2\pi)^3$  et une fonction  $\delta$  qui simplifient l'intégrale sur les impulsions, et des termes nuls car  $b_{\vec{q},i}|0\rangle = 0$  et  $d_{\vec{q},i}|0\rangle = 0$ ) :

$$\begin{aligned} S_z(|0\rangle) &= 0 \\ S_z(b_{\vec{q},i}^\dagger|0\rangle) &= (-1)^{i+1} \frac{1}{2} b_{\vec{q},i}^\dagger|0\rangle \\ S_z(d_{\vec{q},i}^\dagger|0\rangle) &= (-1)^{i+1} \frac{1}{2} d_{\vec{q},i}^\dagger|0\rangle. \end{aligned}$$

Grâce aux conventions choisies, l'indice  $i$  repère le même état de spin pour les électrons et les positrons : spin up  $i = 1$  ; spin down  $i = 2$ .