Durée : 2 h.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation : **on justifiera soigneusement les réponses.**

Exercice 1 : Interaction à portée infinie

On considère un ensemble de $N >> 1$ spins en interaction en contact avec un thermostat à la température T et plongés dans un champ magnétique B. La portée de l'interaction entre les spins est infinie, de sorte que chaque spin interagit avec tous les autres. Le hamiltonien du système s'écrit donc :

$$H = -\frac{J}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} s_i s_j - \sum_{i=1}^{N} g\mu B s_i ,$$

où chaque s_i peut prendre les valeurs $+1$ ou -1, $J > 0$, g est une constante, et μ est le magnéton de Bohr.

1) Pourquoi peut-on inclure dans la double somme les termes $i = j$ sans changer les propriétés du système étudié ?
2) On pose $\sum_{i=1}^{N} s_i = S$. Exprimer le hamiltonien comme une somme de termes H_i représentant l'énergie du spin i.
3) On suppose S fixé. En déduire la fonction de partition du système.
4) On définit l'aimantation M du système par :

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{N} g\mu s_i}{V},$$

   où V est le volume du système. Exprimer M de deux façons différentes et en déduire une relation d'auto cohérence sur S.
5) On suppose dans toute la suite $B = 0$. Quelle est l'énergie minimale du système ? Que vaut S à cette énergie ?
6) Que vaut S à la limite $T \to 0$?
7) Que vaut S à la limite $T \to \infty$?
8) Montrer que $S = 0$ est toujours solution de l'équation d'auto cohérence.
9) Montrer qu'il existe une température T_C pour laquelle l'énergie libre est minimale pour $S \neq 0$ si $T < T_C$. Est-ce une transition de phase ?
10) Application numérique : calculer T_C pour $J = 2\ \text{meV}$.

Exercice 2 : Équation de Smoluchowski

Une particule se déplace au hasard sur un axe Ox, en effectuant des pas de longueur Δ séparés par des intervalles de temps τ. La probabilité qu'elle se déplace sur la droite ou sur la gauche dépend de la position de la particule : si la particule se trouve au point d'abscisse $m\Delta$, elle a la probabilité $p = \left(1 - m/N\right)/2$ d'effectuer le pas suivant sur la droite (vers les x positifs) et $q = \left(1 + m/N\right)/2$ de l'effectuer sur la gauche (vers les x négatifs), N étant un entier donné et m un entier relatif compris entre $-N$ et N.

La particule est initialement au point d'abscisse $n_0\Delta$, et on note $P(n,s)$ la probabilité qu'elle soit au point d'abscisse $n\Delta$ au temps $s\tau$, où s est un entier positif.

1) Exprimer $P(n,s)$ en fonction des $P(n',s-1)$.

Passage à la limite continue : on suppose que $\Delta \to 0$, $\tau \to 0$, $N \to \infty$ de telle façon que $\Delta^2/2\tau \to D$ et $N\tau \to 1/\gamma$, où D et γ sont deux constantes non nulles. Soit alors $w(x,t)$ la densité de probabilité pour que la particule se trouve au point d'abscisse $x(=n\Delta)$ à l'instant $t(=s\tau)$ si elle est partie du point $x_0(=n_0\Delta)$ à l'instant $t=0$.

2) Montrer que w vérifie l'équation de Smoluchowski :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = B\frac{\partial(xw)}{\partial x} + C\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

et on déterminera les coefficients B et C.

3) En déduire les équations d'évolution pour les valeurs moyennes de $x(t)$ (notée $\overline{x}(t)$) et $x^2(t)$ (notée $\overline{x^2}(t)$). On supposera que $w(x,t)$ et ses dérivées tendent vers 0 à l'infini, ainsi que leur produit par toute fonction puissance de x.

4) Que valent $\overline{x}(t=0)$ et $\overline{x^2}(t=0)$?

5) Calculer $\overline{x}(t)$ et l'écart quadratique moyen $\Delta x(t) = \sqrt{\overline{x^2}(t) - \overline{x}(t)^2}$.

Remarque finale : on peut montrer que la distribution gaussienne

$$w_G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\Delta x(t)}\exp\left[-\frac{\left(x-\overline{x}(t)\right)^2}{2\Delta x(t)^2}\right]$$

vérifie l'équation de Smoluchowski.