Entropie statistique et fonction de distribution à une particule

On justifie ici l'expression de l'entropie statistique donnée dans le cours :

$$S(t) = -k\int f \ln f\, d^3r\, d^3p$$

On considère un gaz dilué de N particules indiscernables.
Soit $w\left(\left(\vec{r},\vec{p}\right)^N, t\right)d^{3N}r\, d^{3N}p$ la probabilité de trouver les N particules avec les coordonnées $\left(\left(\vec{r_1},\vec{p_1}\right),\ldots,\left(\vec{r_N},\vec{p_N}\right)\right)$dans l'espace des phases à $d^3r_1, d^3p_1,\ldots,d^3r_N, d^3p_N$ près.
Les particules sont indiscernables, la normalisation de w s'écrit donc : $\frac{1}{N!}\int w\, d^{3N}r\, d^{3N}p = 1$
Si on néglige les corrélations entre particules, on a :

$$w\left(\left(\vec{r},\vec{p}\right)^N, t\right) = N!\prod_{i=1}^{N} g\left(\vec{r_i},\vec{p_i},t\right)$$

où g est la distribution pour une particule, normalisée à 1 : $\int g\, d^3r\, d^3p = 1$.
L'entropie statistique s'écrit par définition :
$S = -k\sum_\alpha P_\alpha \ln P_\alpha$, où la somme porte sur tous les micro-états.
On passe à la limite continue. Comme les particules sont indiscernables, il faut prendre :
$P_\alpha = \frac{w\, d^{3N}r\, d^{3N}p}{N!}$. D'où :

$$S = -k\int \frac{w}{N!}\ln\left(\frac{w}{N!}h^{3N}N!\right)d^{3N}r\, d^{3N}p = -k\int \prod_j g_j \ln\left(N!h^{3N}\prod_i g_i\right)d^{3N}r\, d^{3N}p$$

La difficulté ici est de passer d'une densité de probabilité w à une probabilité à l'intérieur du logarithme. On a choisi de prendre h^3 comme volume élémentaire par particule, qu'il faut élever à la puissance N et multiplier par $N!$ pour prendre en compte l'échange des N particules indiscernables, mais on aurait aussi pu prendre une fraction de la résolution expérimentale. Comme on va le voir, cela n'a pas de conséquence physique :

$$S = -k\int \prod_j g_j\left(\ln\left(N!h^{3N}\right) + \sum_i \ln g_i\right)d^{3N}r\, d^{3N}p$$

Or : $\int \prod_j g_j \left(\ln g_i\right) d^{3N}r\, d^{3N}p = \underbrace{\int \prod_{j\neq i} g_j\, d^{3(N-1)}r\, d^{3(N-1)}p}_{=1} \times \int g_i \ln g_i\, d^3r_i\, d^3p_i$

D'où : $S = -k\ln\left(h^{3N}\right) - k\sum_i \int g_i \ln g_i\, d^3r_i\, d^3p_i = -k\ln\left(N!h^{3N}\right) - kN\int g\ln g\, d^3r\, d^3p$

Reprenant les notations du cours on pose $f = Ng$ pour avoir $\int f\, d^3r\, d^3p = N$:

$$S = -k\ln\left(N!h^{3N}\right) - k\int f\left(\ln f - \ln N\right)d^3r\, d^3p = -Nk\ln\left(h^3\right) - k\ln N! + kN\ln N - k\int f\ln f\, d^3r\, d^3p$$

Pour N fixé, on obtient donc, à une constante additive près : $S = -k\int f\ln f\, d^3r\, d^3p$ CQFD