

Exercice 1 : *Le ferromagnétisme est-il vraiment magnétique ?*

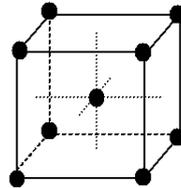
L'énergie d'interaction entre deux moments magnétiques $\vec{\mu}$ et séparés par une distance r est de l'ordre de $E \sim (\mu_0 \mu^2) / (4\pi r^3)$. On admet que dans les systèmes atomiques, l'ordre de grandeur des moments magnétiques atomiques est donné par le magnéton de Bohr :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.3 \times 10^{-24} \text{ Am}^2.$$

- Calculer l'ordre de grandeur de l'énergie d'interaction de deux moments atomiques dans un solide qui résulte de l'expression ci-dessus.
- À quelle température d'excitation typique correspond cette énergie d'interaction ? Que peut-on en déduire sur le mécanisme microscopique à l'origine du ferromagnétisme ?

Exercice 2 : *Réseau cubique centré*

On considère un réseau cubique centré (ci-dessous une maille du réseau) en contact avec un thermostat à la température T .



Chaque site du réseau est occupé par un spin dont la valeur est $+1$ ou -1 . L'interaction entre les spins est donnée par le hamiltonien suivant :

$$H = -J_1 \sum_{\substack{\text{plus} \\ \text{proches} \\ \text{voisins}}} \sigma_i \sigma_j - J_2 \sum_{\substack{\text{seconds} \\ \text{voisins}}} \sigma_k \sigma_l$$

où σ_i est le spin du site i , $J_1 (> 0)$ est l'interaction entre plus proches voisins, $J_2 (> 0)$ est l'interaction entre seconds voisins, et les sommes s'effectuent pour chaque site i sur ses plus proches voisins et ses seconds voisins respectivement.

1. Combien y a-t-il de micro-états d'énergie minimale ? Quel est l'état du système si $T = 0$?
2. Quel est le nombre Z_1 de plus proches voisins d'un site du réseau ? Quel est le nombre Z_2 de seconds voisins d'un site du réseau ? On ne se préoccupera pas des bords du réseau.
3. En utilisant l'approximation du champ moyen, écrire l'hamiltonien sous la forme : $H = -C \sum_i \sigma_i$, où on exprimera C en fonction de J_1 , J_2 , Z_1 , Z_2 et de la valeur moyenne $\bar{\sigma}$ de chaque spin du réseau.
4. Écrire alors la fonction de partition de ce système. On notera N le nombre de sites du réseau.
5. En déduire la relation d'auto cohérence donnant $\bar{\sigma}$.
6. En déduire l'expression de la température critique en fonction de J_1 et J_2 .

Exercice 3 : Modèle de gaz sur réseau

Un modèle discrétisé très utilisé afin de décrire les transitions de phase de premier et de deuxième ordre dans les fluides est le modèle de gaz sur réseau. Comme dans le cas du système d'Ising, on imagine un réseau cartésien aux nœuds duquel des sites peuvent accueillir 0 ou 1 molécule, mais pas plus qu'une pour prendre en compte la notion de volume exclu des liquides. A la différence du modèle d'Ising, un site peut être vide. L'hamiltonien d'interaction s'écrit : $H = -J \sum_{ppv} n_i n_j$,

où la somme est effectuée sur les plus proches voisins, ce qui constitue une approximation, mais qui assez bien justifiée par le fait que les forces de van der Waals entre molécules d'un fluide décroissent rapidement avec la distance. Dans ce modèle, le nombre de molécules est supposé fixé et différent du nombre de sites du réseau, ce qui complique de façon importante toute simulation. On contourne ce problème en supposant que le système est en contact avec un réservoir et en laissant le nombre de molécules varier autour d'une valeur moyenne déterminée par le terme de potentiel chimique : $H = -J \sum_{ppv} n_i n_j + \mu \sum_{i=1}^N n_i$.

Ce terme fait "payer" un prix pour chaque molécule incorporée au système et régule le nombre de molécules dans le système. Montrer que le changement de variable défini par $s_i = 2n_i - 1$ permet d'assimiler le modèle de gaz sur réseau à un système d'Ising où tous les sites sont occupés et en interaction avec un champ magnétique extérieur que l'on exprimera en fonction de J et de μ .

Exercice 4 : Températures négatives

Un ensemble de N spins $\frac{1}{2}$ localisés sur un réseau cristallin en interaction avec un champ magnétique B dirigé suivant l'axe z , et supposés sans interaction entre eux (paramagnétisme), ont pour hamiltonien d'interaction :

$$H = -2\mu \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot \vec{B} = -2\mu B \sum_{i=1}^N S_{iz}$$

1. Quelle est l'énergie minimale du système et son entropie à cette énergie ?
2. Même question pour l'énergie maximale.

On met le système en contact avec un thermostat.

3. Quelle est l'énergie du système à température infinie ?
4. Calculer la fonction de partition du système et son énergie libre.
5. En déduire l'énergie du système en fonction de la température. À quel domaine de température correspond l'ensemble des états d'énergie positive ?
6. Si on met un système à la température T_1 en contact avec un système à la température T_2 , on définit le système le plus chaud comme celui qui cède de l'énergie à l'autre. Classifier, avec ce critère, de la température la plus faible à la plus forte, les températures suivantes : -2 K, 1 K, 100 K, 10^9 K, -10^9 K.
7. Question subsidiaire : on a vu ici la notion de température négative. Pensez-vous qu'il soit également possible qu'un système présente une pression négative ?