QUI VEUT GAGNER DES

$\mathcal{E}_i$ Z

BOSONS ET DES FERMIONS

$\chi(T)$

QUI VEUT GAGNER DES

SEANCE 4 : 8 FEVRIER 2022

Qu'est ce que l'énergie de Fermi d'un gaz parfait de fermions ?

1 : Son potentiel chimique à température nulle ✓

2 : L'origine de la puissance légendaire de Thor fils d'Odin

3 : L'énergie moyenne de ces fermions

4 : Son potentiel chimique à température ambiante

o ***Question 1 :*** Qu'est ce que l'énergie de Fermi d'un gaz parfait de fermions ?
Réponse : Son potentiel chimique à T = 0 K.

A température nulle, tous les fermions sont dans le plus bas niveau d'énergie accessible. Comme on ne peut pas en mettre plus d'un par état (modulo leur dégénérescence interne), ils s'empilent dans l'espace des énergies sans laisser une seule case vide.

L'énergie maximum atteinte par le fermion possédant, à T=0K, la plus grande énergie est appelée l'énergie de Fermi. C'est donc une constante caractéristique pour un gaz parfait de fermions donné.

A l'équilibre la distribution des fermions s'écrit $n_i^{\mathrm{e}} = \dfrac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$. Sur cette relation on voit que le potentiel chimique μ qui dépend notamment de la température, correspond à cette énergie maximale. En effet, si $T \to 0$ K alors $\beta \to \infty$ ainsi :

- Si $\varepsilon_i - \mu(0) > 0$ alors $\dfrac{n_i}{g_i} \to 0$
- Si $\varepsilon_i - \mu(0) < 0$ alors $\dfrac{n_i}{g_i} \to 1$

L'énergie $\mu(0)$ est donc bien la plus grande valeur possible pour ε_i lorsque $T \to 0$. C'est l'énergie de Fermi.

Quelle est l'interprétation statistique de $g(p)dp = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp$?

1: La variation d'énergie interne du gaz lors d'une transformation adiabatique

2: Le nombre de particules dont l'impulsion est dans un angle solide donné

3: Le nombre de particules dans le volume V telles que $|\vec{p}| \in [p, p + dp]$ ✔

4: Libérée, Délivrée, je ne mentirai plus jamais !

o ***Question 2*** Quelle est l'interprétation statistique de $g(p)dp = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp$?

Réponse : Le nombre de particules dans le volume V ***telles que*** $|\vec{p}| \in [p, p + dp]$

Le dénombrement des cellules accessibles aux particules $\sum_i g_i$ est approximé par l'intégrale

Le nombre g_i correspond au nombre de cellules accessibles aux particules possédant l'énergie ε_i. Dans la limite continue ce nombre devient une densité $g(\varepsilon)d\varepsilon$, correspondant au nombre de particules comprise dans le volume V d'étude et possédant une énergie $\varepsilon \in [\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$. Pour un gaz parfait, l'énergie ε ne dépend que du module p de l'impulsion $\vec{p}$ de chaque particule, on a donc $g(\varepsilon)d\varepsilon = g(p)dp$. Ainsi

$$\int \frac{d^3\vec{r} d^3\vec{p}}{h^3} = \frac{1}{h^3} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{p} = \frac{V}{h^3} \int 4\pi p^2 dp$$

Et sous l'intégrale on peut identifier la densité d'états d'impulsion $g(p)dp = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp$

Quelle est l'entropie limite d'un gaz parfait à $T = 0\ \mathrm{K}$

1: $0\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$

2: $-\infty$ car $k_B \ln(0) \to -\infty$

3: $+\infty$ car $\propto \frac{1}{2}\hbar\omega \times \frac{1}{T}$

4: $k_B \approx 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$

o ***Question 3*** Quelle est l’entropie limite d’un gaz parfait

Réponse : 0 joule par kelvin.

- A température nulle les bosons d’un gaz parfait se regroupent tous dans la même cellule (niveau fondamental).

  Il n’existe qu’une seule façon de réaliser cet état car les bosons sont indiscernables ainsi

$$W_{\mathrm{bos}} = 1 \text{ et donc } W_{\mathrm{bos}} = k_B \ln(W_{\mathrm{bos}}) = 0.$$

- A température nulle les fermions d’un gaz parfait se mettent dans l’état d’énergie minimale disponible. Ils s’empilent dans l’espace des énergies jusqu’à une énergie maximale qui dépend de la densité de fermions présents. Comme pour les bosons, il n’existe qu’une façon de réaliser cet état compte tenu de l’indiscernabilité des fermions ainsi

$$W_{\mathrm{fer}} = 1 \text{ et donc } W_{\mathrm{fer}} = k_B \ln(W_{\mathrm{fer}}) = 0.$$

Qu’est ce qu’un condensat de Bose ?

1 : L’état de l’ensemble des spectateurs lors d’un concert des Sex Pistols avec Aya Nakamura en première partie

2 : Un état macroscopique de bosons caractérisé par sa grande température de Fermi

3 : Un état quantique de la matière apparent au niveau macroscopique ✓

4 : Un état non dégénéré de la matière caractéristique des fermions

o ***Question 4*** Qu'est ce qu'un condensat de Bose-Einstein ?

Réponse : Un état quantique de la matière apparent au niveau macroscopique

- Toutes les autres réponses sont débiles à l'exception de la réponse 1 qui n'a rien à voir avec le contexte !

- En appliquant le résultat de la statistique de Bose-Einstein pour un gaz parfait de N bosons (donc composé de particules indiscernables)

$$n_i = \frac{g_i}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] - 1}$$

lorsque la température tend vers 0 (et donc $\beta \to +\infty$) on constate que, s'il existe, l'état d'énergie

$$\varepsilon_0 = \min_i \{\varepsilon_i, \varepsilon_i > \mu\}$$

doit contenir les N bosons qui forment le gaz. Tous ces bosons identiques sont dans le même état quantique.

Si N est suffisament grand, cet état quantique peut devenir apparent au niveau macroscopique, il forme alors un condensat de Bose-Einstein. Ces propriétés quantiques qui émergent macroscopiquement peuvent alors être utilisées pour diverses applications : superfluidité, supraconductivité, calcul quantique, …

QUI VEUT GAGNER DES

$\mathcal{E}_i$ Z

BOSONS
ET DES
FERMIONS

$\chi(T)$

QUI VEUT GAGNER DES

LA PROCHAINE FOIS C'EST A VOUS DE JOUER