#### Examen du cours PA102 - 3 Février 2019

#### Aucun document n'est autorisé

Durée 3h00

### La matière du marteau de THOR



Selon une légende populaire tenace, le célèbre marteau appelé Mjölnir du non moins célèbre super héros Thor aurait été forgé dans le matériau tiré du cœur d'un cadavre d'étoile.

Il existe trois types de cadavres stellaires recensés par la physique. Même si le père de Thor n'est autre que le dieu Odin, il semble insensé que l'on puisse construire un marteau avec un trou noir ou une étoile à neutron, l'arme en question serait trop dangereuse même pour Thor qui a l'apparence d'un homme certes musclé mais quand même... La seule possibilité restante est donc que le Mjölnir soit fait de la matière constituant le cœur d'une naine blanche.

Afin d'en comprendre les propriétés, nous allons dans ce sujet étudier un cas particulier représentatif de ce type d'astre : l'étoile Lawd 21. Nous vous laisserons conclure quant à la possibilité de forger un tel marteau, fût-on d'origine divine!

Les trois parties de cet examen reprennent la majeure partie des problématiques traitées en cours. Elles sont largement indépendantes. Les données nécessaires aux applications numériques sont rassemblées en fin d'énoncé.

L'objet Lawd 21 est la 21<sup>ème</sup> étoile du "Luyten Atlas of White Dwarfs" instauré dès le milieu du XX<sup>ème</sup> siècle par l'astronome hollandais Willem Jacob Luyten.

Elle est située dans la constellation boréale d'Orion. Très peu lumineuse dans le visible, son spectre est essentiellement situé dans l'Ultra-Violet lointain. Cette partie du spectre lumineux n'est pas accessible depuis la surface de la Terre, c'est le satellite Fuse (Far Ultraviolet Spectroscopic Explorer) qui a permis d'obtenir le spectre de la figure ci-dessous.

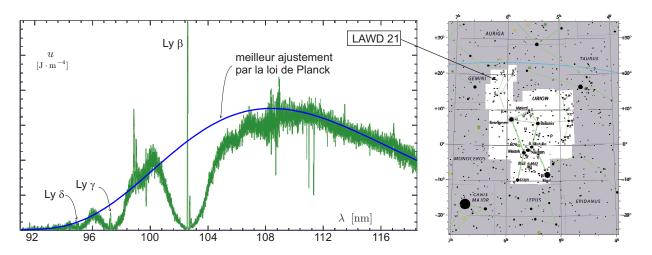


FIGURE 1 – Le spectre est sur la partie gauche avec le meilleur ajustement posible par une loi de Planck. Sur la partie droite de la figure on trouve la position dans le ciel de cette étoile. Ce spectre a été tracé en utilisant les données du satellite FUSE disponibles sur le site http://archive.stsci.edu/fuse/

Ce spectre est composite. Il contient des composantes discrètes principalement les raies de la série de Lyman en absorption (larges) et en émission (très fines), ces raies sont issues de l'atmosphère de cette étoile en grande partie constituée d'hydrogène. Le spectre montre aussi une forte composante continue bien ajustée par une loi de Planck. Cette composante continue correspond à l'émission de corps noir issue de la surface de cette étoile.

# A – Analyse du spectre de l'étoile

**Question 1** Vérifiez que la partie discrète du spectre correspond bien à la série de Lyman de l'hydrogène (transitions de niveaux excités vers le niveau fondamental n = 1 de l'hydrogène).

On modélise un corps noir par un gaz parfait de photons de potentiel chimique nul car leur nombre n'est pas conservé et dont l'énergie totale E est conservée.

Question 2 Déterminer, à l'équilibre, le nombre  $n_i$  de photons possédant l'énergie  $\varepsilon_i$ . On admettra que  $\beta = (kT)^{-1}$ .

Question 3 Montrer que, dans la limite continue et à l'équilibre, l'énergie totale du gaz de photon sous la forme d'une intégrale de la forme  $E = V \int_0^{+\infty} u(\lambda) d\lambda$  où V est le volume occupé et  $u(\lambda) = \frac{A}{\lambda^5} \left(e^{\frac{B}{\lambda}} - 1\right)^{-1}$  est la densité volumique spectrale d'énergie. On exprimera les constantes A et B en fonction de h, c et  $\beta$ . On rappelle que pour un photon d'énergie  $\varepsilon$ , d'impulsion p et de longueur d'onde  $\lambda$  on a  $\varepsilon = pc = hc/\lambda$ .

Question 4 L'expression de  $u(\lambda)$  constitue la loi de Planck. On pose  $x = B/\lambda$  et on admet que l'équation  $1 - e^{-x} - \frac{1}{5}x = 0$  admet une unique solution  $x \simeq 5$ . Déterminer la relation entre la température et la longueur d'onde  $\lambda_{\max}$  pour laquelle u est maximale. Cette relation constitue la loi du déplacement de Wien. En déduire la température de la surface de l'étoile Lawd 21.

# B – Le rayon de l'étoile

On suppose que cette étoile est sphérique de rayon R, de masse M et que la répartition de cette masse est uniforme dans cette sphère. On peut mesurer sa masse par des techniques indépendantes et l'on trouve  $M=0,5~M_{\odot}$ .

En première approximation on peut considérer que la masse totale de l'étoile lui est conférée par des atomes de carbone 12 dont le noyau est constitué de 6 protons et 6 neutrons. L'énergie d'ionisation de cet atome est de l'ordre de  $E_{i,1} = 11, 2 \,\text{eV}$  pour le  $1^{er}$  électron électron et de  $E_{i,6} = 0, 5 \,\text{keV}$  pour le  $6^{\grave{e}me}$ .

En simplifiant, nous allons considérer que cette étoile est constituée par un solide sphérique formé par un réseau cristallin de noyaux de carbone renfermant un gaz d'électrons libres, l'étoile étant globalement neutre. On suppose que ces noyaux de carbone sont tous complètement ionisés.

Dans le cadre de ce modèle nous allons déterminer le rayon de l'étoile en supposant qu'elle est en équilibre entre la pression de dégénérescence des électrons et la pression imposée par sa masse.

Question 5 Compte-tenu des résultats de la question 4, pourquoi peut-on tout de même raisonablement faire l'hypothèse que tous les atomes de carbone composant l'étoile sont totalement ionisés? Déterminer le nombre de  $N_n$  de noyaux de carbone et le nombre  $N_e$  d'électrons contenus dans cette étoile.

Question 6 Les électrons sont des fermions qui suivent la statistique de Fermi-Dirac. Rappeler l'expression du nombre  $n_i$  de fermions de potentiel chimique  $\mu(T)$  qui à l'équilibre à la température T, occupent le niveau d'énergie  $\varepsilon_i$  de dégénérescence  $g_i$ 

Question 7 On rappelle que l'énergie de Fermi correspond à la valeur du potentiel chimique à la température nulle :  $\varepsilon_F = \mu (T=0)$ . Tracer la fonction de Fermi  $f(\varepsilon_i) = \frac{n_i}{g_i}$  à température nulle. Comment s'interprète cette fonction en terme probabiliste?

On rappelle que la densité continue d'états d'impulsion des électrons dans l'espace des phases s'écrit

$$g(p) dp = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp$$

Question 8 On suppose les électrons libres et non relativistes. Leur impulsion p et leur énergie  $\varepsilon$  sont donc reliées par la relation  $\varepsilon = \frac{p^2}{2m_e}$ . Dans la limite continue, exprimer à l'équilibre et à température nulle l'impulsion de Fermi d'un électron dans la naine blanche en fonction de  $N_e$ , V et  $\hbar$ . En déduire leur énergie de Fermi et leur température de Fermi  $T_F$  en fonction de M,  $m_p$ ,  $m_e$   $\hbar$ ,  $k_B$  et R.

Question 9 Par des mesures de luminosité, on peut se convaincre que l'ordre de grandeur du rayon de cette étoile est celui de la Terre. Justifier que l'on puisse traiter le gaz d'électron libre contenu dans la naine blanche comme étant à température nulle.

Question 10 Toujours à température nulle et dans la limite continue, déterminer l'énergie interne  $U_e$  totale du gaz d'électron libre à l'équilibre notamment en fonction de V. En déduire sa pression en fonction de  $m_e$ ,  $m_p$ , M,  $\hbar$  et R

Question 11 Comment peut-on, dans ce modèle classique, déduire le rayon de l'étoile (toujours assimilée à une sphère homogène et donc d'énergie potentielle  $E_p=-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$ ) du calcul de pression que nous venons d'effectuer? Calculer ce rayon.

### C - L'intérieur de l'étoile

La répulsion électrostatique entre les noyaux de carbone peut être assez forte pour les contraindre à se placer au voisinage d'un nœud d'un réseau que nous supposerons cubique de coté a. Ce nœud est le site de chaque noyau. Chaque site est donc au centre d'une petite cellule cubique de coté a. L'ensemble forme donc a priori un solide de type cristallin. Dans un modèle simple mais effectif, ce solide fond quand l'amplitude quadratique moyenne  $\langle s^2 \rangle$  du mouvement d'agitation des noyaux autour de leur site dépasse  $\gamma^2 a^2$ , nous adopterons  $\gamma = 0, 1$ .

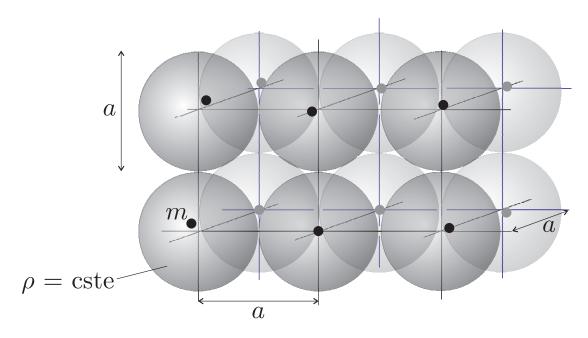


FIGURE 2 – Représentation schématique des cellules de Wigner-Seitz dans lesquelles la densité de charge est uniforme. Pour des raisons de clarté de la figure nous avons réduit leur rayon de a à a/2.

Le mouvement d'un noyau autour de son site est sous le contrôle du champ électrique dans ce voisinage. Dans ce type de solide les électrons sont totalement délocalisés dans le solide et sont assimilables à un fluide de densité constante tandis que les noyaux sont agités de petits mouvements autour de leurs sites. Dans le modèle de Wigner-Seitz on représente une cellule élémentaire par une sphère de rayon a dont la densité volumique de charge est constante et égale à  $\rho = 6e/a^3$ , centrée sur le site repéré par le point O et dans laquelle se trouve le noyau de masse  $m = 12m_p$  repéré par un vecteur  $\vec{r}$ .

Question 12 Montrer que le champ électrique ressenti par le noyau dans sa cellule de Wigner-Seitz s'écrit  $\vec{\mathcal{E}} = -\frac{2e}{\varepsilon_0 a^3} \vec{r}$ . On pourra éventuellement utiliser le théorème de Gauss. On suppose que la seule force subie par le noyau est la force électrostatique de Coulomb. En déduire que le mouvement du noyau celui d'un oscillateur harmonique tridimensionnel dont on précisera la pulsation  $\omega$  en fonction de e,  $\varepsilon_0$ , a et  $m_p$ .

Question 13 Montrer que l'énergie moyenne temporelle  $\overline{E}$  d'un oscillateur harmonique classique monodimensionnel de pulsation  $\omega$  et de masse m s'écrit  $\overline{E} = \frac{1}{2}m\omega^2 s^2$  où s représente l'amplitude des oscillations.

Dans ce modèle chaque noyau sur son site est associé à 3 oscillations a priori indépendantes et de même pulsation  $\omega$ . Pour obtenir l'énergie de chacun de ces oscillateurs, on préfère utiliser un modèle quantique qui fournit  $\varepsilon_i = (i + \frac{1}{2}) \hbar \omega$  avec  $i \in \mathbb{N}$  sans dégénérescence :  $g_i = 1$ .

L'ensemble des noyaux de carbone formant cette étoile peut donc être assimilé à un système composé de  $3N_n$  oscillateurs harmoniques monodimensionels dont l'énergie totale  $U_n$  est conservée <sup>1</sup>.

<sup>1.</sup> Ce modèle est équivalent à celui qui considère rait N oscillateurs trimensionels.

Ces  $3N_n$  oscillateurs haromniques monodimensionnels peuvent être, en première approximation, traités dans le cadre de la statistique de Mawxell-Boltzmann, c'est le fameux modèle d'Einstein pour un solide. A l'équilibre le nombre  $n_i$  d'oscillateurs possédant l'énergie  $\varepsilon_i$  est donnée par la relation

$$n_i = \frac{3N_n}{Z}g_i \exp\left(-\beta \varepsilon_i\right) .$$

La constante  $\beta$  est liée à la conservation de l'énergie  $U_n$ , elle définit la température d'équilibre T du solide par la relation  $\beta = (k_B T)^{-1}$ .

Question 14 En écrivant la conservation du nombre d'oscillateurs, exprimer la fonction de partition Z de ce solide sous la forme d'une série. En sommant cette série, exprimer Z en fonction de  $\beta$ ,  $\hbar$  et  $\omega$ .

On note  $U_n$  l'énergie totale des  $3N_n$  oscillateurs harmoniques donnée par le modèle d'Einstein appliqué au solide formant cette étoile. En généralisant le résultat obtenu à la **question 13**, une hypothèse de type ergodique permet d'obtenir l'écart quadratique moyen de l'ensemble de tous les oscillateurs à partir de la relation

 $\langle \overline{E} \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 \langle s^2 \rangle = \frac{U_n}{3N_n}.$ 

Question 15 Après avoir déterminé  $U_n$  en fonction d'une dérivée de  $\ln Z$ , exprimer  $\langle s^2 \rangle$  en fonction de  $\hbar$ ,  $m_p$ ,  $\omega$  et  $\beta$ . En déduire une condition sur la température pour que l'intérieur de l'étoile soit solide. On écrira cette condition sous la forme  $\tanh\left(\frac{\theta}{T}\right) \geq \xi$  où l'on exprimera d'une part le paramètre  $\theta$ , homogène à une température, en fonction de  $\hbar$ ,  $k_B$  et  $\omega$  et d'autre part la constante sans dimension  $\xi$  en fonction de  $\hbar$ , e,  $\gamma$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $m_p$  et a.

Dans ce modèle, la meilleure approximation microscopique du volume V l'étoile s'obtient en l'identifiant au volume des  $N_n$  cellules de Wigner-Seitz, soit  $V = \frac{4}{3}N_n\pi a^3$ , la masse de l'étoile est celle des  $N_n$  noyaux de carbone.

Question 16 Exprimer  $\theta$  en fonction de la masse volumique  $\rho_*$  supposée uniforme de l'étoile. Après avoir calculé la valeur numérique de  $\theta$  et de  $\xi$  pour Lawd 21, discuter de la solidité de l'intérieur de l'étoile.

# Données numériques

Constante de Planck :  $h = 6,63 \times 10^{-34} \,\mathrm{J\cdot s}$ 

Constante de Planck réduite :  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,06 \times 10^{-34} \,\mathrm{J\cdot s}$ 

Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ 

Constante de Newton :  $G = 6,67 \times 10^{-11} \,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ 

Permittivité diélectrique du vide :  $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \, \mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ 

Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 2,99 \times 10^8 \,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 

Masse du proton et masse du neutron :  $m_p = m_n = 1,67 \times 10^{-27} \, \mathrm{kg}$ 

Masse de l'électron :  $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \,\mathrm{kg}$ 

Charge de l'électron :  $e = 1,60 \times 10^{-19} \,\mathrm{C}$ 

Masse du Soleil :  $M_{\odot} = 2,00 \times 10^{30} \,\mathrm{kg}$ 

Rayon du Soleil :  $R_{\odot} = 1,96 \times 10^8 \,\mathrm{m}$ 

Rayon de la Terre :  $R_{\oplus} = 6,40 \times 10^6 \,\mathrm{m}$