Examen du cours PA102 - Mars 2017

Aucun document n'est autorisé

Durée 2h30

Le paramagnétisme

Le paramagnétisme désigne le comportement d'un milieu matériel qui ne possède pas d'aimantation spontanée mais qui, sous l'effet d'un champ magnétique extérieur $\vec{B}$, acquiert une aimantation $\vec{M}$ dirigée dans le même sens que ce champ d'excitation. Un matériau paramagnétique possède donc une susceptibilité magnétique χ de valeur positive. Plus précisément, pour un échantillon de ce matériau de volume V, la susceptibilité est définie par $\chi = \frac{\sigma_0 |\vec{M}|}{V|\vec{B}|}$.

Nous proposons dans ce problème de modéliser ce phénomène macroscopique par des propriétés microscopiques de ce matériau traitées en physique statistique. Cette idée a été introduite par Paul Langevin vers 1910, reprise par Wolfgang Pauli en 1927, et adaptée à différents types de matériaux durant tout le XX^e siècle.

Partie I - Modèle semi-classique de Langevin

On considère un échantillon de métal tel que du sodium, de volume $V = a \times b \times c$ et de température T. On considère que les N électrons de conduction contenus dans cet échantillon sont des particules libres astreintes à rester dans le volume de l'échantillon. Les niveaux d'énergie accessibles à ces électrons sont donnés par la relation

$$\frac{p_i^2}{2m} = \varepsilon_i = \varepsilon_{n_1,n_2,n_3} = \frac{h^2}{8m}\left[\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}\right] \tag{1}$$

où n_1, n_2 et n_3 sont des entiers positifs non nuls. Chaque triplet (n_1, n_2, n_3) définit un état d'énergie non dégénéré : $g_i = g_{n_1,n_2,n_3} = 1$. Pour le sodium, la densité particulaire des électrons de conduction libres est $n_c = 2,5 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$ à température ambiante.

1. Expliquer succinctement l'origine de la relation (1) et des propriétés afférentes.

On suppose dans cette partie que ces électrons, dont le nombre total N et l'énergie totale E sont conservés, obéissent à la statistique de Maxwell-Boltzmann : la distribution du nombre de particules n_i ayant, à l'équilibre, l'énergie ε_i est donnée par $n_i = C g_i \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}$.

2. Exprimer C en fonction de N et d'une somme appelée fonction de partition de translation et notée Z_t. En faisant l'hypothèse que la répartition des niveaux d'énergie est continue on peut remplacer cette somme par une intégrale, déterminer sous cette hypothèse l'expression simplifiée de C en fonction de n_c, m, β et h. On rappelle que $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$. Calculer la valeur numérique de C pour un échantillon de sodium à température ambiante.

L'échantillon de sodium est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ dirigé suivant un axe qui sera pris comme axe $(O, \widehat{u}_z)$. L'électron possède un moment magnétique $\vec{\sigma}$ proportionnel à son spin. La projection de $\vec{\sigma}$ sur $(O, \widehat{u}_z)$ ne peut prendre que deux valeurs $+\sigma$ et $-\sigma$, la constante $\sigma = \frac{eh}{4\pi m}$ est appelée magnéton de Bohr et e désigne la charge élémentaire. L'interaction de l'électron avec ce champ magnétique se traduit par une énergie supplémentaire $-\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ qui s'ajoute à son énergie cinétique de translation. L'énergie totale d'un électron sera donc $\varepsilon_i^{\rightarrow} = \frac{p_i^2}{2m} - \sigma B$ si $\vec{\sigma}$ est parallèle à $\vec{B}$ ou bien $\varepsilon_i^{\leftarrow} = \frac{p_i^2}{2m} + \sigma B$ si $\vec{\sigma}$ est antiparallèle à $\vec{B}$. Dans ce modèle on suppose que l'aimantation totale de l'échantillon M est la somme des projections de chaque moment magnétique de chaque électron selon $(O, \widehat{u}_z)$: chaque $\vec{\sigma}$ parallèle contribue pour $+\sigma$ à l'aimantation totale et chaque $\vec{\sigma}$ antiparallèle contribue pour $-\sigma$.

3. Toujours dans le cadre de la statistique de Maxwell-Boltzmann, on a maintenant $n_i^{\rightleftharpoons} = C^m g_i \mathrm{e}^{-\beta\left(\frac{p_i^2}{2m} \pm \sigma B\right)}$ déterminer l'expression simplifiée du nouveau paramètre C^m qui apparaît dans la nouvelle distribution d'énergie d'équilibre. On écrira C^m en fonction de N, Z_t et d'une fonction de partition magnétique Z_m qui ne dépend que de β, σ et B à travers une fonction de trigonométrie hyperbolique.

4. Déterminer l'expression de M dans ce modèle et pour cette statistique. Tracer la fonction $f(x) = \frac{M}{N\sigma}$ de la variable $x = \frac{\sigma B}{k_B T}$.
5. Déterminer dans la gamme de la température ambiante et dans le régime des champs magnétiques faibles, l'expression de la susceptibilité magnétique χ^{mb} électronique dans la statistique de Maxwell-Boltzmann. Une compilation de mesures expérimentales de la susceptibilité magnétique est représentée sur la figure 1. Le résultat théorique est-il compatible avec les expériences ?
6. Les électrons étant des fermions on peut les modéliser dans le cadre de la statistique de Fermi-Dirac pour laquelle $n_i = g_i \left[\tilde{C} e^{\beta \varepsilon_i} + 1\right]^{-1}$. Dans quelle limite cette distribution tend-elle vers la distribution de Maxwell-Boltzmann ? Exprimer, dans cette limite, $\tilde{C}$ en fonction de N et Z_t puis calculer sa valeur dans les conditions de l'expérience. Conclure.

Partie II - Modèle quantique de Pauli

On se place dorénavant en statistique de Fermi-Dirac en posant $\tilde{C} = \exp(-\beta\mu)$ où μ est le potentiel chimique des électrons de conduction.

7. En l'absence de champ magnétique l'énergie des électrons de conduction est toujours donnée par $\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$. Combien vaut g_s la dégénérescence interne des électrons ? Déterminer l'expression du rapport n_i/g_i à $T = 0$ en fonction de la valeur de ε_i par rapport à l'énergie de Fermi $\varepsilon_F = \mu\,(T = 0)$. En calculant la valeur de N dans la limite d'une répartition continue des niveaux d'énergie, déterminer l'expression et la valeur numérique de ε_F et de $T_F = \varepsilon_F / k_B$. Que peut-on en conclure ?
8. On considère maintenant l'influence du champ magnétique $\vec{B}$. Que vaut alors g_s ? On note respectivement $n_i^{\rightarrow}$ et $n_i^{\leftarrow}$ les nombres d'électrons de conduction ayant à l'équilibre une énergie cinétique $\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$ et une projection de leur moment magnétique $\vec{\sigma}$ sur $(O, \widehat{u}_z)$ parallèle($\rightarrow$) ou antiparallèle($\leftarrow$) à $\vec{B}$. Représenter à $T = 0$ les fonctions $n_i^{\rightarrow}/g_i$ et $n_i^{\leftarrow}/g_i$ en fonction de ε_i. En se plaçant dans la limite continue déterminer $N^{\rightarrow} = \sum_i n_i^{\rightarrow}$ et $N^{\leftarrow} = \sum_i n_i^{\leftarrow}$ à $T = 0$. On admettra que le potentiel chimique des électrons considérés n'est pas affecté par la présence du champ magnétique.
9. Calculer l'aimantation acquise par l'échantillon due aux électrons de conduction à $T = 0\,\mathrm{K}$ en fonction de N, σ, B et ε_F puis simplifier son expression dans la limite des champs faibles
10. Déterminer, dans ce modèle et à température nulle, l'expression de la susceptibilité magnétique électronique en champ faible de l'échantillon prévue par ce modèle. Expérimentalement on peut mesurer le produit χT d'un échantillon, pour le sodium on trouve la courbe suivante. Commenter la courbe et les résultats théoriques.

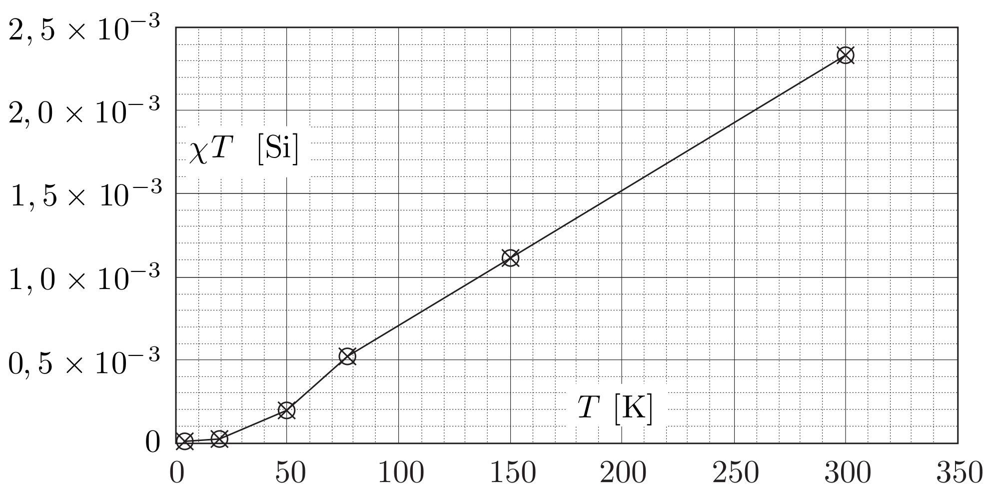

FIGURE 1 – Susceptibilité magnétique du Sodium - Mesures tirées de Schumacher & Slichter, Phys. Rev. 101, 58, 1956 – Schumacher & Vehse, J. Chem. Phys. Solids, 24, 297, 1963 - HandBook of physics & Chem.

Données numériques

$h = 6,63 \times 10^{-34}\,\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}}$; $k_B = 1,38 \times 10^{-23}\,\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}}$; $m = 9,11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$; $\sigma_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H.m^{-1}}$; $\sigma = 9,27 \times 10^{-24}\,\mathrm{J \cdot T^{-1}}$