Examen du cours PA102 - Juin 2013

Durée 2h00
Le livre du cours et les notes de PC sont autorisés

Gaz d'électrons dans l'Univers primordial

Dans l'Univers primordial, lorsque la température est supérieure à 1 Mev, les populations d'électrons (e^-), de positons (e^+) et de photons (γ) sont en équilibre thermodynamique à travers la réaction

$$e^+ + e^- \rightleftharpoons \gamma$$

où e^+ est l'antiparticule associée à e^-. On définit ρ_e et ρ_γ les densités volumiques moyennes respectives d'électrons et de photons; c'est-à-dire le nombre moyen de ces particules par unité de volume.

Le nombre de ces particules n'est pas conservé car à chaque instant chacune d'entre elle peut être changée en une autre dans l'équilibre qui règne dans chaque unité de volume considérée. Dans ces conditions, **les potentiels chimiques de chacune des ces particules sont nuls**. On rappelle que les électrons sont des fermions et que les photons sont des bosons. Le facteur de dégénerescence interne de toutes ces particules est égal à 2 (spin pour les électrons et polarisation pour les photons). Pour des particules relativistes $\varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, mais dans le domaine (ultra-relativiste) de température considéré dans tout le problème on fera l'approximation $\varepsilon = pc$ pour toutes les particules.

1. Montrer, en utilisant des arguments d'ordre de grandeur, qu'à cette température les électrons sont dans un régime ultra-relativiste.
2. Montrer que $(e^x+1)^{-1} = (e^x-1)^{-1} - a\,(e^{ax}-1)^{-1}$ ou a est un entier que l'on déterminera.
3. On se place dorénavant dans la limite continue. Montrer que $\rho_\gamma = \alpha T^3$ où l'on exprimera α en fonction de k, c, h et $\zeta(3) \simeq \frac{6}{5}$. Calculer la valeur numérique de ρ_γ pour $T = 1\,\text{Mev}$.
4. Déterminer ρ_e en utilisant la relation obtenue à la question 2, on exprimera ρ_e en fonction de ρ_γ.
5. Calculer la densité d'énergie interne $u_e = \frac{U_e}{V}$ du gaz d'électron dans cette limite ultra-relativiste.
6. Calculer l'entropie du gaz d'électrons. (On commencera par un calcul discret à partir de $S_e = k \ln W_e$ et on passera ensuite à la limite continue dans le cas ultra-relativiste et avec $\mu = 0$).
7. En déduire l'équation d'état de ce gaz d'électrons ultra relativiste. C'est-à-dire la relation entre la pression P_e des électrons et leur densité d'énergie u_e.

Pour les applications numériques on donne :

- $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\,\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- $e = 1,60 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$
- $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$
- $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\,\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
- $c = 3 \cdot 10^8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$