

NOM, PRENOM :

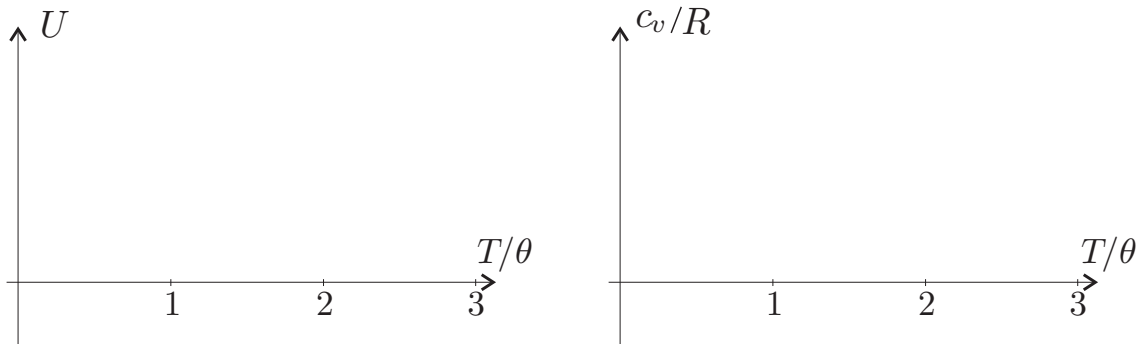
Cet énoncé complété des figures est à remettre avec la copie

Systèmes à deux niveaux

Première partie

On considère un système composé d'un grand nombre de particules N , chacune ne pouvant se trouver que sur l'un des deux niveaux d'énergie ε_1 ou ε_2 , de même dégénérescence g , toutes ces grandeurs sont supposées constantes. Ces particules sont indiscernables et suivent la statistique de Maxwell-Boltzmann corrigée. On posera $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0$. Dans tout le problème on considèrera que le système est en équilibre à la température T et que ni ε_1 ni ε_2 ne dépendent de T .

1. Déterminer les nombres n_1 et n_2 de particules d'énergies respectives ε_1 et ε_2 . On exprimera ces quantités en fonction de N , β et ε . En déduire les probabilités pour une particule d'être respectivement sur les niveaux ε_1 et ε_2 .
2. Définir une température caractéristique θ pour ce système. Quelles sont les expressions de n_1 , n_2 et $n_1 - n_2$ dans les cas $T \ll \theta$ et $T \gg \theta$. Retrouver ces résultats en utilisant des arguments physiques simples.
3. Etablir l'expression de l'énergie interne U du système de 2 manières différentes. On exprimera U en fonction de N , ε_1, β et ε , tracer la courbe représentative de U/N dans le repère fourni ci-après.
4. Déterminer l'expression de la capacité calorifique molaire à volume constant c_v du système en fonction de R, β et ε , on fera apparaître la fonction cosinus hyperbolique. Tracer la courbe représentative de c_v/R dans le repère fourni ci-après. On rappelle que l'unique solution positive x^* de l'équation $\coth(x) = x$ est $x^* \simeq 1,2$.



Compléter les graphiques en indiquant les points remarquables sur les axes

Seconde partie

Les niveaux d'énergie accessibles aux électrons libres dans un semi conducteur sont constitués d'une succession de bandes permises (dans lesquelles on peut trouver des électrons) et interdites (dans lesquelles on ne peut pas trouver d'électrons). Dans un premier modèle simplifié nous supposons que ces bandes ont toutes la même largeur 2δ et que le potentiel chimique μ de ce gaz (supposé parfait) d'électrons se situe au milieu d'une bande interdite. En prenant μ comme énergie de référence, les bandes d'énergie négative sont appelées bandes de valence (Bv) et les positives bandes de conduction (Bc). On peut résumer le tout sur la figure ci-contre.

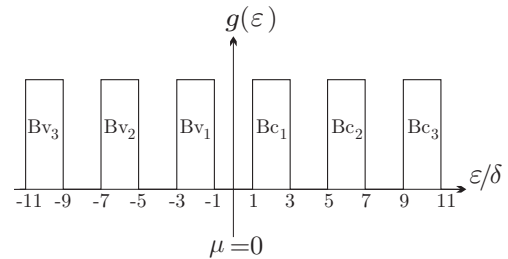
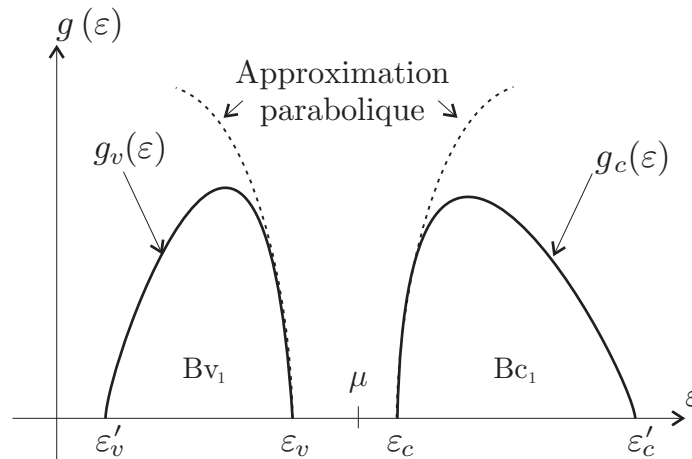


FIGURE 1 – Structure en bandes dans un semi conducteur

1. On considère que la densité d'états d'énergie est constante dans chaque bande permise et égale à $g(\varepsilon) = \frac{N}{2\delta}$. Déterminer les nombres n_1 et n_2 d'électrons se trouvant respectivement dans Bc_1 et Bc_2 . Montrer que si $\beta\delta \gg 1$, il est possible de considérer que seule la première bande de conduction contient des électrons.

Nous allons nous intéresser dorénavant au domaine d'énergie correspondant à la dernière bande de valence (Bv_1) et la première bande de conduction (Bc_1). En réalité μ n'est pas forcément situé exactement au milieu d'une bande

interdite et sa valeur dépend de la température. Par ailleurs, la densité d'états dans Bv_1 ou Bc_1 n'est pas constante et se trouve caractérisée par deux fonctions $g_v(\varepsilon)$ et $g_c(\varepsilon)$ dont l'allure est représentée sur la figure ci-dessous



2. Donner l'expression du nombre d'électrons N_v et N_c contenus respectivement dans la bande de valence et dans la bande de conduction sous la forme d'une intégrale.

Dans toute la suite du problème, on fait l'hypothèse que

$$kT \ll \varepsilon_c - \mu \quad \text{et} \quad kT \ll \mu - \varepsilon_v$$

de plus comme on peut le voir sur la figure ci-dessus, on peut trouver deux quantités positives R_c et R_v permettant d'approximer la densité d'états au voisinages respectifs de $\varepsilon = \varepsilon_c$ et $\varepsilon = \varepsilon_v$ de telle manière que

$$\text{si } \varepsilon \gtrsim \varepsilon_c \text{ alors } g_c(\varepsilon) \simeq \sqrt{2R_c}(\varepsilon - \varepsilon_c)^{1/2} \quad \text{et} \quad \text{si } \varepsilon \lesssim \varepsilon_v \text{ alors } g_v(\varepsilon) \simeq \sqrt{2R_v}(\varepsilon_v - \varepsilon)^{1/2}$$

On parle d'approximation parabolique.

3. Déterminer, sous les hypothèses précédentes une expression approchée de N_c en fonction de R_c , β , ε_c et μ . On rappelle que $\int_0^{+\infty} x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$.
4. On admet qu'à température nulle tous les électrons se trouvent dans la bande de valence, la bande de conduction est donc vide. A température $T > 0$, des électrons peuvent passer de la bande de valence à la bande de conduction. Tout se passe donc comme si les électrons thermiquement promus dans la bande de conduction laissaient un "trou" dans la bande de conduction. En déduire que l'on peut aussi écrire N_c sous la forme

$$N_c = \int_{\varepsilon'_v}^{\varepsilon_v} [1 - f(\varepsilon)] g_v(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{où } f(\varepsilon) \text{ est la fonction de Fermi.}$$

En calculant la nouvelle expression de N_c sous les mêmes hypothèses que lors de la question précédente, en déduire une expression de μ en fonction de ε_v , ε_c , β , R_c et R_v .

Dans un conducteur ou un semi conducteur la mobilité m des porteurs de charge est une quantité macroscopique qui décrit l'aptitude de ces porteurs à se déplacer dans le réseau cristallin formant le matériau. D'autres grandeurs macroscopiques comme la conductivité électrique σ dépendent évidemment de m . Par exemple, si e désigne la charge élémentaire et n la densité de porteurs de charges assurant la conduction électrique, on peut écrire que $\sigma = men$. On admettra que les porteurs de charges qui assurent la conduction électrique sont en première approximation les électrons qui se trouvent dans la bande de conduction.

5. On montre que la mobilité des électrons dans un semiconducteur varie avec la température comme $\beta^{3/2}$ et l'on suppose que $R_c \simeq R_v$. Sous ces hypothèses écrire la conductivité σ et montrer qu'elle dépend de la quantité $\Delta\varepsilon = \varepsilon_c - \varepsilon_v$ appelée « gap » du semiconducteur. En déduire une expérience (thermo-électrique) qui permet de mesurer ce gap. On décrira précisément cette expérience et de quelle analyse (notamment graphique) on peut déduire le gap.