Examen du cours PA102 - Mars 2018

Tentative de correction

Analyse du spectre de l'étoile

$\boxed{\textbf{Question 1}}$: **E_n 1pt + 1pt si une seule vérification ou 1,5pt si plusieurs**

De vieux souvenirs doivent ressurgir et la formule des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène avec $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ avec $E_0 = 13,6\,\text{eV}$. Les transitions vers le niveau $n = 1$ correspondent à des variations d'énergie $\Delta E_n = E_0\left(\frac{1}{n^2} - 1\right) = \frac{hc}{\lambda_n}$ soit $\frac{hc}{E_0\left(\frac{1}{n^2}-1\right)} = \lambda_n$ on trouve $\lambda_2 = 121,8\,\text{nm}$ (Ly_α), $\lambda_3 = 102,8\,\text{nm}$($\text{Ly}_\beta$), $\lambda_4 = 97,5\,\text{nm}$($\text{Ly}_\gamma$), $\lambda_5 = 95,2\,\text{nm}$($\text{Ly}_\delta$). On retrouve bien les raies β, γ et δ de la série de Lyman sur le spectre.

$\boxed{\textbf{Question 2}}$ **1 pt pour la formule**

Le nombre de complexions (bosons) est $W = \prod_i \frac{(g_i-1+n_i)!}{n_i!(g_i-1)!}$, l'énergie $U = \sum_i n_i\varepsilon_i$ en écrivant qu'à l'équilibre $kd\ln W + \alpha dU = 0$ où α est un multiplicateur de Lagrange on trouve $n_i = g_i/\left(e^{\beta\varepsilon_i} - 1\right)$.

$\boxed{\textbf{Question 3}}$ **2pts pour la bonne expression de u décomposés en 0,5(discret)+0,5 (continu)+ 0,5(A)+0,5(B)**

On écrit

$$E = \sum_i n_i\varepsilon_i = \sum_i \frac{g_i\varepsilon_i}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1} \to E = \int \frac{g(\varepsilon)\,\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon$$

La densité d'état dans l'espace des phases s'écrit $g(p)\,dp = 2 \times \frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp = \frac{8\pi V}{c^3h^3}\varepsilon^2 d\varepsilon$ ainsi

$$E = \frac{8\pi V}{c^3h^3}\int \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1}d\varepsilon = V\int u(\lambda)\,d\lambda \text{ avec } u(\lambda) = \frac{\frac{A}{\lambda^5}}{e^{\frac{B}{\lambda}} - 1} \text{ avec } \boxed{A = 8\pi hc} \text{ et } \boxed{B = \beta hc}$$

$\boxed{\textbf{Question 4}}$**2 pts en tout : 1 pt pour $\lambda_{\max}$ et 1 pour T_s.**

On pose $x = \frac{\beta hc}{\lambda}$, on a donc $u(x) = \frac{8\pi}{\beta^5h^4c^4}\frac{x^5}{e^x-1}$ le maximum de u est atteint pour $u'(x) = 0$ soit

$$0 = \frac{5x^4\left(e^x - 1\right) - x^5e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} = \frac{5x^4\left[e^x - 1 - \frac{1}{5}xe^x\right]}{\left(e^x - 1\right)^2}$$

La solution $x = 0$ correspond à une température infinie et l'autre revient à chercher les solutions de l'équation $1 - e^{-x} - \frac{1}{5}x = 0$ que l'on donne en $x = 5$. On a donc

$$5 = \frac{hc}{\lambda_{\max}kT} \implies T = \frac{hc}{5\lambda_{\max}k}$$

Sur le spectre on lit $\lambda_{\max} = 108$ nm, on en déduit $T = \frac{6{,}63\times10^{-34}.2{,}99\times10^{8}}{5.108\times10^{-9}.1{,}38\times10^{-23}} = 26,6 \times 10^3 K$ qui est un ordre de grandeur raisonnable de la valeur que l'on peut trouver dans des articles $T = 25,1 \times 10^3 K$ (ApJ, 1997, 488, 375 dans lequel l'étoile est reportée sous le nom 0612+177 : G104-027)

Le rayon de l'étoile

$\boxed{\textbf{Question 5}}$ **3pts en tout : 1 pour l'ionisation, 1 pour N_n et 1 pour N_c**

Nous avons trouvé une température de surface de l'ordre de $T_s = 26\,000\,\text{K}$; et donc sans doute bien plus en s'enfonçant dans l'étoile. L'énergie d'agitation thermique minimale disponible est donc $E_{th} = kT_s = 3.58 \times 10^{-19}$ J $\simeq$ 2eV. Ainsi à la surface l'énergie thermique n'est pas suffisante en moyenne pour ioniser le carbone mais en s'enfonçant dans l'étoile la température augmente à cause de la pression gravitationnelle et l'hypothèse se justifie. La masse des électrons est négligeable devant celle des protons et des neutrons que l'on prend égales, la masse totale de l'étoile est donc $M = 12N_cm_p$ donc $\boxed{N_n = \frac{M}{12m_p}}$. Par ailleurs chaque atome a libéré 6 électrons, leur nombre est donc $\boxed{N_e = 6N_n = \frac{M}{2m_p}}$.

$\boxed{\textbf{Question 6}}$ **1 pt pour la formule**

On peut refaire le calcul complet ou donner le résultat $n_i = g_i\left(\exp\left[\beta\left(\varepsilon_i - \mu\right)\right] + 1\right)^{-1}$

$\boxed{\textbf{Question 7}}$ **1pt en tout : 0.5 pour f et 0.5 pour l'interprétation.**

A température nulle, la fonction de Fermi est telle que $f(\varepsilon_i) = 1$ si $\varepsilon_i < \varepsilon_F$ et $f(\varepsilon_i) = 0$ si $\varepsilon_i > \varepsilon_F$ cette fonction est la distribution de probabilité de l'énergie d'un électron. A température nulle cette distribution est uniforme dans le segment de longueur ε_F.

Question 8 **3pts en tout : 1 pour p_f, 1 pour ϵ_f et 1 pour T_f.**

On écrit la conservation du nombre d'électrons $N_e = \sum_i n_i = \sum_i f(\varepsilon_i) g_i$ à température nulle cette somme se simplifie en $N_e = \sum_{\varepsilon_i < \varepsilon_F} g_i$ et dans la limite continue on obtient

$$N_e = \sum_{\varepsilon_i < \varepsilon_F} g_i \to N_e = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_0^{p_F} g(p)\, dp = \int_0^{p_F} \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp \implies N_e = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3} p_F^3$$

On a donc $\boxed{p_F = \left(\frac{3\pi^2 N_e}{V}\right)^{1/3} \hbar}$, $\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = \left(\frac{3\pi^2 N_e}{V}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e}$ et $T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B} = \left(\frac{3\pi^2 N_e}{V}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2k_B m_e}$. Le volume de l'étoile est celui d'une sphère de rayon R et avec l'expression de N_e obtenue plus haut il vient

$$\varepsilon_F = k_B T_F = \left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e R^2}$$

Ce qui est bien plus que toutes les températures T que l'on peut envisager dans ce genre de système pour lequel on a donc $T \ll T_F$ et on peut donc considérer $T = 0$ K.

Question 9 **1pt**

En prenant $R = R_\oplus$, on trouve $T_F = 1,8 \times 10^9$ K. Ce qui est bien plus que toutes les températures T que l'on peut envisager dans ce genre de système pour lequel on a donc $T \ll T_F$ et on peut donc considérer $T = 0$ K.

Question 10 **2pts décomposés en 1pt pour U et 1pt pour P**

Pour l'énergie on écrit que $U_e = \sum_{\varepsilon_i} n_i \varepsilon_i = \sum_{\varepsilon_i} f(\varepsilon_i) \varepsilon_i g_i$ et donc à température nulle $U_e = \sum_{\varepsilon_i < \varepsilon_F} \varepsilon_i g_i$ et dans la limite continue avec $\varepsilon = \frac{p^2}{2m_e}$ on a

$$U_e = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{p^2}{2m_e} g(p)\, dp = \frac{V}{2m_e \pi^2 \hbar^3} \int_0^{\varepsilon_F} p^4 dp = \frac{V}{10 m_e \pi^2 \hbar^3} p_F^5 \quad \text{soit} \quad \boxed{U_e = \frac{3^5/3\pi^4/3}{10} \frac{N_e^5/3\hbar^2}{m_e V^2/3}}$$

La thermodynamique nous apprends que $F = U - TS$ ainsi à température nulle $F = U$, nous savons par ailleurs que $P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ donc

$$P_e = -\frac{\partial U_e}{\partial V} = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{N_e}{V}\right)^{5/3} \text{soit} \quad \boxed{P_e = \frac{(3)^7/3}{160 m_e \pi^1/3} \left(\frac{M}{m_p}\right)^5/3 \frac{\hbar^2}{R^5}}$$

Question 11 **2pts décomposés en 1pt pour P_g et 1pt pour R**

On suppose que c'est cette pression de dégénérescence qui compense la pression P_G due aux forces de gravitation. Cette pression intervient dans le travail δW qu'il faut fournir pour faire varier le volume de l'étoile de de V à $V - dV$: $\delta W = -P_G dV$, ce travail est également donné par la variation d'énergie potentielle lors de cette transformation $\delta W = dE_p = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R^2} dR$ en écrivant que $dV = d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2 dR$ il vient $P_G = -\frac{3}{20\pi}\frac{GM^2}{R^4}$ puis en écrivant que $P_G + P_e = 0$ il vient

$$\frac{\hbar^2}{8 G m_e m_p M^{1/3}} \left(\frac{9\pi}{m_p}\right)^{2/3} = R$$

Si l'on connaît la masse on en déduit le rayon. Numériquement on trouve $R_* = 9\ 150$ km.

L'intérieur de l'étoile

Question 12 **2pts décomposés en 1pt pour $\vec{\mathcal{E}}$ et 1pt pour ω**

Pour ma part je résous ce problème en utilisant l'équation de Poisson. Si l'on note ψ le potentiel électrostatique associé à la densité ρ, l'équation de Poisson s'écrit $\Delta\psi = -\rho/\varepsilon_0$ la distribution de charge étant radiale, on écrit cette équation en sphérique et il ne reste plus que

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\psi}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{6e}{\varepsilon_0 a^3}$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du second ordre est de la forme $\psi(r) = A + \frac{B}{r} + \alpha r^2$. Les constantes A et B caractérisent la solution de l'équation sans second membre et le terme αr^2 correspond à la solution particulière due au second membre constant. La constante A n'a pas d'intérêt physique car elle correspond à une jauge. La constante B est nulle par symétrie (le gradient de ψ donne la force et celle-ci doit être nulle en $r = 0$). La constante α s'identifie directement en injectant dans l'équation on trouve $\alpha = \frac{e}{\varepsilon_0 a^3}$. Finalement $\psi(r) = A + \frac{e}{\varepsilon_0 a^3} r^2$. Le champ électrique est simplement l'opposé du gradient du potentiel on a $\vec{\mathcal{E}} = -\operatorname{grad}\psi$ pour une fonction radiale $\operatorname{grad}\psi = \frac{d\psi}{dr}\vec{e}_r$ ainsi $\vec{\mathcal{E}} = -\frac{2e}{\varepsilon_0 a^3} r\vec{e}_r$ soit finalement $\boxed{\vec{\mathcal{E}} = -\frac{2e}{\varepsilon_0 a^3}\vec{r}}$. La seule force subie par le noyau est celle de Coulomb $\vec{F} = q_n\vec{\mathcal{E}}$ exercée par cette distribution de charge, la charge du noyau est $q_n = 6e$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au noyau s'écrit

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q_n\vec{\mathcal{E}} \implies m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{12e^2}{\varepsilon_0 a^3}\vec{r} \text{ soit } \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega^2\vec{r} = \vec{0} \text{ avec } \boxed{\omega^2 = \frac{e^2}{m_p\varepsilon_0 a^3}}$$

ce qui correspond bien à un oscillateur harmonique 3D avec la pulsation ω.

Question 13 **1pt**

L'équation du mouvement s'écrit $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x = 0$ la solution est $x(t) = s\cos(\omega t + \varphi)$ où s représente l'amplitude de l'oscillation de phase à l'origine φ. Pour obtenir l'énergie on multiplie l'équation par $\frac{dx}{dt}$ et on intègre, il vient $E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ en remplaçant x par son expression en fonction du temps et en prenant la valeur moyenne temporelle il vient $\overline{E} = \frac{1}{2}m\omega^2 s^2$.

Question 14 **2pts : 1 pour la série et 1 pour le résultat**

On écrit $3N_n = \sum_i n_i = \sum_i \frac{3N_n}{Z}\exp\left(-\beta\hbar\omega\left(i+\frac{1}{2}\right)\right)$ soit

$$Z = \sum_{i=0}^{+\infty}\exp\left(-\beta\hbar\omega\left(i+\frac{1}{2}\right)\right) = e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\sum_{i=0}^{+\infty}\left[\exp(-\beta\hbar\omega)\right]^i = \frac{e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{(1-e^{-\beta\hbar\omega})} = \frac{1}{2\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$$

Question 15 **4pts : 1 pour le log, 1 pour $\langle s^2\rangle$, 1 pour θ et 1 pour ξ.**

On calcule U_n dans le modèle d'Einstein soit $U_n = \sum_i n_i\varepsilon_i = \sum_i \frac{3N_n}{Z}\varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i}$ où l'on reconnaît l'expression de la fonction de partition et ainsi $U_n = -\frac{3N_n}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}$ soit $\boxed{U_n = -3N_n\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta}}$ avec l'expression de Z obtenue on a donc

$$U_n = -3N_n\frac{\partial\ln\left\{\left[2\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right]^{-1}\right\}}{\partial\beta} = 3N_n\frac{\partial\ln\left[\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right]}{\partial\beta} = \frac{3N_n\hbar\omega}{2\tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$$

Cette énergie totale permet d'obtenir l'énergie moyenne par oscillateur $\langle u\rangle = \frac{U_n}{3N_n}$ qui, en identifiant moyenne temporelle et moyenne statistique (théorème ergodique), donne

$$\frac{1}{2}m\omega^2\langle s^2\rangle = \frac{U_n}{3N_n} = \frac{\hbar\omega}{2\tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \implies \boxed{\langle s^2\rangle = \frac{\hbar}{12m_p\omega\tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}}$$

l'intérieur est solide si $\langle s^2\rangle \leq \gamma^2 a^2$, en utilisant l'expression de ω obtenue plus haut cette condition s'écrit donc

$$\tanh\left(\frac{\theta}{T}\right) \geq \xi \text{ avec } \boxed{\xi = \frac{\hbar}{12\gamma^2 e}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{am_p}}} \text{ et } \boxed{\theta = \frac{\hbar\omega}{2k_B} = \frac{\hbar e}{2k_B\sqrt{m_p\varepsilon_0 a^3}}}$$

Question 16 **4pts : 1 pour θ, App. num 1pt pour θ, 1pt pour ξ, discussion 1pt**

Sous les hypothèses proposées $V = N_n\frac{4}{3}\pi a^3$ soit $a^3 = \frac{3V}{4\pi N_n}$ mais $N_n = \frac{M}{12m_p}$ ainsi $a^3 = \frac{9Vm_p}{\pi M} = \frac{9m_p}{\pi\rho_*}$ on peut donc écrire $\boxed{\theta = \frac{\hbar e}{6m_p k_B}\sqrt{\frac{\pi\rho_*}{\varepsilon_0}}}$ soit numériquement avec $\rho_* = M_*\left(\frac{4}{3}\pi R_*^3\right)^{-1} = 3,1\times10^8\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\boxed{\theta = 1,3\times10^6\ \text{K}}$. On a d'autre part $\xi = \frac{\hbar}{12\gamma^2 e}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\left(\frac{9}{\pi\rho_*}\right)^{1/3} m_p^{4/3}}}$ soit numériquement $\boxed{\xi = 0,25}$. Nous avons trouvé une température de surface $T_s \simeq 2,6\times10^4$ K. En surface, le rapport $\xi_s = \frac{\theta}{T_s}$ est donc de l'ordre de 50, dont la tangente hyperbolique est très proche de 1 : la surface est donc solide. En profondeur c'est une autre histoire...

La température de fusion s'écrit $T_f = \frac{\theta}{\arg\tanh(\xi)}$ par ailleurs la fonction tangente hyperbolique est pratiquement linéaire au voisinage de 0 ainsi $\arg\tanh(\xi) \simeq \xi$ et l'on trouve

$$T_f \simeq \frac{\theta}{\xi} = \frac{2\gamma^2 e^2}{k_B\varepsilon_0}\left(\frac{3\pi\rho_*}{m_p}\right)^{1/3} \text{ soit numériquement } T_f \simeq 7,6\times10^6\ \text{K}$$

Il est fort possible que la partie centrale de l'étoile soit liquide car cette température est seulement 300 fois supérieure à la température de surface. Et avec une telle densité la pression doit augmenter très vite sous la surface ainsi que la température, mais encore faudrait-il connaître le diagrame de phase $P-T$ pour un tel matériau !