

Le paramagnétisme - Correction

Partie I - Modèle de Langevin

- On écrit l'équation de Schrödinger stationnaire pour ψ avec un puits infini à 3 dimensions. On sépare les trois directions de l'espace en écrivant que $\psi = X(x)Y(y)Z(z)$. Pour chacune de ces trois fonctions on trouve alors une équation différentielle harmonique et la condition de nullité de la fonction d'onde sur les bords du puits impose une quantification de l'énergie. Le niveau d'énergie n'est pas dégénéré car $|n_1, n_2, n_3\rangle$ définit un seul état quantique pour chaque valeur de $\varepsilon_{n_1, n_2, n_3}$. Ce n'est plus le cas si $a = b = c$.
- On écrit que $N = \sum_i C^o g_i \exp(-\beta\varepsilon_i)$ soit $\boxed{\frac{N}{Z_t} = C}$ avec $Z_t = \sum_i g_i \exp(-\beta\varepsilon_i)$ avec l'expression de ε_i et $g_i = 1$ il vient

$$\begin{aligned} Z_t &= \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta h^2}{8m} \left[\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}\right]\right) \\ &= \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta h^2}{8ma^2} n_1^2\right) \right] \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta h^2}{8mb^2} n_2^2\right) \right] \left[\sum_{n_3=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta h^2}{8mc^2} n_3^2\right) \right] \end{aligned}$$

Chacune de ces sommes est de la forme

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \exp(-\alpha n_1^2) = -1 + \sum_{n_1=0}^{\infty} \exp(-\alpha n_1^2) \simeq -1 + \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

La constante $\alpha = \frac{\beta h^2}{8m\ell^2}$ où ℓ est l'une des dimension de l'échantillon, en prenant $\ell = 10$ cm, à température ambiante il vient $\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2\pi m k_B T} \frac{\ell}{h} \simeq 5 \cdot 10^6$ on peut donc largement négliger le -1 et l'on trouve $\boxed{Z_t = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \frac{V}{h^3}}$ soit $C = \frac{N}{Z_t} = \frac{N h^3}{V} \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}$ et donc $C = n_c h^3 \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}$ à température ambiante on trouve

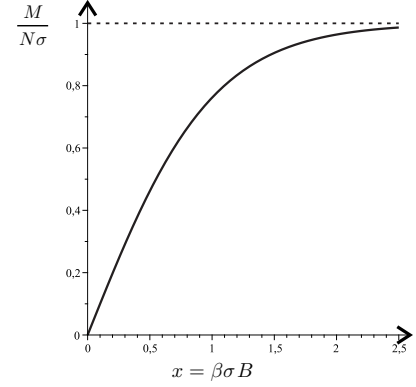
$$C = 2,5 \cdot 10^{28} \frac{(6,63 \times 10^{-34})^3}{(7,9 \times 10^{-53})^{3/2} \cdot 5,2 \times 10^3} = 2,5 \cdot 10^{28} \frac{2,9 \times 10^{-100}}{3,7 \times 10^{-75}} \simeq 2000 \gg 1$$

- On utilise la même relation $n_i^{\pm} = C^m g_i \exp\left(-\beta\left(\frac{p_i^2}{2m} \pm \sigma B\right)\right)$, la constante est la même seule l'énergie change, on a donc directement $n_i^{\pm} = C g_i \exp(-\beta\varepsilon_i^{\pm})$

$$\begin{aligned} N &= \sum_i (n_i^{\rightarrow} + n_i^{\leftarrow}) = \sum_i \left[C^m g_i \exp\left(-\beta\left(\frac{p_i^2}{2m} + \sigma B\right)\right) + C^m g_i \exp\left(-\beta\left(\frac{p_i^2}{2m} - \sigma B\right)\right) \right] \\ &= [\exp(-\beta\sigma B) + \exp(+\beta\sigma B)] C^m \sum_i \exp(-\beta\varepsilon_i) \\ &= 2\text{ch}(\beta\sigma B) C^m Z_t \implies \boxed{C^m = \frac{N}{Z_t Z_m}} \text{ avec } \boxed{Z_m = 2\text{ch}(\beta\sigma B)} \end{aligned}$$

4. On a simplement $M = n_i^{\rightarrow}\sigma - n_i^{\leftarrow}\sigma$, avec le calcul précédent on trouve donc toujours avec $g_i = 1$,

$$\begin{aligned} M &= \frac{N\sigma}{Z_t Z_m} \sum_i (\exp(-\beta\varepsilon_i^{\rightarrow}) - \exp(-\beta\varepsilon_i^{\leftarrow})) \\ &= \frac{N\sigma}{Z_t Z_m} [\exp(\beta\sigma B) - \exp(-\beta\sigma B)] \sum_i \exp(-\beta\varepsilon_i) \\ &= \frac{N\sigma}{Z_m} 2\text{sh}(\beta\sigma B) \text{ soit } \boxed{M = N\sigma \text{th}(\beta\sigma B)} \end{aligned}$$



5. Dans la limite proposée $x \ll 1$ et donc $\text{th}(x) \sim x$, on a donc $M = N\sigma x = \frac{N\sigma^2 B}{k_B T}$ et donc

$$\boxed{\chi^{mb} = \frac{N\sigma_0\sigma^2}{V k_B T}}$$

: dans ce modèle la susceptibilité dépend de l'inverse de la température cela ne correspond pas aux résultats expérimentaux. Une application numérique à $T = 300$ K donne $\chi^{mb} = \frac{n_c\sigma_0\sigma^2}{k_B T} = \frac{2,5 \times 10^{28} \cdot 4\pi \times 10^{-7} \cdot (9,3 \times 10^{-24})^2}{1,4 \times 10^{-23} \times 300} \simeq 6,5 \times 10^{-4}$ Si ce qui n'est pas non plus le bon ordre de grandeur : le modèle ne fonctionne pas. Le magnétisme n'est peut-être pas du aux électrons ou bien la statistique n'est peut-être pas la bonne. C'est cette seconde hypothèse qui retient notre attention compte-tenu de ce que nous savons sur le statut fermionique des électrons.

6. Pour retrouver la distribution de Maxwell-Boltzmann il faut avoir $n_i \simeq C g_i \exp(-\beta\varepsilon_i)$ c'est-à-dire $\tilde{C} \exp(\beta\varepsilon_i) \gg 1$, qui doit être vraie pour toutes les valeurs de ε_i . Pour le niveau fondamental $\varepsilon_0 \simeq 0$, on doit donc avoir $\tilde{C} \gg 1$ afin de pouvoir appliquer la statistique de Maxwell-Boltzmann. Si $\tilde{C} \gg 1$ on a bien $n_i \simeq \frac{g_i}{\tilde{C}} \exp(-\beta\varepsilon_i)$ avec $C \simeq \tilde{C}^{-1}$. Comme on l'a vu à la seconde question on a alors $C \simeq 2000$. Ainsi $\tilde{C}^{-1} \simeq C \ll 1$, la condition d'application de la statistique de Maxwell-Boltzmann n'est pas du tout vérifiée...

Partie II - Modèle de Pauli

7. La fonction de Fermi n_i/g_i est égale à 1 si $\varepsilon_i < \varepsilon_F$ et nulle si $\varepsilon_i > \varepsilon_F$. Par définition

$$N = \sum_i n_i = \sum_i \frac{n_i}{g_i} \times g_i \text{ ainsi à } T = 0 \text{ on a } N = \sum_{\varepsilon_i < \varepsilon_F} g_i \sim \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) d\varepsilon$$

Le facteur de dégénérescence se calcule directement avec $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ il vient $\frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon = dp$

$$g(p) dp = g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp = g_s \frac{V}{h^3} 2\pi \varepsilon^{1/2} (2m)^{3/2} d\varepsilon = g(\varepsilon) d\varepsilon$$

ainsi dans la limite continue $N = 2\pi g_s \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = 2\pi g_s \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{2}{3} \varepsilon_F^{3/2}$ soit

$$\boxed{\varepsilon_F = \left(\frac{3n_c}{4\pi g_s} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}}$$

On en déduit $T_F = \left(\frac{3n_c}{4\pi g_s} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2mk_B}$. Sans champ magnétique, on doit prendre $g_s = 2$ pour compter la dégénérescence de spin

$$\varepsilon_F = \left(\frac{3 \times 2,5 \cdot 10^{28}}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{6,63^2 \times 10^{-68}}{2 \times 9,11 \times 10^{-31}} = 4,8 \times 10^{-19} \simeq 3 \text{ eV}$$

et $T_F = 2100$ K

La température ambiante est très inférieure à T_F on a $x_{\text{amb}} = \left(\frac{T}{T_F}\right)_{T=T_{\text{amb}}} = 1,4 \times 10^{-2}$.

8. Les particules ayant un moment magnétique orienté dans la direction de \vec{B} ont une énergie $\varepsilon_i^{\rightarrow} = \frac{p_i^2}{2m} - \sigma B$ ainsi

$$n_i^{\rightarrow} = \frac{g_i}{\exp[\beta(\varepsilon_i^{\rightarrow} - \mu)] + 1}$$

à $T = 0$, $\mu = \varepsilon_F$: tant que $\varepsilon_i^{\rightarrow} < \varepsilon_F$ on a $n_i^{\rightarrow}/g_i = 1$ et $n_i^{\rightarrow}/g_i = 0$ dès que $\varepsilon_i^{\rightarrow} > \varepsilon_F$. Ainsi à $T = 0$ et dans la limite continue on a donc

$$\begin{aligned} N^{\rightarrow} &= \sum_i \frac{n_i^{\rightarrow}}{g_i} \times g_i = \sum_{\varepsilon_i^{\rightarrow} < \varepsilon_F} g_i = \sum_{\varepsilon_i < \varepsilon_F + \sigma B} g_i \\ &\sim \int_0^{\varepsilon_F + \sigma B} g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{V}{h^3} 2\pi (2m)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F + \sigma B} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \text{ soit } \boxed{N^{\rightarrow} = \frac{V}{h^3} 2\pi (2m)^{3/2} \frac{2}{3} (\varepsilon_F + \sigma B)^{3/2}} \end{aligned}$$

de même on trouve $\boxed{N^{\leftarrow} = \frac{V}{h^3} \frac{4}{3}\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon_F - \sigma B)^{3/2}}$. On a bien entendu pris $g_s = 1$ pour ces calculs car la dégénérescence de spin est maintenant levée...

9. On a directement

$$\begin{aligned} M &= \sigma N^{\rightarrow} - \sigma N^{\leftarrow} = \frac{V}{h^3} \frac{4}{3}\pi (2m)^{3/2} \sigma \left[(\varepsilon_F + \sigma B)^{3/2} - (\varepsilon_F - \sigma B)^{3/2} \right] \\ &= \frac{V}{h^3} \frac{4}{3}\pi (2m)^{3/2} \sigma \varepsilon_F^{3/2} \left[\left(1 + \frac{\sigma B}{\varepsilon_F}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{\sigma B}{\varepsilon_F}\right)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

On a trouvé $N = 4\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{2}{3} \varepsilon_F^{3/2}$ on trouve donc $\boxed{M = \frac{1}{2} N \sigma \left[\left(1 + \frac{\sigma B}{\varepsilon_F}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{\sigma B}{\varepsilon_F}\right)^{3/2} \right]}$ dans la limite des champs faibles on trouve finalement

$$M \simeq \frac{1}{2} N \sigma \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\sigma B}{\varepsilon_F} - 1 + \frac{3}{2} \frac{\sigma B}{\varepsilon_F} + o\left(\frac{\sigma B}{\varepsilon_F}\right) \right] \text{ soit } \boxed{M = \frac{3}{2} \frac{N \sigma^2 B}{\varepsilon_F}}$$

10. Pour la susceptibilité il vient $\chi = \frac{3}{2} \frac{\sigma_0 n_c \sigma^2}{\varepsilon_F}$ qui ne dépend donc pas de la température. Sa valeur numérique est $\chi = \frac{3}{2} \frac{\sigma_0 n_c \sigma^2}{\varepsilon_F} = \frac{3}{2} \frac{(9,27 \times 10^{-24})^2 \cdot 2,5 \times 10^{28} \cdot 4\pi \times 10^{-7}}{4,8 \times 10^{-19}} = 8,4 \times 10^{-6}$

La courbe de χT semble linéaire dès que T devient plus grand que 50 K, sa pente est alors $\chi_{\text{exp}} = \frac{(2,3-0,5) \times 10^{-3}}{300-75} \sim 8 \times 10^{-6}$ Si ce qui est en excellent accord avec la théorie. Par contre pour les très faibles températures la courbe s'affaisse et on s'écarte de la droite théorique. Sans doute d'autres phénomènes interviennent comme le couplage entre électrons ou bien avec le réseau qui n'a pas été pris en compte dans le modèle.