Examen du cours PA102

Correction

1. On a $kT = 1\,\mathrm{Mev}$, ce qui correspond à une température $T = \frac{10^6 \times 1{,}60 \cdot 10^{-19}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}} \simeq 11,6 \cdot 10^9\,\mathrm{K}$; à l'équilbre (pour des électrons libres à 3 degrés de liberté) $\frac{1}{2}m_e v^2 \simeq \frac{3}{2}kT$, on en déduit que

$$v \simeq \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \times 10^6 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \simeq \sqrt{\frac{10^{18}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 10^9 > 3 \cdot 10^8$$

ce qui est bien sûr impossible, si l'on prend l'expression relativiste de la vitesse on trouve en fait $v \simeq c$.

2. C'est un calcul simple

$$\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - (e^x + 1)}{(e^x + 1)(e^x - 1)} = \frac{-2}{e^{2x} - 1}$$

et donc $\boxed{a = 2}$.

3. C'est un calcul fait en cours : $g(p)\,dp = \frac{4\pi g_\gamma V p^2 dp}{h^3}$ et $\rho_\gamma = \frac{n_\gamma}{V} = \frac{4\pi g_\gamma}{h^3}\int_0^{+\infty} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1}$ pour les photons $\varepsilon = pc$ et $g_\gamma = 2$ ainsi

$$\rho_\gamma = \frac{8\pi}{c^3 h^3}\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1} = \frac{8\pi}{c^3 h^3}\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1} = \frac{8\pi k^3 T^3}{c^3 h^3}\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}dx$$

on a vu que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}dx = \Gamma(3)\,\zeta(3) = 2\zeta(3)$ ainsi $\boxed{\rho_\gamma(T) = \alpha T^3}$ avec $\boxed{\alpha = \frac{16\pi\zeta(3)k^3}{c^3 h^3}}$. L'application numérique est fameuse : on a vu que $1\,\mathrm{Mev}$ correspond à $T = 11,6 \cdot 10^9\,\mathrm{K}$ ainsi

$$\rho_\gamma(1\,\mathrm{Mev}) = \frac{96\pi \times 1,38^3 \cdot 10^{-69} \times 11,6^3 \cdot 10^{27}}{5 \times 27 \cdot 10^{24} \times 6,63^3 \cdot 10^{-102}} = 3,14 \cdot 10^{37}\ \mathrm{photon} \cdot \mathrm{m}^{-3}$$

Pour rigoler on peut donc écrire que $\boxed{\rho_\gamma \simeq \pi \cdot 10^{37}\,\mathrm{m}^{-3}}$, ce qui est beacoup même pour des photons...

4. Les électrons étant des fermions, on a $\rho_e = \frac{n_e}{V} = \frac{4\pi g_e}{h^3}\int_0^{+\infty} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) + 1}$ comme ils sont ultrarelativistes $\varepsilon = pc$ et

$$\rho_e = \frac{n_e}{V} = \frac{4\pi g_e}{h^3}\int_0^{+\infty} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) + 1} = \frac{8\pi k^3 T^3}{c^3 h^3}\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x + 1}dx$$

en utilisant l'expression de la question 2 il vient

$$\begin{aligned}\rho_e &= \frac{8\pi k^3 T^3}{c^3 h^3}\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} - \frac{8\pi k^3 T^3}{c^3 h^3}\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{e^{2x} - 1}dx \\ &= \rho_\gamma - \frac{1}{4}\frac{8\pi k^3 T^3}{c^3 h^3}\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{e^y - 1}dy\end{aligned}$$

On trouve donc la jolie relation $\boxed{\rho_e = \frac{3}{4}\rho_\gamma}$, cela fait donc aussi beaucoup d'électrons...

5. Le calcul a été effectué en TD pour les photons, mais en utilisant la relation de la question 2 on s'y ramène.

$$\varepsilon_e = \frac{U}{V} = \frac{4\pi g_e}{h^3}\int_0^{+\infty} \varepsilon \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) + 1} = \frac{4\pi g_e}{c^3 h^3}\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^3 d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) + 1} = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3}\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{e^x + 1}$$

en utilisant le résultat de la question 2, il vient

$$\varepsilon_e = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3}\left(\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - 2\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{e^{2x} - 1}\right) = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3}\left(1 - \frac{1}{8}\right)\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

sachant que $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \Gamma(4)\,\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \times 6 = \frac{\pi^4}{15}$ il vient $\boxed{\varepsilon_e = \frac{7\pi^5 k^4 T^4}{15 c^3 h^3} = \frac{7}{8}aT^4}$ avec $\boxed{a = \frac{8\pi^5 k^4 T^4}{15 c^3 h^3}}$ en cours on a vu que $\varepsilon_\gamma = aT^4$ et donc $\boxed{\varepsilon_e = \frac{7}{8}\varepsilon_\gamma}$.

6. Le calcul est fait avec la fonction $h(\chi)$ dans le poly et explicitement pour les photons... Quand on a compris on peut le refaire... Pour des fermions $W = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!}$ en utilisant Stirling on a donc

$$\begin{aligned}\frac{S}{k} &= \sum_i \left[g_i \ln g_i - g_i - n_i \ln n_i + n_i - (g_i - n_i)\ln(g_i - n_i) + (g_i - n_i)\right] \\ &= \sum_i \left[n_i \ln\left(\frac{g_i}{n_i} - 1\right) - g_i \ln\left(1 - \frac{n_i}{g_i}\right)\right]\end{aligned}$$

avec un potentiel chimique nul et pour des fermions on a $\frac{n_i}{g_i} = \left(e^{\beta\varepsilon_i} + 1\right)^{-1}$ ainsi

$$\begin{aligned}\frac{S}{k} &= \sum_i \left[n_i \beta\varepsilon_i - g_i \ln\left(1 - \left(e^{\beta\varepsilon_i} + 1\right)^{-1}\right)\right] \\ &= \beta U + \sum_i g_i \ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon_i}\right)\end{aligned}$$

en passant à la limite continue on a

$$\frac{S}{k} = \beta U + \int g(\varepsilon)\, d\varepsilon \ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

avec $\varepsilon = cp$, on a toujours $g(p)\,dp = \frac{4\pi g_e V p^2 dp}{h^3} \implies g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{4\pi g_e V \varepsilon^2 d\varepsilon}{c^3 h^3}$ ainsi

$$\frac{S}{k} = \beta U + \frac{4\pi g_e V}{c^3 h^3} \int_0^{+\infty} \varepsilon^2 \ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon}\right) d\varepsilon = \beta U + \frac{4\pi g_e V}{c^3 h^3 \beta^3} \int_0^{+\infty} x^2 \ln\left(1 + e^{-x}\right) dx$$

une intégration par partie donne

$$\int_0^{+\infty} x^2 \ln\left(1 + e^{-x}\right) dx = \left[\frac{x^3 \ln\left(1 + e^{-x}\right)}{3}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{3} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x + 1} dx$$

puis en utilisant le résultat de la question 2

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 \ln\left(1 + e^{-x}\right) dx &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^{2x} - 1} dx \\ &= \frac{7}{24} \int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{7\pi^4}{24 \times 15}\end{aligned}$$

finalement $S = \frac{U}{T} + \frac{g_e V}{c^3 h^3 \beta^3} \frac{7\pi^5}{6 \times 15}$ En utilisant le résultat de la question 5, il vient $U = V\varepsilon_e = \frac{7\pi^5 k^4 T^4}{15 c^3 h^3}$ et donc avec $g_e = 2$ on trouve finalement $\boxed{S = \frac{4}{3} \times \frac{7\pi^5 V k^4}{15 c^3 h^3} T^3}$.

7. On écrit l'énergie libre

$$F = U - TS = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{7\pi^5 V k^4}{15 c^3 h^3} T^4$$

puis

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{3} \times \frac{7\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4$$

que l'on exprime en fonction de ε_e sous la forme $\boxed{P_e = \frac{1}{3}\varepsilon_e}$. On retrouve la même équation d'état que les photons, mais avec une densité d'énergie $\frac{7}{8}$ fois moindre, ce qui est somme toute assez moral car les photons sont de l'énergie pure...