



QUI VEUT GAGNER DES

ϵ_i Z

BOSONS
ET DES
FERMIONS

$\chi(T)$

QUI VEUT GAGNER DES

SÉANCE 3 : 27 JANVIER 2021

Qu'est-ce que la catastrophe ultraviolette ?

A L'altération des couleurs foncées par certaines lessives à haute température



B La divergence de la densité spectrale du rayonnement à haute fréquence dans un modèle classique

C Le comportement de la loi de Planck à haute fréquence

D La conséquence du fait que les photons n'ont pas de masse.



➤ **Question 1** : Qu'est-ce que la catastrophe ultraviolette ?

Réponse : La divergence de la densité spectrale du rayonnement à basse fréquence dans un modèle classique

Reprenons le calcul « classique » effectué par Lord Rayleigh à la fin du XIX^e siècle.

La propagation d'une onde lumineuse entre deux miroirs parfaits distants de ℓ n'est possible qu'à la pulsation $\omega = \frac{\pi c}{\ell} n_1$

Où n_1 est un nombre entier positif, chaque valeur de cet entier constitue un mode de propagation. La généralisation à 3

dimensions pour la propagation dans un cube de côté ℓ s'écrit directement $\omega = \frac{\pi c}{\ell} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$

Pour compter le nombre $N(\Omega)$ de modes de propagations possibles dont la pulsation ω est inférieure à Ω , il suffit donc de

compter le nombre de points de coordonnées entières positives dans la sphère de rayon Ω , on trouve $N(\Omega) = \frac{\ell^3 \Omega^3}{6\pi^2 c^3}$.

En passant aux fréquences $\nu = \frac{\Omega}{2\pi}$, la densité spectrale de mode est **quadratique** et s'écrit $dN = \frac{\ell^3}{6\pi^2 c^3} \nu^2 d\nu$, Rayleigh

pensait donc pouvoir appliquer le théorème d'équipartition de l'énergie et compte une contribution de $\frac{1}{2} k_B T$ à l'énergie par

mode de propagation possible. Il trouve donc une densité spectrale d'énergie $dU = \frac{\ell^3 k_B T}{12\pi^2 c^3} \nu^2 d\nu$ qui diverge dans l'ultraviolet !

On ne peut pas appliquer le théorème d'équipartition de l'énergie aux photons qui ne sont pas soumis à la statistique de MB.

La loi de Rayleigh demeure valide à basse fréquence comme un DL de la loi de Planck dans ce régime ...

Le spin j d'un système de 2 particules de spin j_1 et j_2 appartient à l'ensemble $[|j_1-j_2|, |j_1-j_2|+1, \dots, |j_1+j_2|]$. Parmi ces états liés quel est le boson ?

A

Un atome d'Hélium 3 : état lié de deux électrons, deux protons et d'un neutron

B

Un grauglouthon : absorption d'un chapon et d'un mouton par un seul expérimentateur

C

Un proton : association de trois quarks chacun de spin $1/2$

D

Une paire de Cooper : association de deux électrons grâce à un phonon.



Question 2

Le spin j d'un système de 2 particules de spin j_1 et j_2 appartient à l'ensemble $[|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, |j_1 + j_2|]$.

Parmi ces états liés quel est le boson ?

Réponse : Une paire de Cooper, association de deux électrons via un phonon.

La somme d'un nombre pair de spin demi entier ne peut donner qu'un spin entier, et réciproquement la somme d'un Nombre impair de spin demi-entier ne peut donner qu'un spin demi-entier.

Par exemple, pour le proton composé de 2 quarks up ($s_u = \frac{1}{2}$) et un quark down ($s_d = \frac{1}{2}$), on calcule que :

$$p = (u, u, d) \implies s_p = (s_u \oplus s_u) \oplus s_d = [0, 1] \oplus s_d = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

Le spin du proton est donc toujours demi-entier, c'est un fermion, dans son état fondamental le proton est de spin $\frac{1}{2}$.

Il en va de même pour le spin de l'hélium 3 composé de 5 fermions.

Par contre une paire de Cooper (état lié de 2 électrons) possède un spin dont les valeurs possibles sont soit $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ soit $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Les paires de Cooper sont donc des bosons, en se condensant à basse température ils jouent un rôle fondamental dans la supraconductivité.

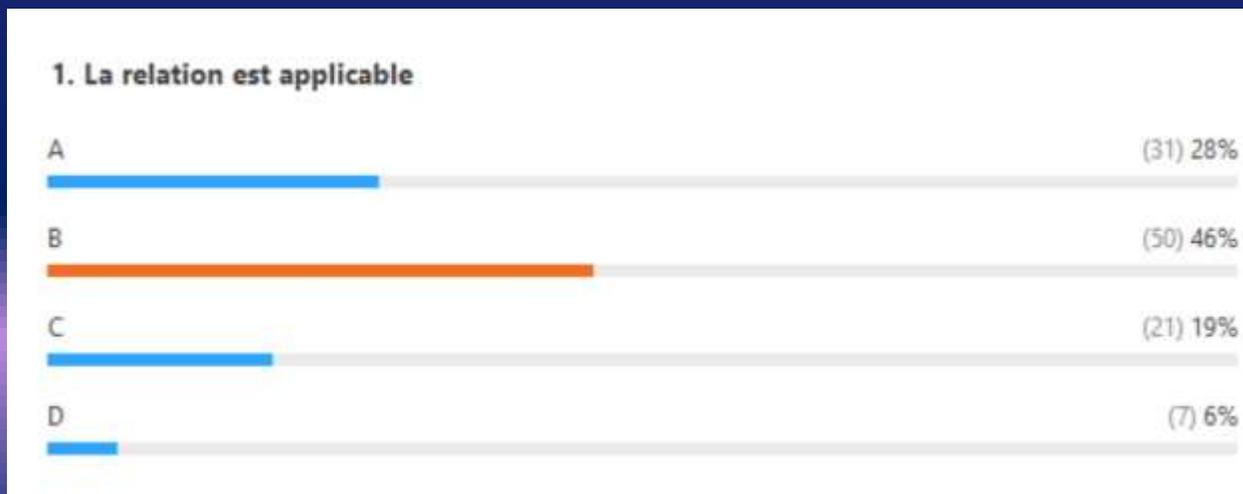
La relation $U = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \Big|_V$ est applicable

A dans tous les cas !

B uniquement pour un gaz parfait de particules dont le potentiel chimique est nul.

C uniquement dans la limite classique.

D après le couvre feu sur présentation d'une attestation de déplacement.



Question 3 La relation $U = -N \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right|_V$ est applicable

Réponse : uniquement dans la limite classique.

Dans le cadre du cours*, la fonction de partition est définie comme $Z = \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i}$

Cette définition provient du fait qu'en statistique de Maxwell-Boltzmann, la répartition d'équilibre s'écrit $n_i^e = g_i e^{-\beta \epsilon_i} e^{\beta \mu}$

Ainsi en écrivant que $N = \sum_i n_i$ on peut exprimer le potentiel chimique comme $e^{\beta \mu} = \frac{N}{Z}$ et utiliser Z pour déterminer

toutes les grandeurs thermodynamiques, comme par exemple $U^e = \sum_i n_i^e \epsilon_i = e^{\beta \mu} \sum_i g_i \epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i} = -N \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right|_V$

Si l'on ne se trouve pas dans la limite classique $n_i^e = \frac{g_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \pm 1}$ et dans la somme donnant l'énergie on trouve

$U^e = \sum_i \frac{g_i \epsilon_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \pm 1} = e^{\beta \mu} \sum_i \frac{g_i \epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i}}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}} \neq -N \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right|_V$ car le potentiel chimique ne se factorise plus

complètement dans la somme. On peut cependant trouver des expressions générales similaires en utilisant le potentiel

chimique comme variable. Dans le cours on utilise $\chi = \beta \mu$ et les fonctions $f(\chi)$ et $h(\chi)$, pour des bosons non relativistes

en nombre déterminé N on obtient par exemple dans la limite continue

$$U^e = \frac{3N}{2\beta} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \chi} \right)^{-1} \text{ avec } f(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\chi}}{n^{5/2}}$$

* Cette définition n'est pas toujours la même dans tous les cours ...



À LA SEMAINE PROCHAINE !