

De la physique statistique à la mécanique des fluides

Jérôme Perez – Mars 2018

February 13, 2023

1 La fonction de distribution de Boltzmann

1.1 Le théorème H

Dans l'hypothèse de Boltzmann tous les états microscopiques sont équiprobables. Si l'on note Ω le nombre de ces états microscopiques et si chacun conduit à un état macroscopique différent, l'entropie S du système sera donnée par $S = k_B \ln \Omega$. La probabilité d'être dans un état macroscopique donné sera uniforme $F_B = \Omega^{-1}$. Si Ω est constant, l'entropie sera constante et sa moyenne $\langle S \rangle = k_B \langle \ln \Omega \rangle = -k_B \langle \ln F_B \rangle$. Ce cas particulier qui peut paraître simpliste correspond en fait à de nombreuses situations appelées microcanoniques.

Si l'on considère maintenant les N particules constituant le système aux positions $\mathbf{r}_{i=1,\dots,N}$ et avec les impulsions $\mathbf{p}_{i=1,\dots,N}$, on peut définir l'état \mathbf{w}_i qui à l'instant t correspond au fait que la particule i possède l'impulsion \mathbf{p}_i à $d\mathbf{p}_i$ près et se trouve à la position \mathbf{r}_i à $d\mathbf{r}_i$ près. Dans une approche heuristique la quantité

$$P(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) = F^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) \prod_{i=1}^N d\mathbf{w}_i$$

correspond à la probabilité pour que la particule $i = 1, \dots, N$ se trouve dans l'état \mathbf{w}_i à l'instant t et $F^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t)$ correspond à la densité de probabilité associée. La position et l'impulsion de chaque particule deviennent des variables aléatoires décrites par une densité de probabilité à $6N + 1$ variables pour N particules. Cette dernière quantité généralise la quantité F_B introduite par Boltzmann dans le cas particulier microcanonique. La définition de l'entropie moyenne devient dans ce contexte probabiliste

$$\langle S \rangle = -k_B \int F^{(N)} \ln F^{(N)} d\mathbf{W} \quad \text{avec } d\mathbf{W} = \prod_{i=1}^N d\mathbf{w}_i$$

qui s'interprète naturellement comme une espérance mathématique. Tout est maintenant prêt pour calculer la variation temporelle de l'entropie.

En dérivant sous le signe somme il vient

$$\frac{d\langle S \rangle}{dt} = -k_B \int \left(\frac{dF^{(N)}}{dt} \ln F^{(N)} + \frac{dF^{(N)}}{dt} \right) d\mathbf{W} \quad (1)$$

Précisons deux choses :

- À chaque instant la distribution de probabilité est normalisée, ainsi

$$\forall t, \quad 1 = \int F^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) d\mathbf{W} \implies \int \frac{dF^{(N)}}{dt} d\mathbf{W} = 0 \quad (2)$$

- À l'équilibre l'entropie et sa valeur moyenne sont constantes :

$$\langle S_o \rangle = -k_B \int F^{(N)} \ln F_o^{(N)} d\mathbf{W} = \text{cste} \implies \frac{d\langle S_o \rangle}{dt} = -k_B \int \frac{dF^{(N)}}{dt} \ln F_o^{(N)} d\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (3)$$

On peut donc récrire l'équation (1) en annulant le terme calculé en (2) et en soustrayant le terme nul donné par (3) il vient

$$\frac{d\langle S \rangle}{dt} = \frac{d\langle S \rangle}{dt} - \frac{d\langle S_o \rangle}{dt} = -k_B \int \frac{dF^{(N)}}{dt} (\ln F^{(N)} - \ln F_o^{(N)}) d\mathbf{W} = -k_B \int \frac{dF^{(N)}}{dt} \ln (F^{(N)}/F_o^{(N)}) d\mathbf{W} \quad (4)$$

Dans son article de 1872, Boltzmann explique la variation de la fonction de distribution au voisinage de l'équilibre $F_o^{(N)}$ à partir du temps de vol τ qui correspond au temps moyen entre deux collisions pour une particule donnée.

$$\frac{dF^{(N)}}{dt} = \frac{F_o^{(N)} - F^{(N)}}{\tau}$$

cette relation, qui sera très discutée à l'époque, se comprend comme le premier ordre du développement limité de l'expression de la dérivée temporelle de $F^{(N)}$. En l'utilisant dans (4), il vient

$$\frac{d\langle S \rangle}{dt} = -\frac{k_B}{\tau} \int (F_o^{(N)} - F^{(N)}) \ln (F^{(N)}/F_o^{(N)}) d\mathbf{W} = -\frac{k_B}{\tau} \int F_o^{(N)} (1 - F^{(N)}/F_o^{(N)}) \ln (F^{(N)}/F_o^{(N)}) d\mathbf{W}$$

la distribution d'équilibre $F_o^{(N)}$ est positive, et la fonction $\varphi : x \mapsto (1-x) \ln x$ est négative pour $x > 0$, elle atteint son maximum $\varphi^{\max} = 0$ lorsque $x = 0$. On peut donc en déduire que l'entropie est une fonction croissante et qu'elle atteint son maximum à l'équilibre pour lequel $F^{(N)} = F_o^{(N)}$. C'est le second principe de la thermodynamique, ou bien en physique statistique le théorème H .

1.2 L'équation de Boltzmann

Si le système est hamiltonien les équations de Hamilton nous donnent

$$\forall i = 1, \dots, N \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = +\text{grad}_{\mathbf{p}_i} H \\ \dot{\mathbf{p}}_i = -\text{grad}_{\mathbf{r}_i} H \end{cases} \quad \text{avec } H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

où Φ désigne l'énergie potentielle contenue dans le système.

Grâce à ces équations on peut expliciter la dérivée temporelle de $F^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t)$ qui s'écrit

$$\frac{dF^{(N)}}{dt} = \frac{\partial F^{(N)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N +\text{grad}_{\mathbf{p}_i} H \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}_i} F^{(N)} - \text{grad}_{\mathbf{r}_i} H \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}_i} F^{(N)} = \frac{\partial F^{(N)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_i} \quad (5)$$

C'est l'équation de Liouville dont la solution est la fonction $F^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t)$ qui permet une description certes probabiliste mais complète du système. Un certain nombre d'hypothèses permettent de réduire le nombre de variables. Introduisons par exemple la première loi marginale :

$$F^{(1)}(\mathbf{w}_1, t) = \int F^{(N)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \dots, \mathbf{w}_N, t) d\mathbf{w}_2 \dots d\mathbf{w}_N$$

En intégrant l'équation de Liouville sur toutes les variables sauf \mathbf{w}_1 il vient :

- Pour la dérivée partielle par rapport au temps on intervertit simplement la dérivée et l'intégrale

$$\int \frac{\partial F^{(N)}}{\partial t} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N = \frac{\partial}{\partial t} \int F^{(N)} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}$$

- Le second terme de la somme mérite un peu plus d'attention

$$\sum_{i=1}^N \int \frac{\mathbf{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_i} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N = \int \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N + \sum_{i=2}^N \int \frac{\mathbf{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_i} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N$$

chacun des termes de la somme pour $i = 2$ jusqu'à N est nul car $F^{(N)} \rightarrow 0$ sur le bord du système. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int \frac{\mathbf{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_i} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N &= \int \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \\ &= \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \int F^{(N)} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N = \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \mathbf{r}_1} \end{aligned}$$

- Le dernier terme se traite de la même façon pour des raisons semblables

$$\sum_{i=1}^N \int \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_i} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N = \int \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N$$

L'équation de Liouville s'exprime donc sous la forme

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \mathbf{r}_1} = \int \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N. \quad (6)$$

C'est ici que le génie de Boltzmann intervient. Il introduit la fonction de distribution à 2 particules

$$F^{(2)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) = \int F^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) d\mathbf{w}_3 \cdots d\mathbf{w}_N$$

que l'on peut toujours écrire sous la forme

$$F^{(2)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) = F^{(1)}(\mathbf{w}_1, t) F^{(1)}(\mathbf{w}_2, t) + g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) \quad (7)$$

où $g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)$ décrit les interactions entre paires de particules.

Si les particules sont indiscernables et indépendantes on peut représenter le système par une particule test indicée 1 évoluant sous l'action de toutes les autres indicées 2. Le potentiel se factorise alors sous la forme

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \quad (8)$$

Sous les hypothèses (7) et (8) le membre de droite de l'équation (6) se sépare en 2 et s'écrit

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N &= \int d\mathbf{w}_2 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \int F^{(N)} d\mathbf{w}_3 \cdots d\mathbf{w}_N \\ &= \int d\mathbf{w}_2 \frac{\partial V(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} \\ &= \frac{\partial F^{(1)}(\mathbf{w}_1, t)}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \int V F^{(1)}(\mathbf{w}_2, t) d\mathbf{w}_2 + \int d\mathbf{w}_2 g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_1} \end{aligned}$$

en introduisant finalement le potentiel de champ moyen

$$U(\mathbf{r}_1, t) = \int V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) F^{(1)}(\mathbf{w}_2, t) d\mathbf{w}_2$$

et l'opérateur de collision

$$C(\mathbf{w}_1, t) = \int d\mathbf{w}_2 g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) \frac{\partial V(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)}{\partial \mathbf{r}_1}$$

en oubliant l'indice 1 devenu inutile pour la particule test et en notant $f = F^{(1)}$, on obtient l'équation de Boltzmann de 1872

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = C(\mathbf{w}, t)$$

le lecteur attentif qui aura bien compris la démonstration du théorème H se convaincra sans peine qu'une expression simple de l'opérateur de collision peut être

$$C(\mathbf{w}, t) = C(f, t) = \frac{f_o - f}{\tau}$$

qui constitue l'approximation dite du temps de vol et qui permet de traiter les systèmes proches de leur équilibre f_0 .

2 Equations de la mécanique des fluides

L'étude générale des propriétés de l'équation de Boltzmann et de ses moment est encore un sujet de recherche contemporain. Simplifions un peu plus la situation en supposant le système non collisionnel : $C(f) = 0$. Cette hypothèse est moins forte que celle du gaz parfait dans laquelle il n'y a aucune interaction ($U \equiv 0$), pour un gaz non collisionnel les particules peuvent interagir (gravité, électromagnétisme, etc.) mais sans collision : les particules se sentent mais ne se voient pas...

L'équation de Boltzmann devient celle de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) - \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) = 0 \quad (9)$$

On calcule les moments d'une quantité scalaire x sur l'espace des impulsions pour cette équation, c'est-à-dire

$$\mathcal{M}_n(x) = \int x^n \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) - \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) \right] d\mathbf{p} = 0$$

La fonction $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ est la fonction de distribution de probabilité de présence du système dans l'espace des phases à chaque instant. Elle est donc mesurable pour chacune de ses variables indépendantes \mathbf{r} et \mathbf{p} et en particulier

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0$$

Les lois marginales

$$\nu(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \quad \text{et} \quad \omega(\mathbf{p}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r}$$

sont des fonctions régulières et mesurables, à chaque instant t , elles correspondent aux densité volumiques respectives dans l'espace des positions pour $\nu(\mathbf{r}, t)$ et dans l'espace des impulsions pour $\omega(\mathbf{p}, t)$. La fonction $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ n'est pas nécessairement normalisée à l'unité mais plutôt au nombre de particules constituant le système. Ces particules toutes identiques et de masse m sont alors réparties selon une densité volumique de masse

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m\nu(\mathbf{r}, t) = m \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}$$

2.1 Moment d'ordre 0 : Equation de continuité

La linéarité de l'intégrale permet d'écrire

$$\mathcal{M}_0 = \int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{p} + \frac{1}{m} \int \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) d\mathbf{p} - \int \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p} = 0$$

Etudions séparément chacun des termes :

- La dérivée partielle par rapport au temps n'est pas affectée par l'intégration sur l'espace des impulsions, on a donc

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d\mathbf{p} = \frac{\partial \nu}{\partial t}$$

- Les variables \mathbf{p} et \mathbf{r} sont indépendantes : $\text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = \text{div}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = 0$. Plus explicitement on a $\text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}f) = f \text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) = \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f)$. On peut donc sans problème sortir le gradient sur les positions de l'intégration sur les impulsions dans le second terme

$$\frac{1}{m} \int \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \int \text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}f) d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \text{div}_{\mathbf{r}} \left(\int \mathbf{p} f d\mathbf{p} \right)$$

Dans cette dernière intégrale on voit apparaître le moment d'ordre 1 des impulsions

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{\int \mathbf{p} f d\mathbf{p}}{\int f d\mathbf{p}} = \frac{\int \mathbf{p} f d\mathbf{p}}{\nu}$$

que l'on appelle en physique le champ des impulsions, c'est un champ de vecteurs qui dépend de \mathbf{r} et de t et qui donne l'impulsion moyenne du système au point de l'espace et à l'instant considéré. La présence de la densité au dénominateur prend en compte le fait que la fonction de distribution n'est pas nécessairement normée à l'unité. Finalement, on aura

$$\frac{1}{m} \int \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \text{div}_{\mathbf{r}}[\nu \langle \mathbf{p} \rangle]$$

en faisant apparaître le champ moyen des vitesses dans le système

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m} \quad (10)$$

il vient

$$\frac{1}{m} \int \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) d\mathbf{p} = \text{div}_{\mathbf{r}}[\nu \langle \mathbf{v} \rangle]$$

- Afin de pouvoir éliminer les termes de dissipation et écrire l'équation de Vlasov, le système est supposé conservatif. L'énergie potentielle U ne dépend ainsi que de la position et son gradient donne l'ensemble des champs de forces qui s'appliquent au système. La fonction $\nabla_{\mathbf{r}}U$ n'est donc pas affectée par l'intégration sur les impulsions, elle peut sortir de l'intégrale et l'on a

$$- \int \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p} = -\text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \int \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p}$$

Les propriétés de la fonction de distribution sur le bord du système, fut-il renvoyé à l'infini, permettent donc d'annuler ce terme :

$$\int \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p} = \vec{0} \implies - \int \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p} = 0$$

Le moment d'ordre 0 de l'équation de Vlasov s'écrit donc

$$\mathcal{M}_0 = \frac{\partial \nu}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{r}} [\nu \langle \mathbf{v} \rangle] = 0$$

En introduisant le champ de masse volumique dans le système $\rho(\mathbf{r}, t) = m\nu(\mathbf{r}, t)$ où m est une masse caractéristique (moyenne) des constituants du système cette équation s'écrit finalement

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{r}} [\rho \langle \mathbf{v} \rangle] = 0} \quad (11)$$

Cette équation est appelée équation de continuité, elle décrit la conservation du nombre de particules et donc de la masse totale ou locale.

2.2 Moment d'ordre 1 : Equation d'Euler

La linéarité de l'intégrale permet toujours d'écrire

$$\mathcal{M}_1(p_i) = \int \frac{\partial f}{\partial t} p_i d\mathbf{p} + \frac{1}{m} \int p_i \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) d\mathbf{p} - \int p_i \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p} = 0$$

En explicitant les produits scalaires il vient

$$\mathcal{M}_1(p_i) = \int \frac{\partial f}{\partial t} p_i d\mathbf{p} + \sum_{j=1}^3 \int \frac{p_i p_j}{m} \frac{\partial f}{\partial r_j} d\mathbf{p} - \sum_{j=1}^3 \int p_i \frac{\partial U}{\partial r_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} d\mathbf{p} = 0$$

- Les équations de Hamilton s'écrivent en utilisant les crochets de Poisson sous la forme $\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \{\mathbf{p}, H\}$, cette équation implique que $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \vec{0}$, on peut donc comme pour le moment d'ordre 0, sortir la dérivée partielle par rapport au temps de l'intégrale dans le premier terme qui devient

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} p_i d\mathbf{p} = \int \frac{\partial (p_i f)}{\partial t} d\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int p_i f d\mathbf{p} \right) = \frac{\partial [\nu \langle p_i \rangle]}{\partial t}$$

- Le fait que les impulsions et les positions soient des variables indépendantes s'écrit $\frac{\partial p_i}{\partial r_j} = 0$ pour tous les choix possibles de i et j . Le terme central s'écrit donc

$$\sum_{j=1}^3 \int \frac{p_i p_j}{m} \frac{\partial f}{\partial r_j} d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^3 \int \frac{\partial (p_i p_j f)}{\partial r_j} d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_j} \int p_i p_j f d\mathbf{p}$$

Dans cette dernière équation on voit maintenant apparaître un moment de produits d'impulsions

$$\langle p_i p_j \rangle = \frac{\int p_i p_j f d\mathbf{p}}{\int f d\mathbf{p}} = \frac{\int p_i p_j f d\mathbf{p}}{\nu}$$

ainsi

$$\sum_{j=1}^3 \int \frac{p_i p_j}{m} \frac{\partial f}{\partial r_j} d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\nu \langle p_i p_j \rangle]}{\partial r_j}$$

- Enfin, dans le dernier terme le facteur $\frac{\partial U}{\partial r_j}$ ne dépend pas des impulsions il est donc constant lors de l'intégration sur celles-ci et peut sortir de l'intégrale qui devient

$$- \sum_{j=1}^3 \int p_i \frac{\partial U}{\partial r_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} d\mathbf{p} = - \frac{\partial U}{\partial r_j} \sum_{j=1}^3 \int p_i \frac{\partial f}{\partial p_j} d\mathbf{p}$$

qu'une intégration par partie transforme en

$$-\sum_{j=1}^3 \int p_i \frac{\partial U}{\partial r_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} d\mathbf{p} = 0 + \frac{\partial U}{\partial r_j} \sum_{j=1}^3 \int f \frac{\partial p_i}{\partial p_j} d\mathbf{p} = \frac{\partial U}{\partial r_i} \int f d\mathbf{p} = \nu \frac{\partial U}{\partial r_i}$$

Finalement, la somme des trois termes donne

$$\mathcal{M}_1(p_i) = \frac{\partial [\nu \langle p_i \rangle]}{\partial t} + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\nu \langle p_i p_j \rangle]}{\partial r_j} + \nu \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0$$

en faisant apparaître le champ de vitesse (10) et en écrivant que $\langle p_i p_j \rangle = m^2 \langle v_i v_j \rangle$ il vient

$$\frac{\partial [\rho \langle v_i \rangle]}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\rho \langle v_i v_j \rangle]}{\partial r_j} + \nu \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0$$

ou encore

$$\langle v_i \rangle \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\rho \langle v_i v_j \rangle]}{\partial r_j} + \nu \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0$$

En retirant à cette dernière forme, l'équation de continuité multipliée par $\langle v_i \rangle$ il vient

$$\rho \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\rho \langle v_i v_j \rangle]}{\partial r_j} + \nu \frac{\partial U}{\partial r_i} - \langle v_i \rangle \operatorname{div}_{\mathbf{r}} [\rho \langle \mathbf{v} \rangle] = 0$$

en explicitant la divergence on obtient

$$\langle v_i \rangle \operatorname{div}_{\mathbf{r}} [\rho \langle \mathbf{v} \rangle] = \langle v_i \rangle \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\rho \langle v_j \rangle]}{\partial r_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle]}{\partial r_j} - \sum_{j=1}^3 \rho \langle v_j \rangle \frac{\partial [\langle v_i \rangle]}{\partial r_j}$$

et donc finalement

$$\rho \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \langle v_j \rangle \frac{\partial [\langle v_i \rangle]}{\partial r_j} \right) = - \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial [\rho \sigma_{ij}^2]}{\partial r_j} \right) - \nu \frac{\partial U}{\partial r_i}$$

Où l'on a introduit la covariance du champ de vitesse (appelée aussi champ de contrainte cinétique)

$$\sigma_{ij}^2 = \langle v_i v_j \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle$$

Il ne reste plus qu'à introduire le champ de pression $P(\mathbf{r}, t)$ dans le fluide tel que (par définition¹)

$$\frac{\partial P}{\partial r_i} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial [\rho \sigma_{ij}^2]}{\partial r_j} \right)$$

et le potentiel $\psi(\mathbf{r}, t)$ des forces non dissipatives au sein du fluide tel que $U = m\psi$ pour avoir

$$\rho \left(\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + [\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{r}}] \langle \mathbf{v} \rangle \right) = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}}(P) - \rho \operatorname{grad}_{\mathbf{r}}(\psi)$$

qui est l'équation d'Euler que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\boxed{\rho \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}}(P) - \rho \operatorname{grad}_{\mathbf{r}}(\psi)}$$

¹L'œil aiguisé du lecteur remarquera qu'ainsi défini le champ de pression est un objet bizarre caractérisé par le fait que son gradient s'écrit à partir de la divergence du champ de contrainte. Il s'agit d'une pression cinétique due à des propriétés de non uniformité du champ de vitesse.

2.3 Conclusion

L'équation de continuité et l'équation d'Euler forment le système de base pour l'étude des fluides non dissipatifs. Elle s'écrivent comme un système d'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho \langle \mathbf{v} \rangle] = 0 \\ \rho \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -\operatorname{grad} P - \rho \operatorname{grad} \psi \end{cases} \quad (12)$$

L'inconnue de ce système d'équations aux dérivées partielles est bien souvent le champ moyen $\langle \mathbf{v} \rangle$ des vitesses dans le fluide. Ce champ de vecteur est une fonction de la position \mathbf{r} et du temps t . Une hypothèse courante est de supposer l'existence d'une équation d'état du fluide, i.e. une relation entre le champ de pression P dans le fluide et le champ de densité volumique de masse ρ . Pour un fluide parfait nous avons vu dans le cours de physique statistique que cette équation d'état pouvait être barotropique, c'est-à-dire de la forme

$$P = \omega \rho$$

où la constante ω dépend de la nature du fluide. Les deux inconnues du problème sont alors les fonctions $\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t)$ et $\rho(\mathbf{r}, t)$ que l'on peut tenter d'obtenir en résolvant le système (12). Dans le cas général cette résolution est souvent numérique et nécessite d'une part la donnée du champ moyen de potentiel $\psi(\mathbf{r}, t)$ au sein du fluide et d'autre part la précision d'un nombre suffisant de conditions en temps et en espace. Ces conditions, ou contraintes, généralisent pour les équations aux dérivées partielles les conditions initiales que l'on doit fournir pour obtenir la solution d'un problème décrit par une équation différentielle.

Si le système n'est plus conservatif tout s'écroule dans le modèle précédent !

Les sources de dissipation sont si variées qu'il n'est plus possible de faire une théorie générale. Si l'on repart de l'équation de Boltzmann, on peut tenter de fabriquer un terme $C(f)$ afin de prendre en compte un certain type de dissipation. On pourra généraliser le théorème H pour une large classe de systèmes dissipatifs. On montrera qu'un certain type de dissipation peut être résumé un coefficient μ appelé viscosité dynamique, dans les cas simples l'équation de continuité demeure valide et l'équation d'Euler devient celle de Navier-Stokes

$$\rho \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -\operatorname{grad} P - \rho \operatorname{grad} \psi - \mu \Delta \langle \mathbf{v} \rangle$$

Toutes les formes de dissipation ne peuvent pas être prises en compte par cette équation. Pour les fluides peu denses, et dans le cadre d'une théorie du proche équilibre, on peut exprimer le coefficient de viscosité en fonction de caractéristiques microscopiques du fluide. Dans le cas plus général, cette équation est purement macroscopique et s'interprète à partir d'un bilan d'impulsion.