Travaux dirigés de physique statistique
PA 201
Un magnifique gaz de fermions dégénérés

Une étoile est un objet physique en équilibre entre deux pressions antagonistes :

- la pression de la force gravitationnelle associée à sa masse et qui tend à la comprimer;
- une pression interne dont l'origine est variée et qui est provoquée par l'état de température et de densité du gaz ionisé qui la compose.

Après avoir fusioné tout son hydrogène en hélium une étoile comme le soleil se contracte pour augmenter la température de son cœur afin de pouvoir fusionner cet hélium en carbone. L'étoile devient une géante rouge. Dans ces deux premières phase la pression est de type cinétique.

Une fois l'hélium épuisé, la pression radiative due à la fusion s'arrète et l'étoile s'effondre : seule une pression d'origine quantique arrive alors à stopper ce processus...

On assimile une naine blanche à une sphère de rayon R composée de n atomes de carbone, pour simplifier les calculs nous supposerons que la densité ρ est constante dans l'étoile. La température de plusieurs dizaines de milliers de Kelvins en surface et millions de Kelvins au cœur assure une ionisation complète des atomes de carbone. Le confinement gravitationnel assure donc l'existence d'un gaz de $N = Zn$ électrons. La masse totale de la naine blanche s'écrit dans notre modèle très simplifié $M = ANm_p/Z$, dans cette dernière relation nous avons négligé la masse de l'électron m_e devant celle du proton m_p (prise égale à celle du neutron), A représente le nombre de nucléons dans le noyau (12 pour le carbone ordinaire) et Z le numéro atomique, nous avons donc pour le carbone ($Z = 6$)

$$6n = N, \quad M = 2Nm_p \qquad N = \frac{M}{2m_p} \tag{1}$$

Les observations du mouvement de ces étoiles montrent que $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg (ordre de grandeur de la masse du soleil) pour un rayon typique $R = 10\ 000$ km : la masse du soleil dans le volume de la terre !

1. Montrer que l'on peut se placer dans l'hypothèse de température nulle.
2. Déterminer l'expression de l'énergie interne au sein de ce gaz d'électron complètement dégénéré, en déduire sa pression à $T = 0\,\mathrm{K}$. On exprimera cette pression en fonction de m_e, m_p, M et R. Que pensez-vous de la pression associée au gaz dégénéré formé par les noyaux ?
3. En faisant l'hypothèse que la pression des électrons dégénérés est équilibrée par la pression gravitationnelle induite par la masse de la naine blanche déterminer une relation entre le rayon et la masse de la naine blanche dans le cadre de cette théorie classique.
4. En utilisant le résultats de la question 1, déterminer un ordre de grandeur possible de la vitesse des électrons. Conclusion...
5. Reprendre le calcul de la pression de dégénérescence des électrons en prenant en compte la conclusion de la question précédente.
6. Montrer que l'équilibre entre la pression de gravitation et celle de dégénérescence électronique conduit, d'après les conclusions de la question 4, à l'existence d'une masse limite pour les naines blanches.

Valeurs numériques

$\hbar \ = \ 1,05457148 \times 10^{-34} \mathrm{m}^2.\mathrm{kg.s}^{-1}$
$m_p \ = \ 1,67262158 \times 10^{-27} \ \mathrm{kg}$

$m_e \ = \ 9,10938188 \times 10^{-31} \ \mathrm{kg}$

$G \ = \ 6,67428 \times 10^{-11} \ \mathrm{m}^3 \ \mathrm{kg}^{-1} \ \mathrm{s}^{-2}$

$k \ = \ 1,3806504 \times 10^{-23} \mathrm{J} \ \mathrm{K}^{-1}$

$c \ = \ 2,99 \times 10^8 \mathrm{m} \ \mathrm{s}^{-1}$

Un petit coup de pouce ...

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x^2}dx &= \frac{x}{4}(1+x^2)^{3/2} - \frac{x}{8}(1+x^2)^{1/2} - \frac{1}{8}\operatorname{arg\,sinh}(x) \\ &= \frac{1}{4}\left[x^4 + x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \ln\left(2x\right)\right)\right] + o\left(x^{-1}\right) \quad \text{si } x \to +\infty\end{aligned}$$