Travaux dirigés de physique statistique
PA 102
Concepts classiques ...

Exercice 1 Paradoxe de Gibbs : pourquoi faut-il corriger la statistique de Maxwell-Boltzmann ?

On considère une assemblée de N particules classiques (donc a priori discernables) de masse m. On suppose que ces particules sont libres de toute force et astreintes à rester dans un volume fixe V. Leur énergie est donc purement cinétique $\varepsilon = p^2/2m$.

A chaque instant, on organise l'espace des énergies accessibles à ces particules en boites repérées par une indice entier i chacune rassemblant les particules de même énergie. L'indice i peut tendre vers l'infini (sous réserve de convergence des sommes) et la taille de chaque boîte peut dépendre de la boîte sans nuire à la généralité du problème. Toujours à chaque instant on note n_i le nombre de particules dans la boîte i. Le nombre total de particules et l'énergie totale du système sont conservés :

$$\sum_i n_i = N = cste \qquad \sum_i n_i \varepsilon_i = U = cste$$

On supposera toujours que $n_i \gg 1$. Le but de ce problème est de déterminer l'expression de l'entropie du système en fonction des propriétés statistiques de ses composants microscopiques dans diverses situations. On calculera dans chacun des deux cas suivants le nombre complexions W, la distribution d'équilibre en faisant apparaître une fonction de partition, puis l'énergie puis l'entropie à l'état d'équilibre, et on étudiera l'extensivité de cette dernière. On admettra (pour le moment) que

$$Z = \sum_i g(i) \exp(-\beta \epsilon_i) = \frac{V}{h^3} \left(2\pi m/\beta\right)^{3/2}$$

1. Equilibre de particules discernables dans des niveaux d'énergie dégénérés.
   La boite i est décomposée en g_i compartiments pouvant contenir chacun un nombre quelconque de particules.
2. Equilibre de particules indiscernables dans des niveaux d'énergie dégénérés.
   On fait l'hypothèse supplémentaire que les états sont faiblement peuplés : $\forall i \quad n_i/g_i \ll 1$.

Exercice 2 Le paramètre β est indépendant de la statistique considérée.

On considère un mélange d'électrons et de phonons, les premiers obéissent, lorsqu'ils sont seuls et à l'équilibre, à la statistique de Fermi-Dirac et les seconds à celle de Bose-Einstein. Le nombre de phonons n'est pas conservé. On admet que les niveaux d'énergie de chacune de ces deux familles de particules ne sont pas modifiés par le mélange.

Montrer qu'à l'équilibre les répartitions des phonons et des électrons sur leurs niveaux respectifs d'énergie ne dépendent que d'un seul paramètre commun β.