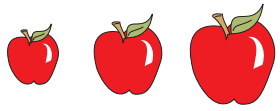
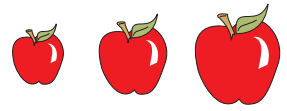


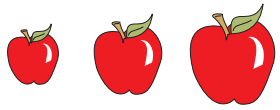
Physique Statistique



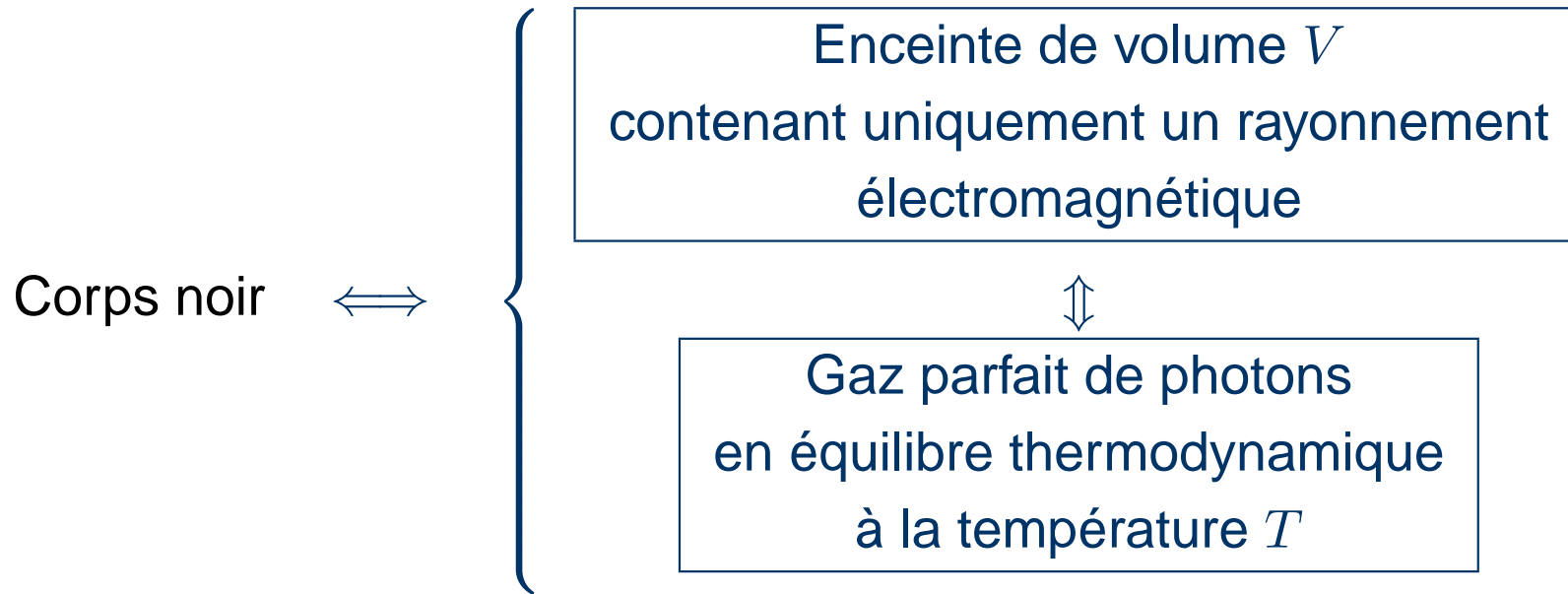
Le gaz parfait de bosons

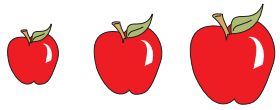


Théorie du corps noir

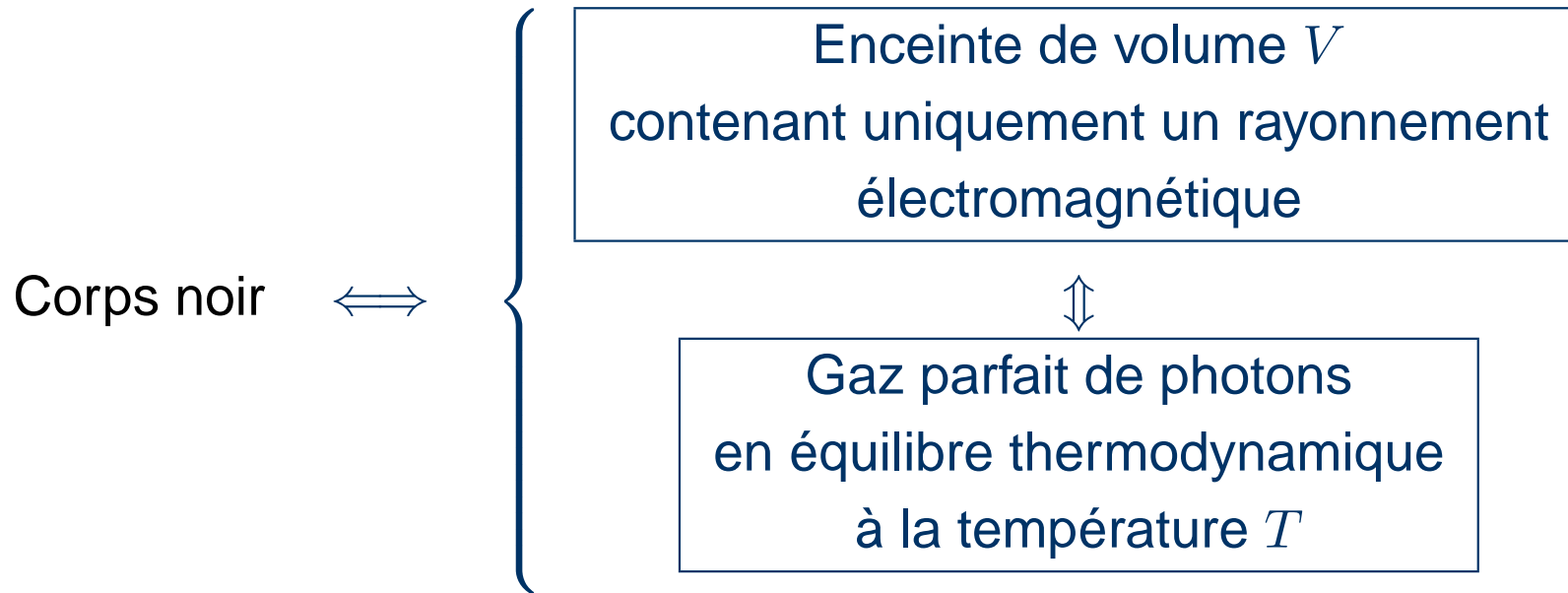


Théorie du corps noir

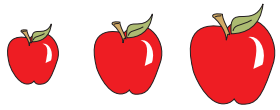




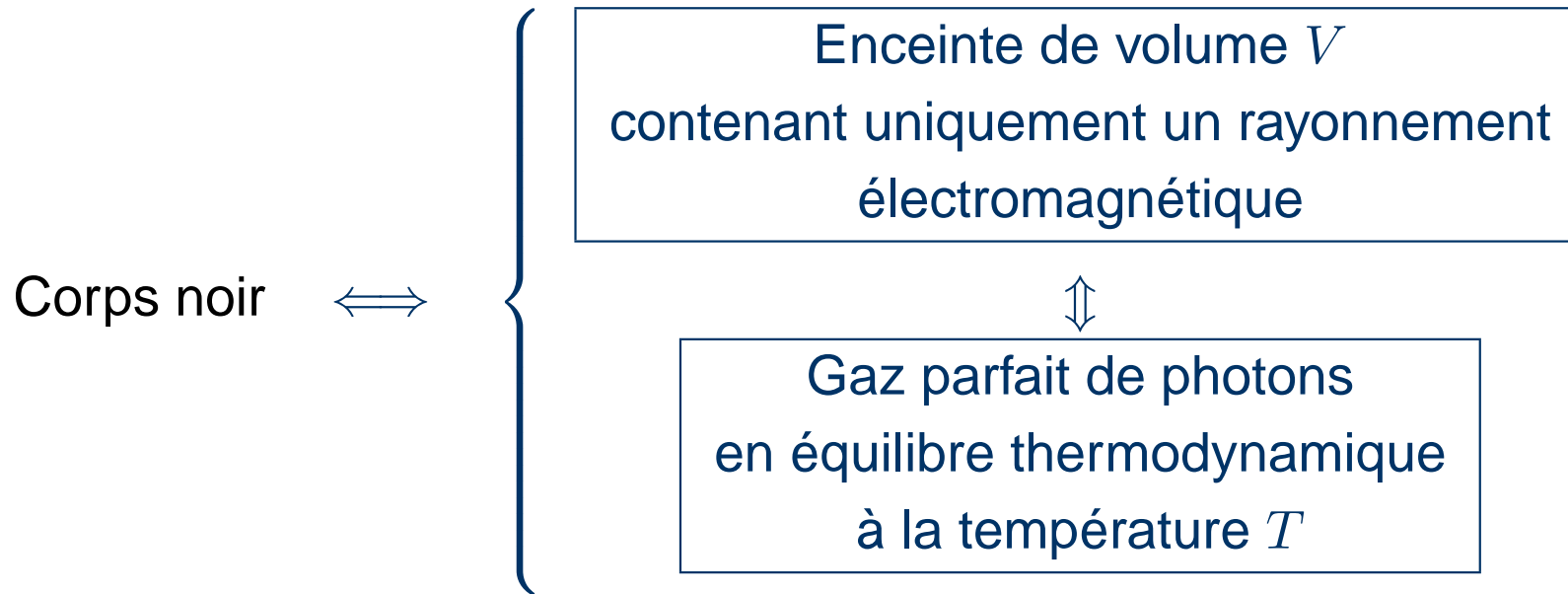
Théorie du corps noir



Nombre de photons NON conservé : création-anihilation permanente



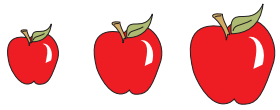
Théorie du corps noir



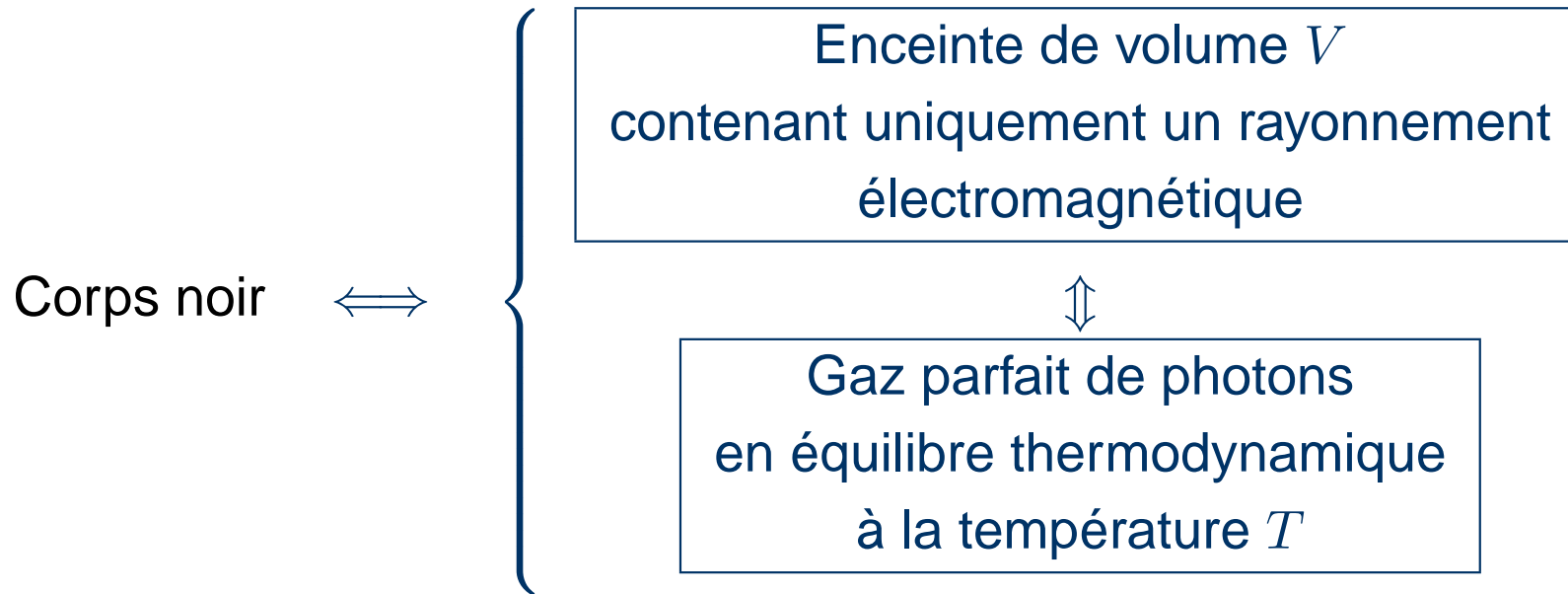
Nombre de photons NON conservé : création-anihilation permanente

À l'équilibre le nombre moyen n_i^o de photons d'énergie $\varepsilon \in [\varepsilon_i, \varepsilon_i + d\varepsilon_i]$ est donné par la distribution de Bose-Einstein

$$n_i^o = \frac{g_i}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1} \quad g_i : \text{dégénérescence associée à l'état d'énergie } \varepsilon_i.$$



Théorie du corps noir

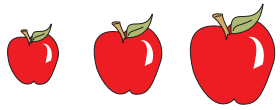


Nombre de photons NON conservé : création-anihilation permanente

À l'équilibre le nombre moyen n_i^o de photons d'énergie $\varepsilon \in [\varepsilon_i, \varepsilon_i + d\varepsilon_i]$ est donné par la distribution de Bose-Einstein

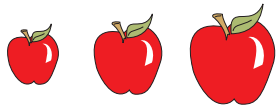
$$n_i^o = \frac{g_i}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1} \quad g_i : \text{dégénérescence associée à l'état d'énergie } \varepsilon_i.$$

1 seule contrainte : $U = cste$, 1 seul multiplicateur : $\beta = (kT)^{-1}$



Densité d'états

Limite continue de la répartition des niveaux d'énergie $g_i \longrightarrow g(\varepsilon) d\varepsilon$ densité d'états d'énergie : nombre de cellules dont l'énergie est dans l'intervalle $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$

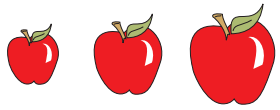


Densité d'états

Limite continue de la répartition des niveaux d'énergie $g_i \longrightarrow g(\varepsilon) d\varepsilon$ densité d'états d'énergie : nombre de cellules dont l'énergie est dans l'intervalle $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$

Dans l'espace des phases

$g(p) dp$: nombre de cellules correspondant à une impulsion dont le module est dans l'intervalle $[p, p + dp]$



Densité d'états

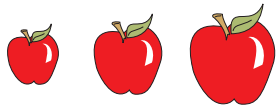
Limite continue de la répartition des niveaux d'énergie $g_i \longrightarrow g(\varepsilon) d\varepsilon$ densité d'états d'énergie : nombre de cellules dont l'énergie est dans l'intervalle $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$

Dans l'espace des phases

nombre de cellules correspondant
 $g(p) dp$: à une impulsion dont le module est
dans l'intervalle $[p, p + dp]$

Ce nombre correspond à un certain volume Ω de l'espace des phases

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_{p' \in [p, p+dp]} d\mathbf{x}' d\mathbf{p}' = V \int_{p' \in [p, p+dp]} d\mathbf{p}' = 4\pi V \int_p^{p+dp} p'^2 dp' \\ &= 4\pi V p^2 dp + o(dp)\end{aligned}$$



Densité d'états

Limite continue de la répartition des niveaux d'énergie $g_i \longrightarrow g(\varepsilon) d\varepsilon$ densité d'états d'énergie : nombre de cellules dont l'énergie est dans l'intervalle $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$

Dans l'espace des phases

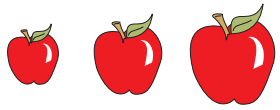
nombre de cellules correspondant
 $g(p) dp$: à une impulsion dont le module est
dans l'intervalle $[p, p + dp]$

Ce nombre correspond à un certain volume Ω de l'espace des phases

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_{p' \in [p, p+dp]} d\mathbf{x}' d\mathbf{p}' = V \int_{p' \in [p, p+dp]} d\mathbf{p}' = 4\pi V \int_p^{p+dp} p'^2 dp' \\ &= 4\pi V p^2 dp + o(dp)\end{aligned}$$

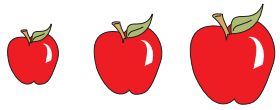
On connaît le volume $\delta = h^3$ d'une cellule, on a donc $g(p) dp = \frac{\Omega}{\delta}$ et finalement

$$g(p) dp = \frac{4\pi V p^2 dp}{h^3}$$



Pour un photon $\varepsilon = cp$

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \times \frac{4\pi V \varepsilon^2 d\varepsilon}{c^3 h^3} \quad 1 \vec{p} = 2 \text{ états de polarisation} \quad (1)$$

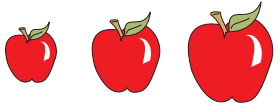


Pour un photon $\varepsilon = cp$

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \times \frac{4\pi V \varepsilon^2 d\varepsilon}{c^3 h^3} \quad 1 \vec{p} = 2 \text{ états de polarisation} \quad (1)$$

Finalement

$$n_i^o = \frac{g_i}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1} \longrightarrow \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$



Pour un photon $\varepsilon = cp$

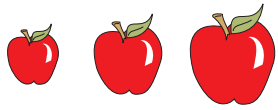
$$g(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \times \frac{4\pi V \varepsilon^2 d\varepsilon}{c^3 h^3} \quad 1 \vec{p} = 2 \text{ états de polarisation} \quad (1)$$

Finalement

$$n_i^o = \frac{g_i}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1} \longrightarrow \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

Relation d'Einstein $\varepsilon = h\nu$, s'écrit

$$\rho(\nu) d\nu = \frac{h\nu}{V} n^o = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \quad \begin{array}{l} \text{Densité spectrale d'énergie} \\ \text{Loi de Planck - 1900} \end{array} \quad (2)$$



Pour un photon $\varepsilon = cp$

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \times \frac{4\pi V \varepsilon^2 d\varepsilon}{c^3 h^3} \quad 1 \vec{p} = 2 \text{ états de polarisation} \quad (1)$$

Finalement

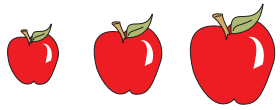
$$n_i^o = \frac{g_i}{e^{\beta \varepsilon_i} - 1} \longrightarrow \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\beta \varepsilon} - 1}$$

Relation d'Einstein $\varepsilon = h\nu$, s'écrit

$$\rho(\nu) d\nu = \frac{h\nu}{V} n^o = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \quad \begin{array}{l} \text{Densité spectrale d'énergie} \\ \text{Loi de Planck - 1900} \end{array} \quad (2)$$

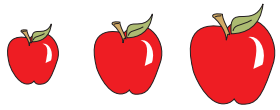
On en déduit la densité totale d'énergie \mathcal{U} émise dans tout le spectre de fréquence

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \int_0^{+\infty} \rho(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{+\infty} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \\ &= \frac{8\pi}{\beta^4 h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$



un pur régal

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \Gamma(4) \zeta(4) = \frac{\pi^4}{15} \quad (3)$$



un pur régal

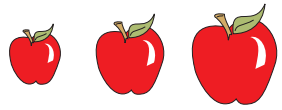
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \Gamma(4) \zeta(4) = \frac{\pi^4}{15} \quad (3)$$

donne

$$\mathcal{U} = aT^4 \quad \text{avec} \quad a = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3}$$

l'énergie totale est simplement

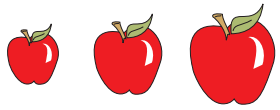
$$U = \mathcal{U}V = aVT^4 \quad \text{Relation de Stéfan-Boltzmann} \quad (4)$$



De S à P ...

Repartons de la base

$$\begin{aligned}\frac{S}{k} &= \ln W \simeq \sum_i \ln (n_i + g_i)! - \ln n_i! - \ln g_i! \\ &\simeq \sum_i n_i \ln \frac{n_i + g_i}{n_i} + g_i \ln \frac{n_i + g_i}{g_i}\end{aligned}$$



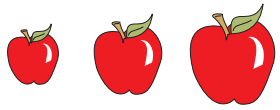
De S à P ...

Repartons de la base

$$\begin{aligned}\frac{S}{k} &= \ln W \simeq \sum_i \ln (n_i + g_i)! - \ln n_i! - \ln g_i! \\ &\simeq \sum_i n_i \ln \frac{n_i + g_i}{n_i} + g_i \ln \frac{n_i + g_i}{g_i}\end{aligned}$$

À l'équilibre et pour les photons ($\simeq \rightarrow =$)

$$\frac{S}{k} = \sum_i [n_i^o \beta \varepsilon_i - g_i \ln (1 - e^{-\beta \varepsilon_i})]$$



De S à P ...

Repartons de la base

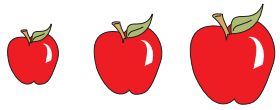
$$\begin{aligned}\frac{S}{k} &= \ln W \simeq \sum_i \ln (n_i + g_i)! - \ln n_i! - \ln g_i! \\ &\simeq \sum_i n_i \ln \frac{n_i + g_i}{n_i} + g_i \ln \frac{n_i + g_i}{g_i}\end{aligned}$$

À l'équilibre et pour les photons ($\simeq \rightarrow =$)

$$\frac{S}{k} = \sum_i [n_i^o \beta \varepsilon_i - g_i \ln (1 - e^{-\beta \varepsilon_i})]$$

Limite continue

$$\begin{aligned}\frac{S}{k} &= \beta U - \int_0^{+\infty} g(\varepsilon) d\varepsilon \ln (1 - e^{-\beta \varepsilon}) \\ &= \beta U - \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \int_0^{+\infty} \varepsilon^2 \ln (1 - e^{-\beta \varepsilon}) d\varepsilon\end{aligned}$$



$$...S = \frac{4}{3}aVT^3 \quad \text{conforme au principe de Nerst}$$



$$\dots S = \frac{4}{3}aVT^3 \quad \text{conforme au principe de Nerst}$$

On peut calculer l'énergie libre de Helmholtz

$$F = U - TS = -\frac{1}{3}aVT^4$$



$$\dots S = \frac{4}{3}aVT^3 \quad \text{conforme au principe de Nerst}$$

On peut calculer l'énergie libre de Helmholtz

$$F = U - TS = -\frac{1}{3}aVT^4$$

et d'en déduire la pression du rayonnement

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{3}aT^4 = \frac{1}{3}\mathcal{U}$$



$$\dots S = \frac{4}{3}aVT^3 \quad \text{conforme au principe de Nerst}$$

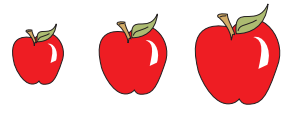
On peut calculer l'énergie libre de Helmholtz

$$F = U - TS = -\frac{1}{3}aVT^4$$

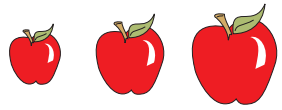
et d'en déduire la pression du rayonnement

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{3}aT^4 = \frac{1}{3}\mathcal{U}$$

Exercice : Émission d'un corps noir



Propriétés des solides

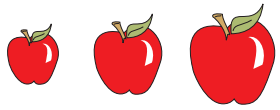


Propriétés des solides

Dès 1819, Dulong et Petit : c_V d'un solide = $3R$

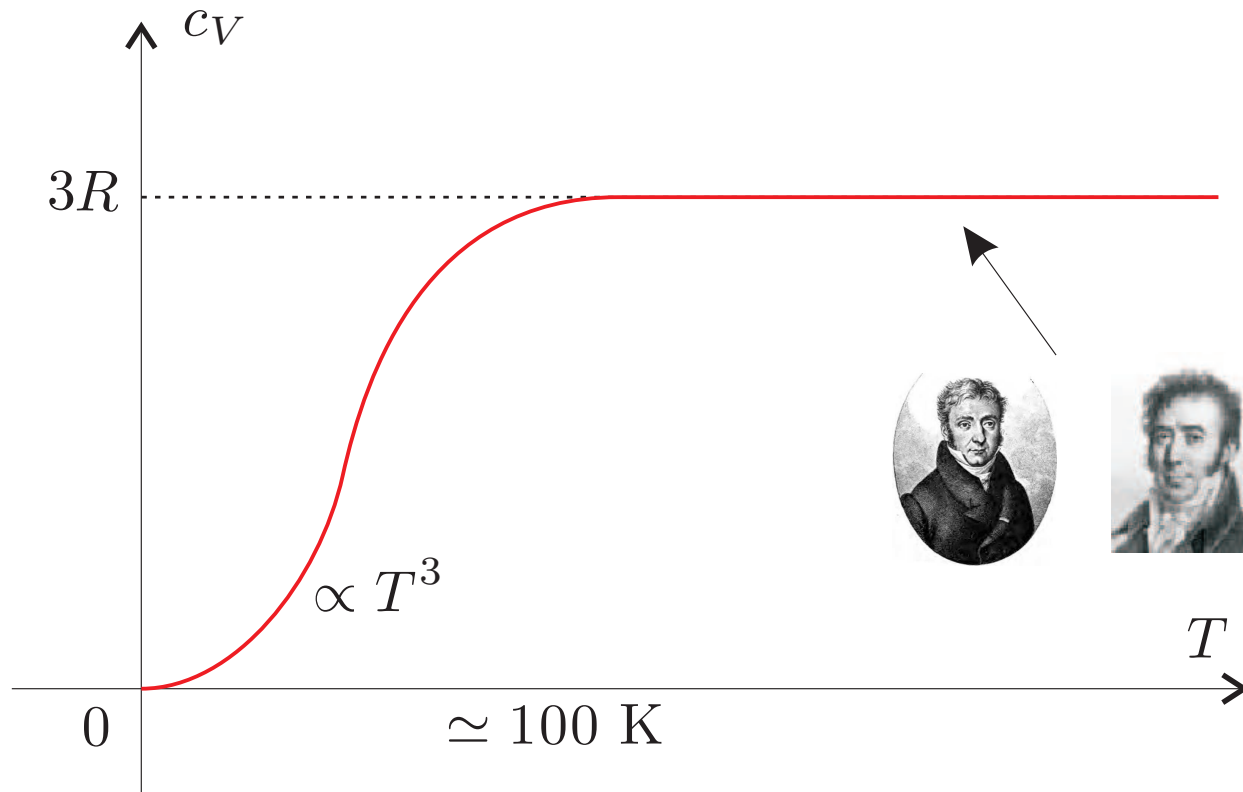


Premier pas vers l'équipartition de l'énergie

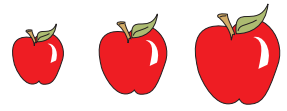


Propriétés des solides

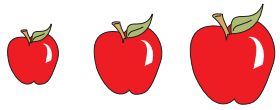
Expérimentalement, on constate un comportement du type $c_V \propto T^3$ lorsque $T \rightarrow 0$!



Classique \longrightarrow Quantique : Einstein, 1907 ; Debye, 1912

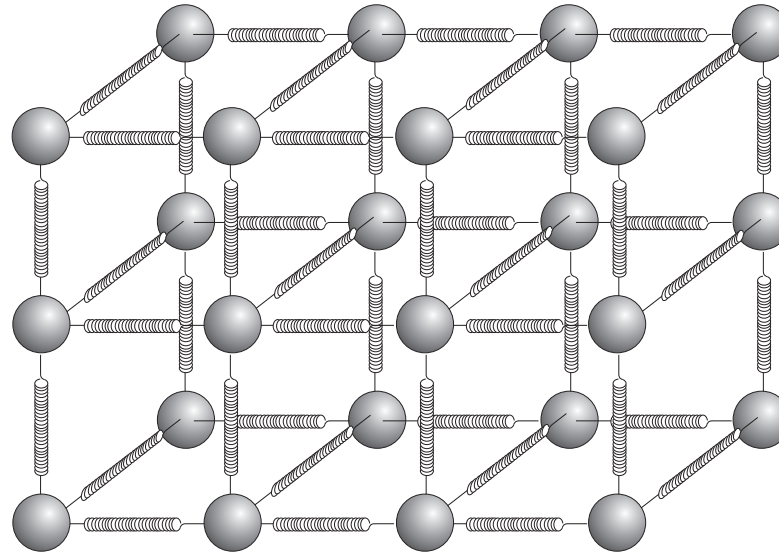


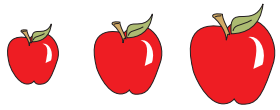
Le modèle d'Einstein (1907)



Le modèle d'Einstein (1907)

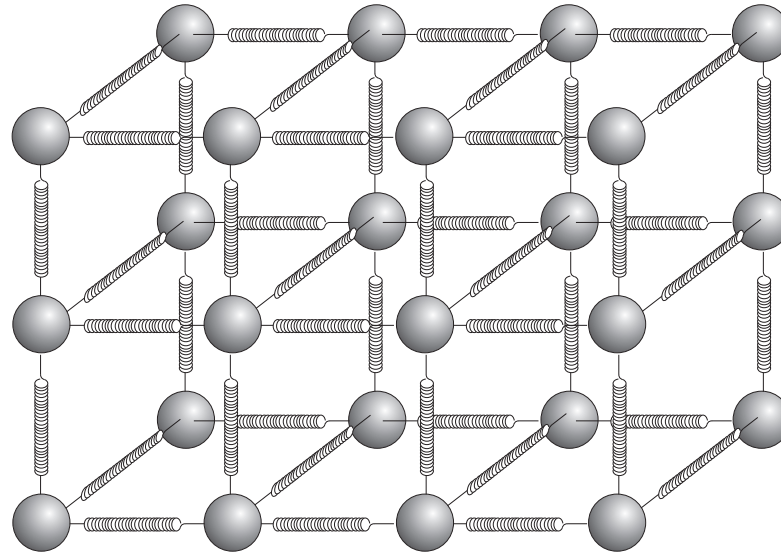
Solide : assemblée d'oscillateurs harmoniques quantiques 3D, découplés et vibrant à la pulsation ω_E .



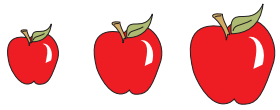


Le modèle d'Einstein (1907)

Solide : assemblée d'oscillateurs harmoniques quantiques 3D, découplés et vibrant à la pulsation ω_E .

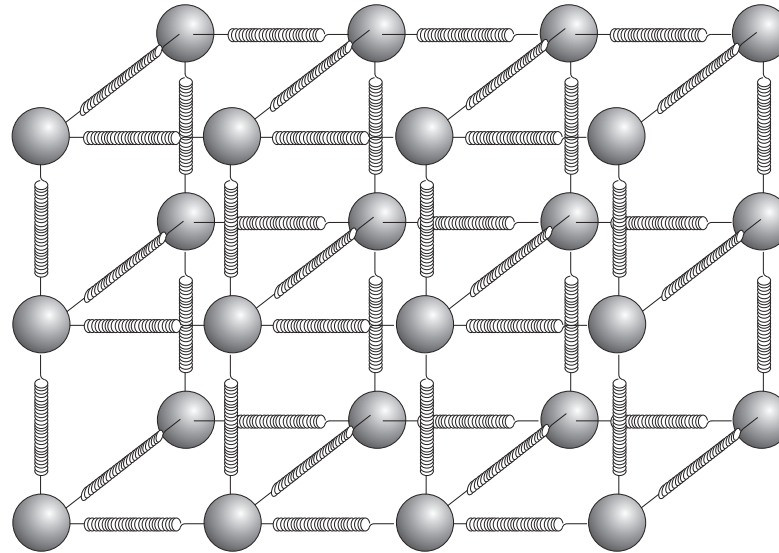


$$\varepsilon_i = \left(i + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega_E \quad i \in \mathbb{N}$$
$$g_i = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$$



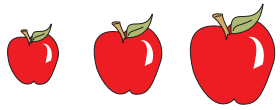
Le modèle d'Einstein (1907)

Solide : assemblée d'oscillateurs harmoniques quantiques 3D, découplés et vibrant à la pulsation ω_E .



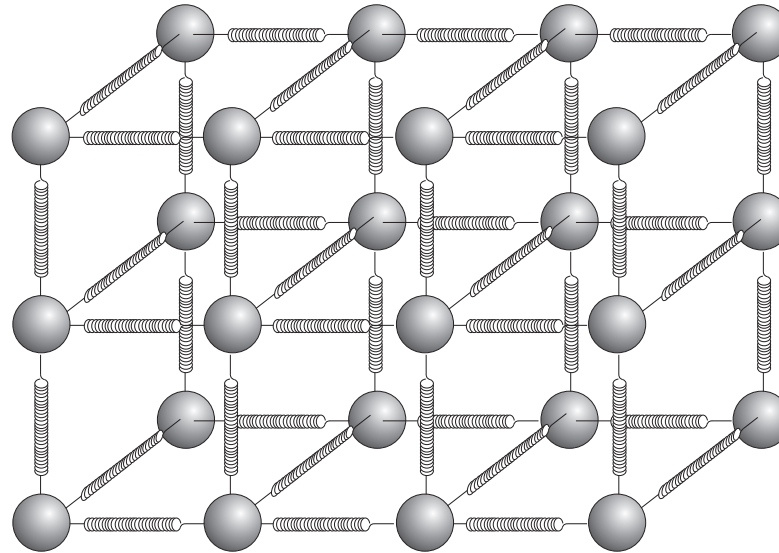
$$\varepsilon_i = \left(i + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega_E \quad i \in \mathbb{N}$$
$$g_i = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$$

Statistique de Maxwell-Boltzmann Corrigée \rightarrow Fonction de partition



Le modèle d'Einstein (1907)

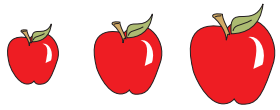
Solide : assemblée d'oscillateurs harmoniques quantiques 3D, découplés et vibrant à la pulsation ω_E .



$$\varepsilon_i = \left(i + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega_E \quad i \in \mathbb{N}$$
$$g_i = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$$

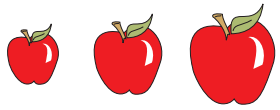
Statistique de Maxwell-Boltzmann Corrigée \rightarrow Fonction de partition

$$Z = \frac{e^{-\frac{3}{2}\beta\hbar\omega_E}}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega_E})^3}$$



On calcule l'énergie

$$U = -N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = \dots = \frac{3}{2} N \hbar \omega_E + \frac{3N \hbar \omega_E}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

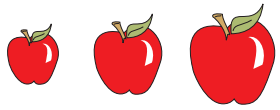


On calcule l'énergie

$$U = -N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = \dots = \frac{3}{2} N \hbar \omega_E + \frac{3N \hbar \omega_E}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

puis la capacité calorifique à volume constant

$$C_V = -k \beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_V = \dots = 3Nk (\hbar \omega_E \beta)^2 \frac{e^{\beta \hbar \omega_E}}{(e^{\beta \hbar \omega_E} - 1)^2}$$



On calcule l'énergie

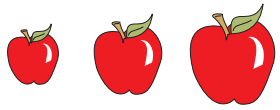
$$U = -N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = \dots = \frac{3}{2} N \hbar \omega_E + \frac{3N \hbar \omega_E}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

puis la capacité calorifique à volume constant

$$C_V = -k \beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_V = \dots = 3Nk (\hbar \omega_E \beta)^2 \frac{e^{\beta \hbar \omega_E}}{(e^{\beta \hbar \omega_E} - 1)^2}$$

→ Température d'Einstein : $\theta_E = \frac{\hbar \omega_E}{k}$ on obtient

$$C_V = 3Nk f_E(\xi) \quad \text{avec} \quad f_E(\xi) = \xi^2 \frac{e^\xi}{(e^\xi - 1)^2} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\theta_E}{T}$$



On calcule l'énergie

$$U = -N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = \dots = \frac{3}{2} N \hbar \omega_E + \frac{3N \hbar \omega_E}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

puis la capacité calorifique à volume constant

$$C_V = -k \beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_V = \dots = 3Nk (\hbar \omega_E \beta)^2 \frac{e^{\beta \hbar \omega_E}}{(e^{\beta \hbar \omega_E} - 1)^2}$$

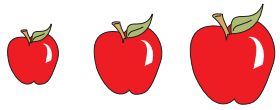
→ Température d'Einstein : $\theta_E = \frac{\hbar \omega_E}{k}$ on obtient

$$C_V = 3Nk f_E(\xi) \quad \text{avec} \quad f_E(\xi) = \xi^2 \frac{e^\xi}{(e^\xi - 1)^2} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\theta_E}{T}$$

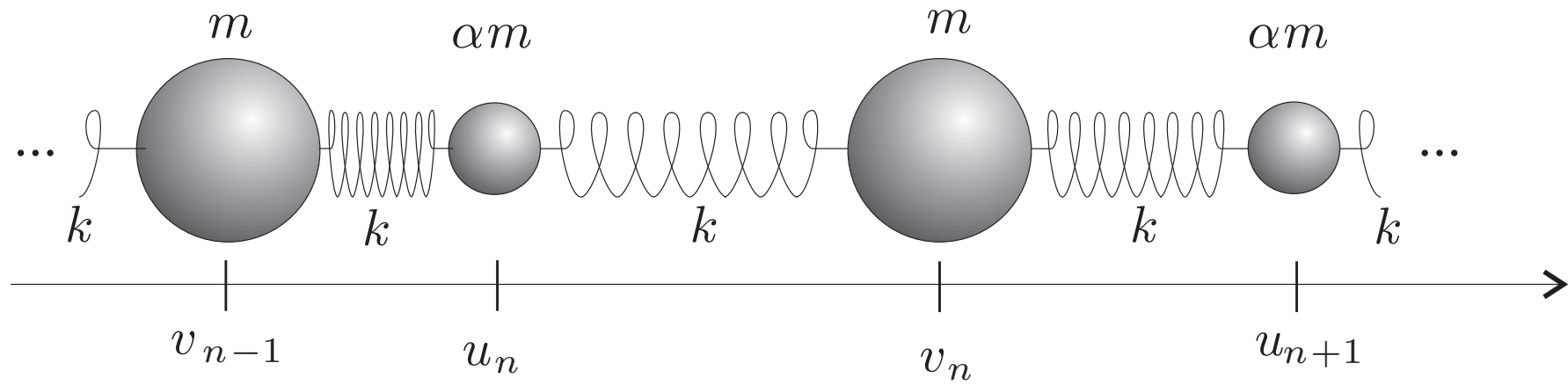
quelques développements donnent

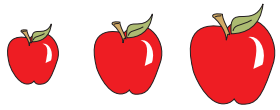
$$f_E(\xi) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{12} \xi^2 + o(\xi^2) & \text{si } \xi \ll 1 \quad \text{et donc } T \gg \theta_E \\ \xi^2 e^{-\xi} + o(e^{-\xi}) & \text{si } \xi \gg 1 \quad \text{et donc } T \rightarrow 0 \end{cases}$$

Presque correct !

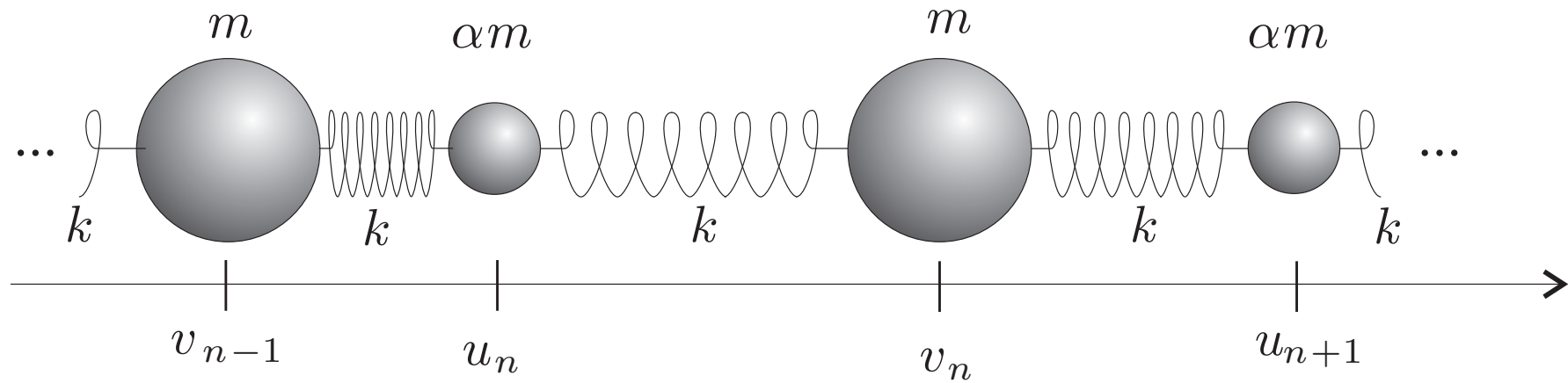


Réseaux d'oscillateurs



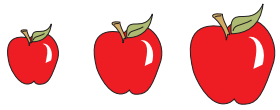


Réseaux d'oscillateurs

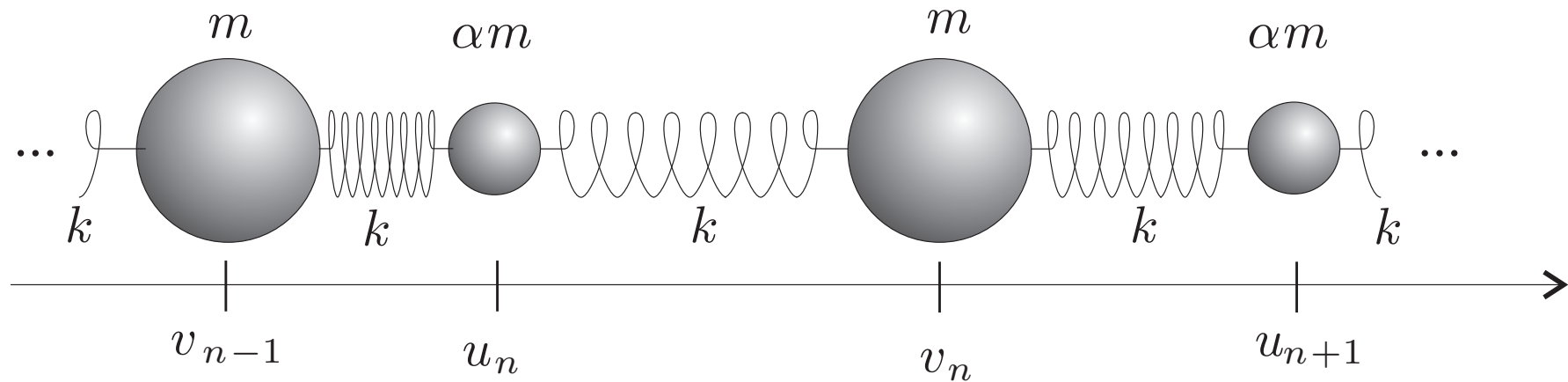


Equations du mouvement de chaque masse

$$\begin{cases} \alpha \ddot{u}_p + \Omega^2 (2u_p - v_{p-1} - v_p) = 0 \\ \ddot{v}_p + \Omega^2 (2v_p - u_{p+1} - u_p) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \Omega^2 = \frac{k}{m}$$



Réseaux d'oscillateurs

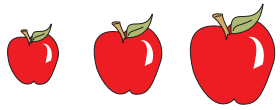


Equations du mouvement de chaque masse

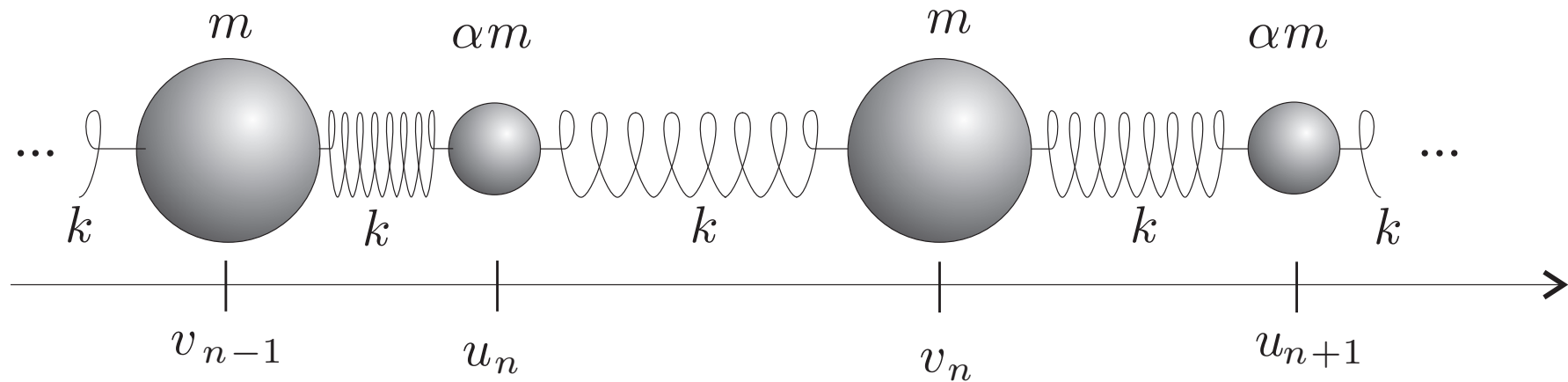
$$\begin{cases} \alpha \ddot{u}_p + \Omega^2 (2u_p - v_{p-1} - v_p) = 0 \\ \ddot{v}_p + \Omega^2 (2v_p - u_{p+1} - u_p) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \Omega^2 = \frac{k}{m}$$

Solutions: modes propres, paramétrés par la pulsation ω et le nombre d'onde k

$$u_n(t) = U_n e^{i(kn\ell - \omega t)} \quad \text{et} \quad v_n(t) = V_n e^{i(kn\ell - \omega t)}$$



Réseaux d'oscillateurs



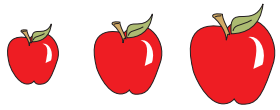
Equations du mouvement de chaque masse

$$\begin{cases} \alpha \ddot{u}_p + \Omega^2 (2u_p - v_{p-1} - v_p) = 0 \\ \ddot{v}_p + \Omega^2 (2v_p - u_{p+1} - u_p) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \Omega^2 = \frac{k}{m}$$

Solutions: modes propres, paramétrés par la pulsation ω et le nombre d'onde k

$$u_n(t) = U_n e^{i(kn\ell - \omega t)} \quad \text{et} \quad v_n(t) = V_n e^{i(kn\ell - \omega t)}$$

2 relations de dispersion ...

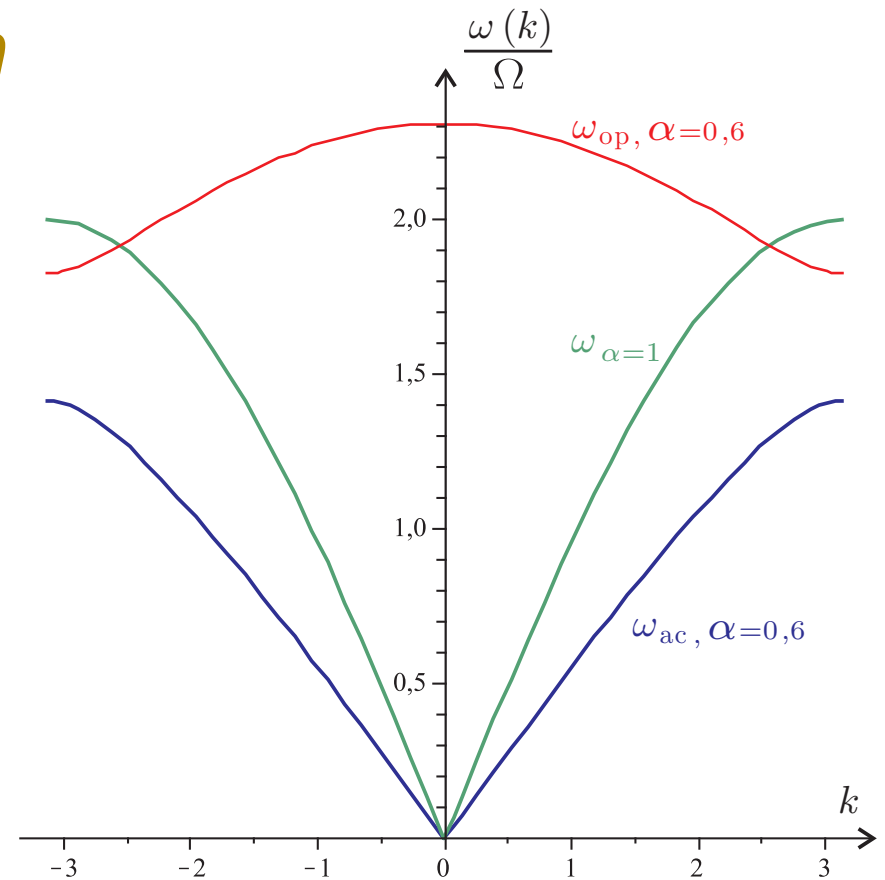


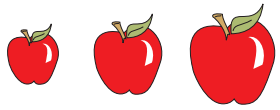
Modes de vibration

$$\omega_{\text{op}}^2 = \Omega^2 \left(\frac{1 + \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(kl)}}{\alpha} \right)$$

ou

$$\omega_{\text{ac}}^2 = \Omega^2 \left(\frac{1 + \alpha - \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(kl)}}{\alpha} \right)$$





Modes de vibration

$$\omega_{\text{op}}^2 = \Omega^2 \left(\frac{1 + \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(k\ell)}}{\alpha} \right)$$

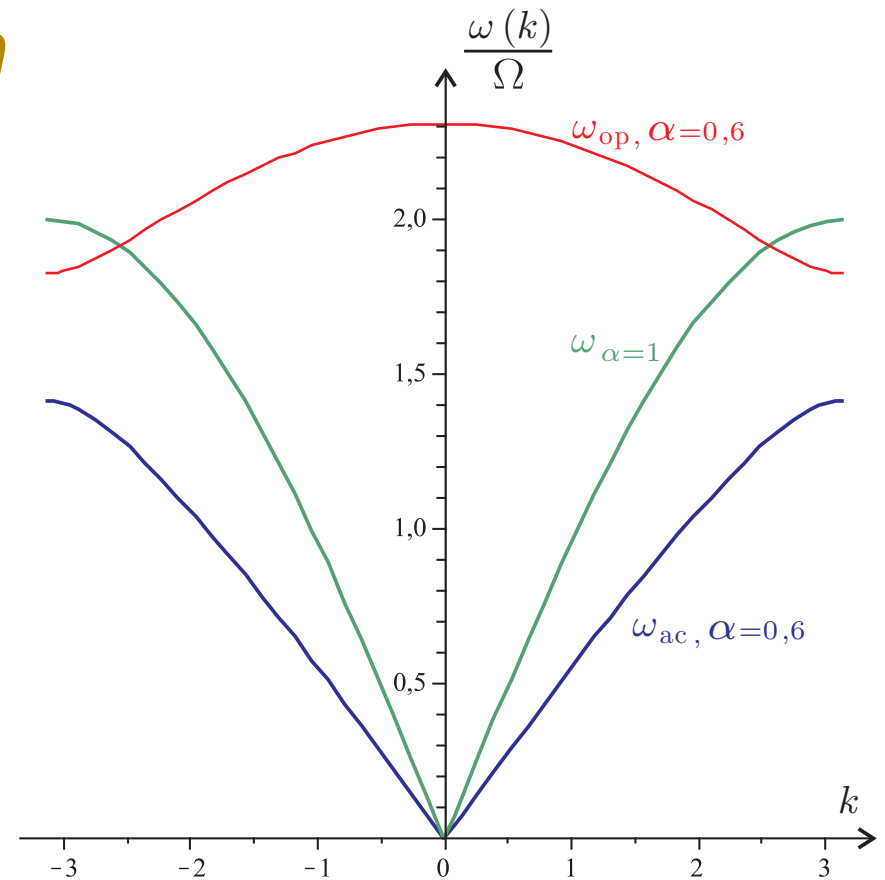
ou

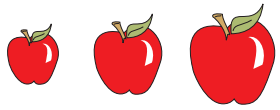
$$\omega_{\text{ac}}^2 = \Omega^2 \left(\frac{1 + \alpha - \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(k\ell)}}{\alpha} \right)$$

Approximation usuelle :

🍌 Mode optique : ω est indépendant de k

$$\omega_{\text{op}}(k) = \omega_o = \text{cste} \quad \forall k \in \left[-\frac{\pi}{\ell}, +\frac{\pi}{\ell} \right] \quad (5)$$





Modes de vibration

$$\omega_{\text{op}}^2 = \Omega^2 \left(\frac{1 + \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(k\ell)}}{\alpha} \right)$$

ou

$$\omega_{\text{ac}}^2 = \Omega^2 \left(\frac{1 + \alpha - \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(k\ell)}}{\alpha} \right)$$

Approximation usuelle :

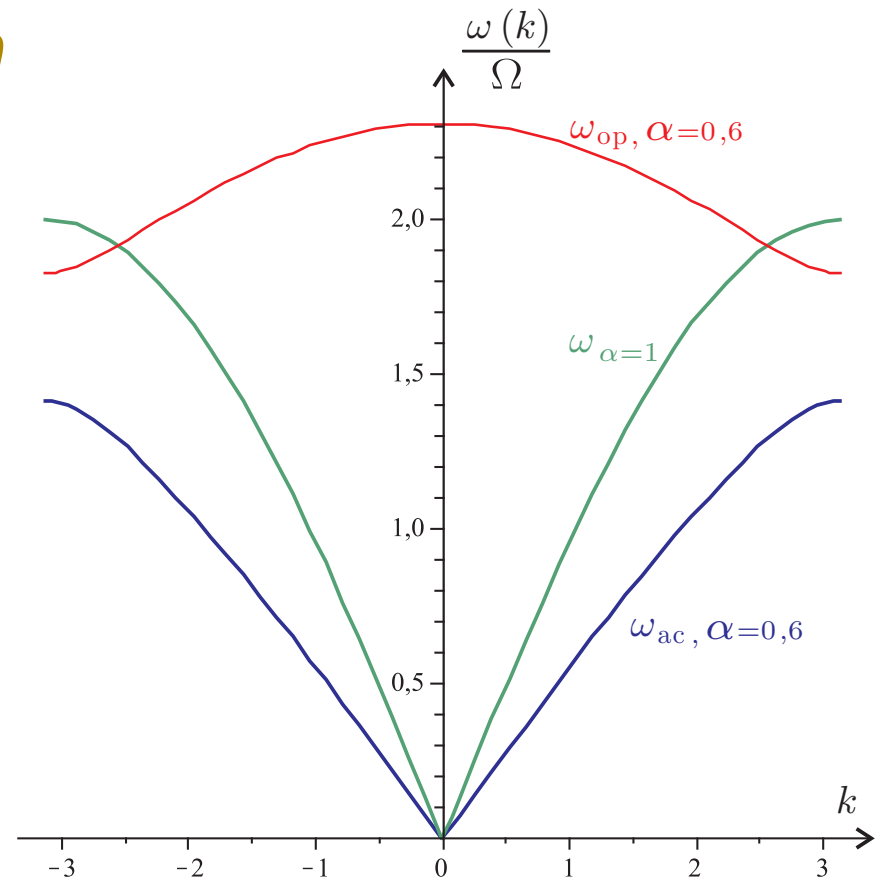
🍌 Mode optique : ω est indépendant de k

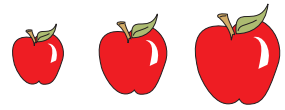
$$\omega_{\text{op}}(k) = \omega_o = \text{cste} \quad \forall k \in \left[-\frac{\pi}{\ell}, +\frac{\pi}{\ell} \right] \quad (5)$$

🍓 Mode acoustique : relation linéaire

$$\omega_{\text{ac}} = c_s |k| \quad \forall k \in \left[-\frac{\pi}{\ell}, +\frac{\pi}{\ell} \right] \quad (6)$$

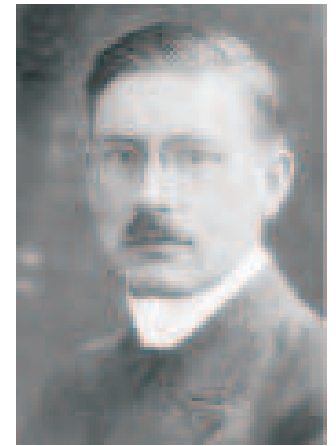
c_s : vitesse du son dans le solide

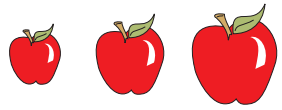




Le modèle de Debye (1912)

Solide homogène maille monoatomique de taille ℓ





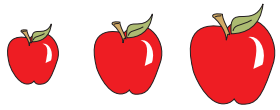
Le modèle de Debye (1912)

Solide homogène maille monoatomique de taille ℓ

3 modes de propagation acoustiques pour les vibrations du réseau

$$\text{Pour } i = 1, 2, 3 \quad \omega = c_{s,i} |k| \quad \forall k \in \left[-\frac{\pi}{\ell}, +\frac{\pi}{\ell} \right]$$





Le modèle de Debye (1912)



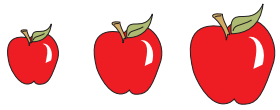
Solide homogène maille monoatomique de taille ℓ

3 modes de propagation acoustiques pour les vibrations du réseau

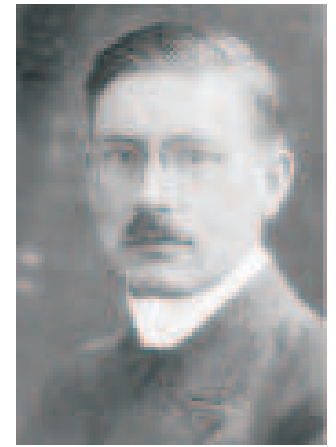
$$\text{Pour } i = 1, 2, 3 \quad \omega = c_{s,i} |k| \quad \forall k \in \left[-\frac{\pi}{\ell}, +\frac{\pi}{\ell}\right]$$

Modèle de Debye :

- 2 modes transverses $c_{s,1} = c_{s,2} := c_t$
- 1 mode longitudinal $c_{s,3} := c_l$
- Introduction du concept de phonon acoustique ...



Le modèle de Debye (1912)



Solide homogène maille monoatomique de taille ℓ

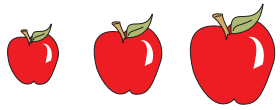
3 modes de propagation acoustiques pour les vibrations du réseau

$$\text{Pour } i = 1, 2, 3 \quad \omega = c_{s,i} |k| \quad \forall k \in \left[-\frac{\pi}{\ell}, +\frac{\pi}{\ell}\right]$$

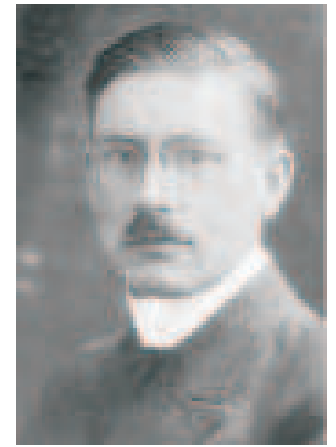
Modèle de Debye :

- 2 modes transverses $c_{s,1} = c_{s,2} := c_t$
- 1 mode longitudinal $c_{s,3} := c_l$
- Introduction du concept de phonon acoustique ...

$$\text{Photon} \Leftrightarrow \varepsilon = cp = \hbar\omega$$



Le modèle de Debye (1912)



Solide homogène maille monoatomique de taille ℓ

3 modes de propagation acoustiques pour les vibrations du réseau

$$\text{Pour } i = 1, 2, 3 \quad \omega = c_{s,i} |k| \quad \forall k \in \left[-\frac{\pi}{\ell}, +\frac{\pi}{\ell}\right]$$

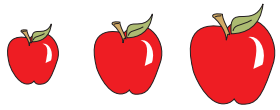
Modèle de Debye :

- 2 modes transverses $c_{s,1} = c_{s,2} := c_t$
- 1 mode longitudinal $c_{s,3} := c_l$
- Introduction du concept de phonon acoustique ...

$$\text{Photon} \Leftrightarrow \varepsilon = cp = \hbar\omega$$

Vibration du réseaux \Leftrightarrow Oscillateurs harmoniques quantiques : $\varepsilon = \hbar\omega(n + 1/2)$

$$\Rightarrow n \text{ Phonons } \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \varepsilon = c_s p$$



Le modèle de Debye (1912)



Solide homogène maille monoatomique de taille ℓ

3 modes de propagation acoustiques pour les vibrations du réseau

$$\text{Pour } i = 1, 2, 3 \quad \omega = c_{s,i} |k| \quad \forall k \in \left[-\frac{\pi}{\ell}, +\frac{\pi}{\ell}\right]$$

Modèle de Debye :

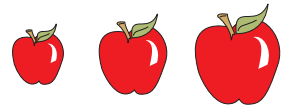
- 2 modes transverses $c_{s,1} = c_{s,2} := c_t$
- 1 mode longitudinal $c_{s,3} := c_l$
- Introduction du concept de phonon acoustique ...

$$\text{Photon} \Leftrightarrow \varepsilon = cp = \hbar\omega$$

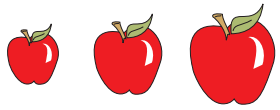
Vibration du réseaux \Leftrightarrow Oscillateurs harmoniques quantiques : $\varepsilon = \hbar\omega(n + 1/2)$

$$\Rightarrow n \text{ Phonons } \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \varepsilon = c_s p$$

Phonons = bosons en nombre non conservé



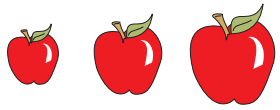
Densité d'état des phonons



Densité d'état des phonons

Dans l'espace des impulsions

$$g(p) dp = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3}$$



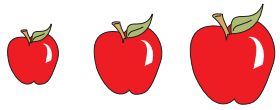
Densité d'état des phonons

Dans l'espace des impulsions

$$g(p) dp = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3}$$

2 types d'états d'impulsion

$$g_l(p) dp = \frac{V 4\pi \varepsilon^2 d\varepsilon}{c_l^3 h^3} \quad \text{et} \quad g_t(p) dp = 2 \times \frac{V 4\pi \varepsilon^2 d\varepsilon}{c_t^3 h^3}$$



Densité d'état des phonons

Dans l'espace des impulsions

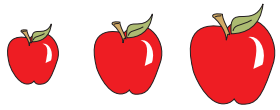
$$g(p) dp = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3}$$

2 types d'états d'impulsion

$$g_l(p) dp = \frac{V 4\pi \varepsilon^2 d\varepsilon}{c_l^3 h^3} \quad \text{et} \quad g_t(p) dp = 2 \times \frac{V 4\pi \varepsilon^2 d\varepsilon}{c_t^3 h^3}$$

Dans l'espace des énergies (modèle de Debye)

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) d\varepsilon &= [g_l(p) + g_t(p)] dp \\ &= \frac{4\pi V \varepsilon^2 d\varepsilon}{h^3} \left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3} \right) \\ &= \frac{12\pi V}{c_s^3 h^3} \varepsilon^2 d\varepsilon \quad \text{avec} \quad \frac{3}{c_s^3} = \frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3} \end{aligned}$$



Densité d'état des phonons

Dans l'espace des impulsions

$$g(p) dp = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3}$$

2 types d'états d'impulsion

$$g_l(p) dp = \frac{V 4\pi \varepsilon^2 d\varepsilon}{c_l^3 h^3} \quad \text{et} \quad g_t(p) dp = 2 \times \frac{V 4\pi \varepsilon^2 d\varepsilon}{c_t^3 h^3}$$

Dans l'espace des énergies (modèle de Debye)

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) d\varepsilon &= [g_l(p) + g_t(p)] dp \\ &= \frac{4\pi V \varepsilon^2 d\varepsilon}{h^3} \left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3} \right) \\ &= \frac{12\pi V}{c_s^3 h^3} \varepsilon^2 d\varepsilon \quad \text{avec} \quad \frac{3}{c_s^3} = \frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3} \end{aligned}$$

Le nombre total d'états est fixé par le nombre d'oscillateurs

$$\int g(\varepsilon) d\varepsilon = 3N \quad \text{il faut couper l'intégrale !}$$



Température de Debye θ_d telle que

$$\frac{12\pi V}{c_s^3 h^3} \int_0^{\varepsilon_d} \varepsilon^2 d\varepsilon = 3N \quad \Rightarrow \quad \theta_d := \frac{\varepsilon_d}{k} = \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3} \frac{c_s h}{k}$$



Température de Debye θ_d telle que

$$\frac{12\pi V}{c_s^3 h^3} \int_0^{\varepsilon_d} \varepsilon^2 d\varepsilon = 3N \quad \Rightarrow \quad \theta_d := \frac{\varepsilon_d}{k} = \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3} \frac{c_s h}{k}$$

L'énergie interne du solide s'écrira donc dans le modèle de Debye

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\varepsilon_d} \varepsilon \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \\ &= \frac{12\pi V}{c_s^3 h^3} \int_0^{\varepsilon_d} \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon \end{aligned}$$



Température de Debye θ_d telle que

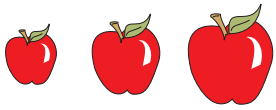
$$\frac{12\pi V}{c_s^3 h^3} \int_0^{\varepsilon_d} \varepsilon^2 d\varepsilon = 3N \quad \Rightarrow \quad \theta_d := \frac{\varepsilon_d}{k} = \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3} \frac{c_s h}{k}$$

L'énergie interne du solide s'écrira donc dans le modèle de Debye

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\varepsilon_d} \varepsilon \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \\ &= \frac{12\pi V}{c_s^3 h^3} \int_0^{\varepsilon_d} \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon \end{aligned}$$

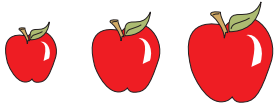
et la capacité calorifique à volume constant

$$\begin{aligned} C_V &= -k\beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_V \\ &= \frac{12k\beta^2 \pi V}{c_s^3 h^3} \int_0^{\varepsilon_d} \frac{\varepsilon^4 e^{\beta\varepsilon}}{(e^{\beta\varepsilon} - 1)^2} d\varepsilon \end{aligned}$$



variables sans dimension $x = \beta\varepsilon$ et $x_d = T/\theta_d$ un peu de calcul ...

$$U = 9Nkx_d^3T \int_0^{1/x_d} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \text{et} \quad C_V = 9Nkx_d^3 \int_0^{1/x_d} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$



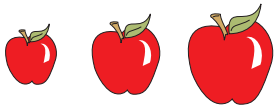
variables sans dimension $x = \beta\varepsilon$ et $x_d = T/\theta_d$ un peu de calcul ...

$$U = 9Nkx_d^3T \int_0^{1/x_d} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \text{et} \quad C_V = 9Nkx_d^3 \int_0^{1/x_d} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

🍌 Si $T \gg \theta_d$, $x_d \gg 1$,

$$\begin{cases} U = 3NkT + o(x_d^{-3}) \\ \text{et} \\ C_V = 3Nk + o(x_d^{-3}) \end{cases}$$

la loi de Dulong et Petit et l'équipartition de l'énergie dont elle découle sont retrouvées !



variables sans dimension $x = \beta\varepsilon$ et $x_d = T/\theta_d$ un peu de calcul ...

$$U = 9Nkx_d^3T \int_0^{1/x_d} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \text{et} \quad C_V = 9Nkx_d^3 \int_0^{1/x_d} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

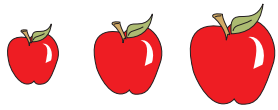
🍌 Si $T \gg \theta_d$, $x_d \gg 1$,

$$\begin{cases} U = 3NkT + o(x_d^{-3}) \\ \text{et} \\ C_V = 3Nk + o(x_d^{-3}) \end{cases}$$

la loi de Dulong et Petit et l'équipartition de l'énergie dont elle découle sont retrouvées !

🍏 Si $T \ll \theta_d$, $x_d \ll 1$,

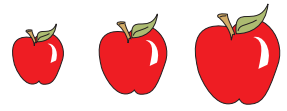
$$\begin{cases} U = \frac{3\pi^4 Nk}{5\theta_d^3} T^4 \\ \text{et} \\ C_V = \frac{12\pi^4 Nk}{5\theta_d^3} T^3 \end{cases} \quad \text{conforme à l'expérience !}$$



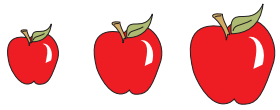
Cristal	θ_d [K]	Cristal	θ_d [K]
Aluminium (Al)	426	Platine (Pt)	240
Cadmium (Cd)	134	Silicium (Si)	645*
Chrome (Cr)	610	Argent (Ag)	215
Cuivre (Cu)	315	Étain blanc (α -Sn)	230
Or (Au)	170	Titane (Ti)	420
Fer- α (Fe- α)	464	Tungstène (W)	405
Plomb (Pb)	96	Zinc (Zn)	300
Manganèse- α (Mn- α)	476	Diamant	2340*
Nickel (Ni)	440	Glace	192

toutes les autres grandeurs thermodynamiques sont accessibles au modèle de Debye et permettent de rendre compte de nombreuses de leurs propriétés.

On peut aussi raffiner le modèle !



Bosons en nombre déterminé

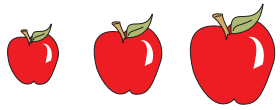


Bosons en nombre déterminé

$$n^{be}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad \mu : \text{potentiel chimique}$$

autres paramètres

Fugacité $\varphi := e^{\beta\mu}$ ou bien $\chi = \beta\mu = \ln \varphi$



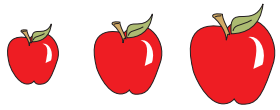
Bosons en nombre déterminé

$$n^{be}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad \mu : \text{potentiel chimique}$$

autres paramètres

Fugacité $\varphi := e^{\beta\mu}$ ou bien $\chi = \beta\mu = \ln \varphi$

Attention : $n(\varepsilon) \geq 0$ donc $e^{\beta(\varepsilon-\mu)} > 1 \Rightarrow \beta(\varepsilon - \mu) > 0$ et finalement $\varepsilon > \mu$.
min(ε) : $\varepsilon_o =$ niveau fondamental. Dans le cas d'un gaz parfait l'énergie est purement cinétique $\varepsilon = p^2/2m$ pour chaque particule, le niveau fondamental est donc $\varepsilon_o = 0$.



Bosons en nombre déterminé

$$n^{be}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad \mu : \text{potentiel chimique}$$

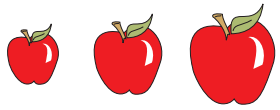
autres paramètres

Fugacité $\varphi := e^{\beta\mu}$ ou bien $\chi = \beta\mu = \ln \varphi$

Attention : $n(\varepsilon) \geq 0$ donc $e^{\beta(\varepsilon-\mu)} > 1 \Rightarrow \beta(\varepsilon - \mu) > 0$ et finalement $\varepsilon > \mu$.
 $\min(\varepsilon) : \varepsilon_o =$ niveau fondamental. Dans le cas d'un gaz parfait l'énergie est purement cinétique $\varepsilon = p^2/2m$ pour chaque particule, le niveau fondamental est donc $\varepsilon_o = 0$.

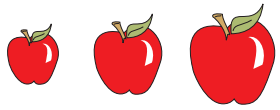
Pour un gaz parfait de bosons en nombre déterminé on a donc

$$\mu < 0 \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \varphi < 1 \\ \text{et} \\ \chi < 0 \end{cases}$$



Modèle général

$$U = \sum_i \varepsilon_i n_i^o \quad \text{et} \quad S = k \ln W^b$$

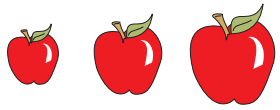


Modèle général

$$U = \sum_i \varepsilon_i n_i^o \quad \text{et} \quad S = k \ln W^b$$

...Stirling...

$$\ln W^b = \beta U - \chi N - \sum_i g_i \ln [1 - \exp(\chi - \beta \varepsilon_i)]$$



Modèle général

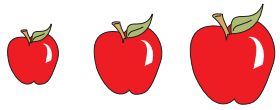
$$U = \sum_i \varepsilon_i n_i^o \quad \text{et} \quad S = k \ln W^b$$

...Stirling...

$$\ln W^b = \beta U - \chi N - \sum_i g_i \ln [1 - \exp(\chi - \beta \varepsilon_i)]$$

Energie libre de Helmholtz $F = U - TS \dots$

$$\begin{aligned} F &= U - \frac{\ln W}{\beta} \\ &= \frac{1}{\beta} \left\{ \chi N + \sum_i g_i \ln [1 - \exp(\chi - \beta \varepsilon_i)] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$



Modèle général

$$U = \sum_i \varepsilon_i n_i^o \quad \text{et} \quad S = k \ln W^b$$

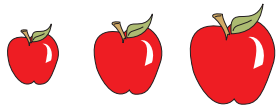
...Stirling...

$$\ln W^b = \beta U - \chi N - \sum_i g_i \ln [1 - \exp(\chi - \beta \varepsilon_i)]$$

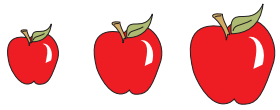
Energie libre de Helmholtz $F = U - TS \dots$

$$\begin{aligned} F &= U - \frac{\ln W}{\beta} \\ &= \frac{1}{\beta} \left\{ \chi N + \sum_i g_i \ln [1 - \exp(\chi - \beta \varepsilon_i)] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Limite continue (attention à la validité...)



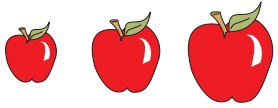
$$g(p) dp = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp .$$



$$g(p) dp = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp .$$

Gaz parfait de bosons

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$$



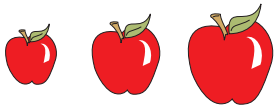
$$g(p) dp = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp .$$

Gaz parfait de bosons

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$$

À la limite continue, nous avons donc

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{\beta} \left\{ \chi N + \int_0^\infty g(p) dp \ln [1 - \exp(\chi - \beta\varepsilon)] \right\} \\ &= \frac{1}{\beta} \left\{ \chi N + \frac{4\sqrt{2}\pi V}{h^3} m^{3/2} \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} \ln [1 - \exp(\chi - \beta\varepsilon)] d\varepsilon \right\} \end{aligned}$$



$$g(p) dp = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp .$$

Gaz parfait de bosons

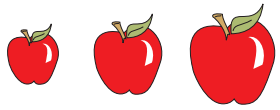
$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$$

À la limite continue, nous avons donc

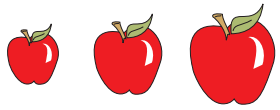
$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{\beta} \left\{ \chi^N + \int_0^\infty g(p) dp \ln [1 - \exp(\chi - \beta\varepsilon)] \right\} \\ &= \frac{1}{\beta} \left\{ \chi^N + \frac{4\sqrt{2}\pi V}{h^3} m^{3/2} \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} \ln [1 - \exp(\chi - \beta\varepsilon)] d\varepsilon \right\} \end{aligned}$$

on pose $x = \beta\varepsilon$ et on obtient

$$F = \frac{1}{\beta} \left\{ \chi^N + \frac{4\sqrt{2}\pi V}{h^3} \left(\frac{m}{\beta} \right)^{3/2} \int_0^\infty \sqrt{x} \ln [1 - \exp(\chi - x)] dx \right\}$$



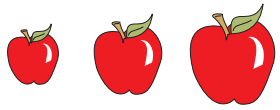
$$F = \frac{1}{\beta} \left\{ \chi N + \frac{2V}{h^3 \sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \sqrt{x} \ln [1 - \exp(\chi - x)] dx \right\}$$



$$F = \frac{1}{\beta} \left\{ \chi^N + \frac{2V}{h^3 \sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \int_0^\infty \sqrt{x} \ln [1 - \exp(\chi - x)] dx \right\}$$

On reconnait la fonction de partition de translation du gaz parfait classique

$$Z = Z(V, \beta) = \frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2}$$



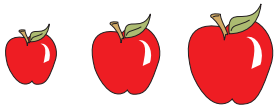
$$F = \frac{1}{\beta} \left\{ \chi^N + \frac{2V}{h^3 \sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \int_0^\infty \sqrt{x} \ln [1 - \exp(\chi - x)] dx \right\}$$

On reconnaît la fonction de partition de translation du gaz parfait classique

$$Z = Z(V, \beta) = \frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2}$$

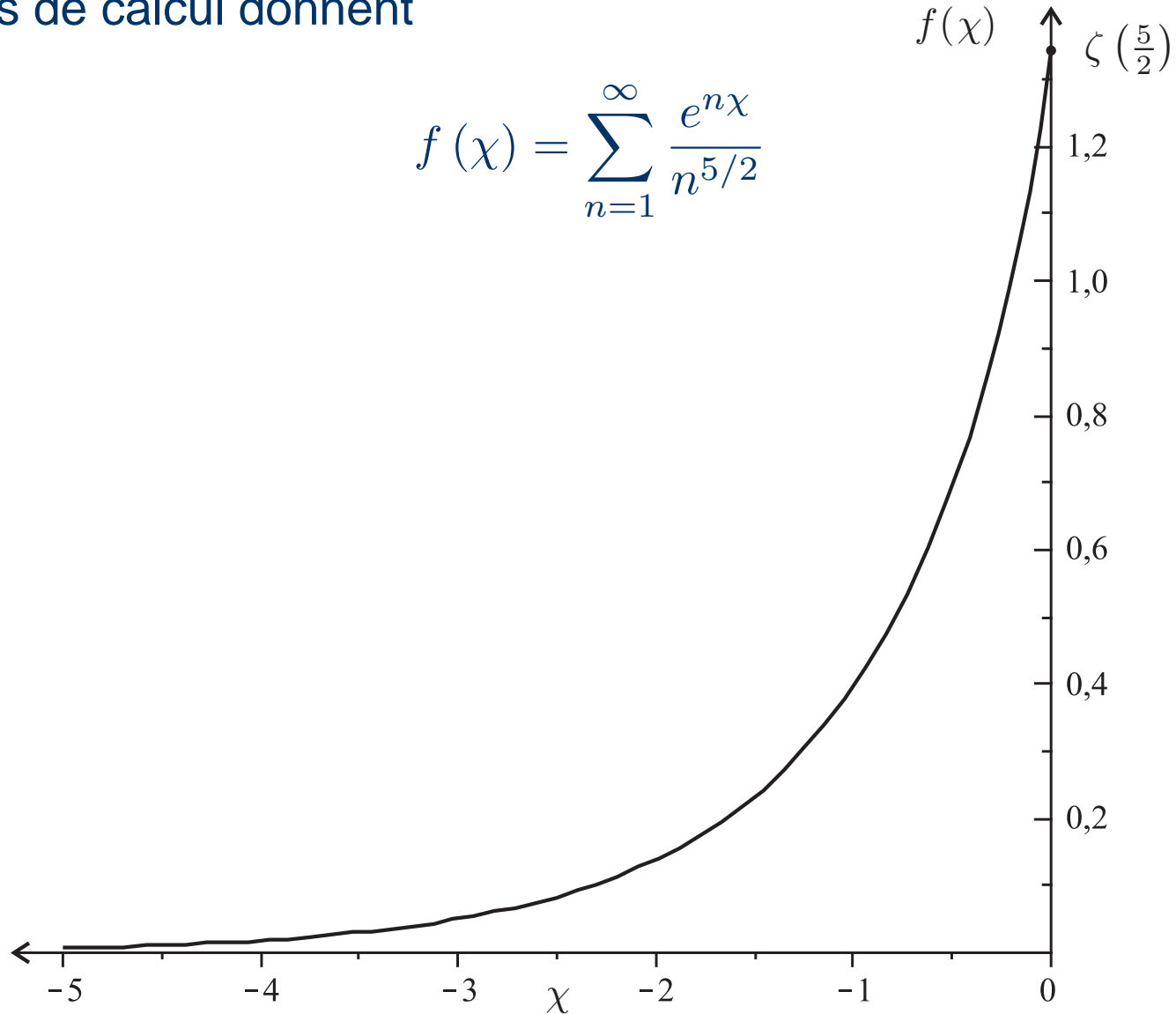
pour obtenir

$$F = \frac{N}{\beta} \left[\chi - \frac{1}{\alpha} f(\chi) \right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{N}{Z} = f'(\chi) = cste \\ f(\chi) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{x} \ln [1 - \exp(\chi - x)] dx \end{cases}$$

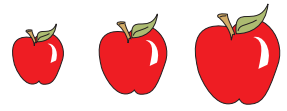


Quelques lignes de calcul donnent

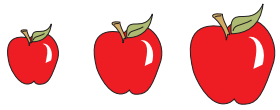
$$f(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\chi}}{n^{5/2}}$$



→ On peut calculer toutes les grandeurs thermodynamiques ...



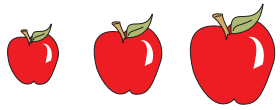
Condensation de Bose-Einstein



Condensation de Bose-Einstein

À l'équilibre,

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$



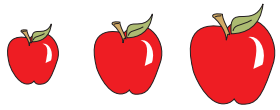
Condensation de Bose-Einstein

À l'équilibre,

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

Le nombre total de bosons considéré est N , il est conservé. Il est clair que

$$N = \sum_i \frac{g_i}{e^{-\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$



Condensation de Bose-Einstein

À l'équilibre,

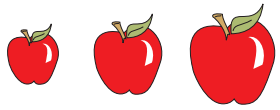
$$n_i = \frac{g_i}{e^{\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

Le nombre total de bosons considéré est N , il est conservé. Il est clair que

$$N = \sum_i \frac{g_i}{e^{-\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

Si $T \rightarrow 0$ toutes les particules ont tendance à rejoindre le niveau fondamental $\varepsilon_0 = 0$ non dégénéré, on sépare donc sa contribution :

$$N = \frac{(g_0 = 1)}{e^{-\chi} - 1} + \sum_{i \neq 0} \frac{g_i}{e^{-\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$



Condensation de Bose-Einstein

À l'équilibre,

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

Le nombre total de bosons considéré est N , il est conservé. Il est clair que

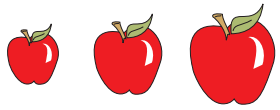
$$N = \sum_i \frac{g_i}{e^{-\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

Si $T \rightarrow 0$ toutes les particules ont tendance à rejoindre le niveau fondamental $\varepsilon_0 = 0$ non dégénéré, on sépare donc sa contribution :

$$N = \frac{(g_0 = 1)}{e^{-\chi} - 1} + \sum_{i \neq 0} \frac{g_i}{e^{-\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

à la limite continue (à discuter)

$$N = \frac{1}{e^{-\chi} - 1} + \int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta \varepsilon - \chi} - 1}$$



Condensation de Bose-Einstein

À l'équilibre,

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

Le nombre total de bosons considéré est N , il est conservé. Il est clair que

$$N = \sum_i \frac{g_i}{e^{-\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

Si $T \rightarrow 0$ toutes les particules ont tendance à rejoindre le niveau fondamental $\varepsilon_0 = 0$ non dégénéré, on sépare donc sa contribution :

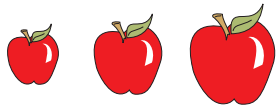
$$N = \frac{(g_0 = 1)}{e^{-\chi} - 1} + \sum_{i \neq 0} \frac{g_i}{e^{-\chi} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

à la limite continue (à discuter)

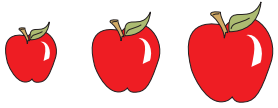
$$N = \frac{1}{e^{-\chi} - 1} + \int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta \varepsilon - \chi} - 1}$$

...

$$1 = \frac{1}{N(e^{-\chi} - 1)} + \frac{f'(\chi)}{\alpha}$$



$$1 = \frac{1}{N(e^{-x} - 1)} + \frac{f'(x)}{\alpha}$$



$$1 = \frac{1}{N(e^{-\chi} - 1)} + \frac{f'(\chi)}{\alpha}$$

On sait que :

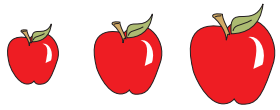
🍌 $\chi \leq \varepsilon_o = 0$ car $n_i \geq 0$;

🍓 $f'(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\chi}/n^{3/2}$ est positive et croissante, sa valeur maximale $\zeta(3/2)$ est atteinte pour $\chi = 0$;

🍑 Pour N fixé, le paramètre α est tel que

$$\alpha = \frac{N}{Z} = \alpha(V, T) = \frac{Nh^3}{V} \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2}$$

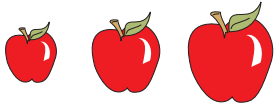
il est faible pour les hautes températures.



$$1 = \frac{1}{N(e^{-\chi} - 1)} + \frac{f'(\chi)}{\alpha}$$

Tant que $\alpha < \zeta(3/2)$, on montre que χ est très négatif

Le **premier terme** est négligeable devant le **second**. L'équation $f'(\chi) = \alpha$ admet une solution qui fixe le volume et la température



$$1 = \frac{1}{N(e^{-\chi} - 1)} + \frac{f'(\chi)}{\alpha}$$

Pour $\alpha = \zeta(3/2) : V = V_b, T = T_b$ et $\chi \ll 0$

On calcule dans ces conditions

$$f'(\chi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\chi} - 1} dx = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) - \sqrt{4\pi(-\chi)} + o\left((- \chi)^{1/2}\right)$$

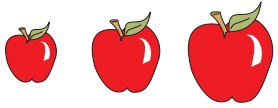
qui permet d'avoir

$$e^{-\chi} = 1 - \chi + o(\chi) = 1 - \frac{\zeta(3/2)}{N\sqrt{4\pi(-\chi)}} + o\left((- \chi)^{1/2}\right)$$

en identifiant les termes identifiables on obtient finalement

$$\chi = - \left(\frac{\zeta(3/2)}{N\sqrt{4\pi}} \right)^{2/3}$$

qui, comme prévu et compte-tenu de la valeur de N est pratiquement nul !



$$1 = \frac{1}{N(e^{-\chi} - 1)} + \frac{f'(\chi)}{\alpha}$$

Si $\alpha > \zeta(3/2)$ alors $\chi \simeq 0^-$

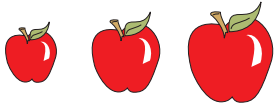
$f'(\chi)$ stagne à sa valeur maximale.

Alors que $e^{-\chi}$ se rapproche de plus en plus de la valeur 1 pendant que la température baisse ...

Le paramètre α devient de plus en plus grand ...

Le nombre de bosons dans l'état fondamental devient de plus en plus grand !

Il atteint N pour $T = 0$.



$$1 = \frac{1}{N(e^{-x} - 1)} + \frac{f'(x)}{\alpha}$$

En résumé,

tant que V et T permettent d'avoir $\alpha < \zeta(3/2)$ les bosons se répartissent sur tous les niveaux accessibles selon la distribution de Bose-Einstein,

par contre dès que $\alpha \geq \zeta(3/2)$ le niveau fondamental devient macroscopiquement peuplé : le système se condense dans l'espace des énergies, c'est la condensation de Bose-Einstein.

Les propriétés physiques d'un gaz parfait de bosons condensés sont très particulières : He_4 devient superfluide dans l'état condensé dès que $T < 2,2$ K.